

# Résonance Stochastique via des SETAR(1, N, 0, . . . , 0) discrets non-linéaires

Steve Zozor et Pierre-Olivier Amblard

CEPHAG, ENSIEG, Domaine Universitaire, B.P. 46  
38402 Saint Martin d'Hères, France

## RÉSUMÉ

Nous étudions dans ce papier le phénomène de résonance stochastique. Ce phénomène physique non-linéaire est issu de systèmes généralement bistables. Excités par du bruit et une sinusoïde, ces systèmes présentent la particularité de faire coopérer le bruit et la sinusoïde d'entrée : la sinusoïde est amplifiée grâce à la présence du bruit. Ce phénomène a jusqu'à présent été étudiés uniquement dans des contextes à temps continu. Nous étendons cette étude au contexte temps discret, en étudiant une classe de systèmes intrinsèquement discrets : les SETAR(1, N, 0, . . . , 0). Nous montrons ainsi, en s'affranchissant de l'hypothèse adiabatique, que ces systèmes sont capables d'engendrer de la résonance stochastique. Nous discutons alors de l'utilisation de tels systèmes en traitement du signal.

## ABSTRACT

This paper deals with the stochastic resonance phenomenon. This nonlinear physical phenomenon occurs generally in bistable systems excited by a sine plus a noise. The particularity of such systems is to make cooperate (through the internal dynamics) the input sine and the input noise: the sine is amplified thanks to the noise. This phenomenon only have been studied in continuous time context. We extend in this paper this study to the discrete time context by studying intrinsically discrete systems: the SETAR(1, N, 0, . . . , 0) models. We show, without the adiabatic assumption (needed in the continuous time theory), that such discrete systems are able to produce stochastic resonance. At last, we discussed on the use of stochastic resonance in signal processing.

## 1 Introduction

Le phénomène de résonance stochastique (SR) est un phénomène physique apparaissant dans des systèmes bistables excités par une sinusoïde de faible amplitude, bruitée. Pour bien appréhender ce phénomène, imaginons une particule de masse nulle soumise à un potentiel bimodal. Si cette particule est soumise à une force sinusoïdale d'amplitude suffisamment faible, elle oscillera au fond de l'un des puits mais ne pourra en sortir. Si au contraire celle-ci est excitée par un bruit blanc gaussien par exemple, elle a une probabilité non nulle de sauter d'un puits à l'autre. Lorsqu'elle est soumise à une force sinusoïdale bruitée additivement, elle pourra sauter d'un puits à l'autre, de façon plus ou moins synchrone avec la fréquence de la sinusoïde. Cela revient aussi à dire que la particule est excitée par du bruit et que le potentiel est modulé. En absence de bruit, donc, la particule ne pourra sauter d'un puits à l'autre, et si la puissance du bruit est très "grande", le système devient complètement aléatoire. Entre ces deux extrêmes, il existe une puissance de bruit pour laquelle l'effet d'interaction entre le bruit et la sinusoïde est optimal : la particule saute d'un puits à l'autre à la fréquence de la modulation. Ceci se traduit par le fait que le rapport signal sur bruit (RSB) local à la fréquence de la sinusoïde, tracé en fonction de la variance du bruit  $\sigma^2$ , présente un maximum (cf. figure 2).

Ceci a poussé de nombreux chercheurs à étudier ce phénomène dans une optique de détection de signaux périodiques de faible amplitude noyés dans du bruit [3, 4]. C'est également ce qui a motivé notre étude.

De nombreux auteurs ont donc étudié ce phénomène, à

temps continu [1-5]. Celui-ci a également été présenté à travers quelques systèmes analogiques tels que le Trigger de Schmitt [1]. Afin de réaliser des simulations numériques, certains auteurs ont discrétisé les équations différentielles décrivant leurs systèmes [4]. La discrétisation d'équations différentielles stochastiques n'est pas triviale [7], c'est ce qui nous a poussé à étudier des systèmes intrinsèquement discrets. Ainsi que McNamara [2] l'a fait dans sa théorie dite adiabatique, nous considérerons le système à deux états en seillant la sortie : cela revient à regarder uniquement dans quel puits se trouve la particule. Néanmoins, nous nous affranchirons de l'hypothèse adiabatique.

Le système que nous étudions est donc le suivant :

$$\begin{cases} x_n &= \Phi(x_{n-1}) + e_n \\ y_n &= c.\text{sign}(x_n) \end{cases}$$

où  $\text{sign}$  désigne la fonction "signe".  $\Phi(x)$  est ici une fonction impaire, constante par morceaux, à nombre de paliers fini  $N$ , bistable :  $-\infty = r_0 < r_1 < \dots < r_N = +\infty$ , et  $\Phi(x) = \Phi_j$  sur  $]r_{j-1} ; r_j[$ . Ainsi  $r_{N-i} = -r_i$  et  $\Phi_{N+1-i} = -\Phi_i$ .  $\pm c$  désignent alors les points d'équilibre stables de  $\Phi$ . Sans perte de généralité on considère que  $N$  est pair. L'entrée du système est  $e_n = b_n + \varepsilon_n$  où  $b_n$  est un bruit blanc centré et de variance  $\sigma^2$ , et où  $\varepsilon_n = \varepsilon \sin(2\pi n\lambda_0 - \varphi_0)$  avec  $\varepsilon$  supposé petit devant  $\sigma$ . La densité de probabilité de  $b_n$ , notée  $f_b$  sera supposée paire, strictement positive et continue. On suppose également que  $\varepsilon$  est suffisamment faible pour qu'en présence de la sinusoïde seule, le signal  $x_n$  ne puisse pas basculer du voisinage d'un point d'équilibre au voisinage de l'autre.  $x_n$  représente la sortie d'un SETAR(1, N, 0, . . . , 0) [6].

Dans une première partie, nous étudierons les caractéristiques de  $y_n$ , à savoir son vecteur de probabilité  $\underline{p}(n)$  et sa matrice de transition  $\underline{P}(n)$ . En effet,  $y_n$  étant markovien, il est entièrement décrit par ces deux paramètres. Nous analyserons alors la fonction de corrélation de ce signal afin de mettre en avant le phénomène de résonance stochastique. Dans la troisième partie nous regarderons les résultats obtenus pour un SETAR particulier, et nous discuterons de l'utilisation de la résonance stochastique en traitement du signal.

## 2 Etude du système

Le vecteur de probabilité de  $y_n$  et la matrice de transition de  $y_{n-1}$  à  $y_n$  dépendent de la densité de probabilité de  $x_n$ . Dans le sous-paragraphe suivant nous étudions cette densité de probabilité.

### 2.1 Densité de probabilité de $x_n$

$x_n$  étant markovien, sa densité de probabilité  $f_n(x)$  est déterminée à l'aide de l'équation de Chapman-Kolmogorov, ce qui aboutit à  $f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f_b(x - \Phi(y) - \varepsilon_n) f_{n-1}(y) dy$ . Compte tenu de la forme escalier de  $\Phi$ , cette équation se réduit à

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^N v_j(n-1) \cdot f_b(x - \Phi_j - \varepsilon_n) \quad (1)$$

où  $v_j(n) = \int_{r_{j-1}}^{r_j} f_n(y) dy$  : c'est la probabilité que  $x_n$  soit au régime  $j$ , c'est-à-dire  $x_n \in ]r_{j-1}, r_j[$ . Le vecteur  $\underline{v}(n)$ , de composantes  $v_j(n)$  représente ainsi le vecteur de probabilité de  $x_n$  vu à travers les  $N$  régimes. En intégrant (1) sur  $]r_{i-1}, r_i[$  on voit que  $\underline{v}(n)$  se calcule récursivement par la relation de Markov

$$\underline{v}(n) = \underline{K}(n) \cdot \underline{v}(n-1) \quad (2)$$

où  $\underline{K}(n)$  a pour composantes

$$K_{i,j}(n) = F_b(r_i - \Phi_j - \varepsilon_n) - F_b(r_{i-1} - \Phi_j - \varepsilon_n)$$

et où  $F_b$  est la fonction de répartition de  $b_n$ . Etudier le comportement de  $x_n$  revient alors à étudier le vecteur  $\underline{v}(n)$ . On écrit, sous l'hypothèse  $\varepsilon \ll \sigma$ , en effectuant un développement limité à l'ordre 1 des  $F_b(r_i - \Phi_j - \varepsilon_n)$  en  $r_i - \Phi_j$ ,  $\underline{K}(n)$  comme étant

$$\underline{K}(n) \approx \underline{K} - \varepsilon_n \underline{L} \quad (3)$$

avec  $K_{i,j} = F_b(r_i - \Phi_j) - F_b(r_{i-1} - \Phi_j)$  et  $L_{i,j} = f_b(r_i - \Phi_j) - f_b(r_{i-1} - \Phi_j)$ . Pour  $\underline{v}(n_0) = \underline{\alpha}(n_0)$  donné ( $n_0$  étant l'instant initial, et on considère que l'on n'a que du bruit) on voit que  $\underline{v}(n_0+1) = \underline{\alpha}(n_0+1) + \varepsilon_{n_0+1} \underline{a}(n_0+1) + \mu_{n_0+1} \underline{b}(n_0+1)$  avec  $\mu_n = \varepsilon \cos(2\pi n \lambda_0 - \varphi_0)$  et<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \underline{\alpha}(n_0+1) &= \underline{K} \underline{\alpha}(n_0) \\ \underline{a}(n_0+1) &= -\underline{L} \underline{\alpha}(n_0) \\ \underline{b}(n_0+1) &= \underline{0} \end{cases}$$

<sup>1</sup> $\underline{0}$  représente le vecteur nul

$\underline{\alpha}(n_0+1)$  correspond au vecteur de probabilité de  $x_{n_0+1}$  en absence de sinusoïde, et les deux autres termes sont donc la contribution de la sinusoïde. Le terme en  $\mu_n$ , inutile à la date  $n_0+1$ , apparaît à la date suivante. En réitérant la récurrence (2), utilisant (3) et en négligeant les termes en  $\varepsilon^k$  pour  $k > 1$  (qui apparaissent à travers  $(\frac{\varepsilon}{\sigma})^k$ ), on constate que pour tout  $n$ ,  $\underline{v}(n)$  s'écrit

$$\underline{v}(n) = \underline{\alpha}(n) + \varepsilon_n \underline{a}(n) + \mu_n \underline{b}(n)$$

avec  $\underline{\alpha}(n)$  le vecteur de probabilité de  $x_n$  vu à travers les régimes en absence de sinusoïde d'entrée ( $\varepsilon = 0$ ), les deux autres termes étant dues à la sinusoïde. Les vecteurs  $\underline{\alpha}(n)$  et  $\underline{\gamma}(n) = \underline{a}(n) + i \underline{b}(n)$  vérifient donc (cf.(2) et (3))

$$\begin{cases} \underline{\alpha}(n+1) &= \underline{K} \underline{\alpha}(n) \\ \underline{\gamma}(n+1) &= -\underline{L} \underline{\alpha}(n) + e^{-2i\pi\lambda_0} \underline{K} \underline{\gamma}(n) \end{cases}$$

En remarquant que  $\underline{K}$  est une matrice de Markov, à éléments strictement positifs, et en utilisant alors le théorème de Perron [8, p.49] on conclut que la suite  $\underline{\alpha}(n)$  converge vers un unique vecteur de probabilité  $\underline{\alpha} = \underline{K} \underline{\alpha}$  à éléments strictement positifs. Toujours d'après le théorème de Perron  $e^{-2i\pi\lambda_0}$  ne peut pas être valeur propre de  $\underline{K}$  et on montre alors aisément que la suite  $\underline{\gamma}(n)$  converge vers<sup>2</sup>  $\underline{\gamma} = -(\underline{I} - e^{-2i\pi\lambda_0} \underline{K})^{-1} \underline{L} \underline{\alpha}$ . Asymptotiquement le vecteur de probabilité  $\underline{v}(n)$  s'écrit

$$\underline{v}(n) = \underline{\alpha} + \varepsilon_n \underline{a} + \mu_n \underline{b} \quad (4)$$

où  $\underline{\gamma} = \underline{a} + i \underline{b}$ . Nous montrons ainsi que  $x_n$  est stochastiquement stable, et par hypothèse on posera  $n_0 = -\infty$ . Compte tenu des symétries évidentes de  $\underline{K}$  et  $\underline{L}$ , les vecteurs  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\gamma}$  vérifient

$$\begin{cases} \alpha_i &= \alpha_{N+1-i} \\ \gamma_i &= -\gamma_{N+1-i} \end{cases} \quad (5)$$

Connaissant le vecteur de probabilité de  $x_n$  (à travers  $\underline{v}(n)$ ) nous pouvons à présent étudier le signal  $y_n$ . C'est l'objet du prochain paragraphe.

### 2.2 Vecteur de probabilité, matrice de transition

Le vecteur de probabilité s'écrit sous la forme  $\underline{p}(n) = [\Pr[y_n = -c] \Pr[y_n = +c]]^t$ . Or par exemple  $\Pr[y_n = +c] = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \underline{1}_2^t \underline{v}(n)$ , où  $\underline{1}_2$  a ses  $\frac{N}{2}$  dernières composantes égales à 1, les autres étant nulles. Par conséquent, d'après (4) et (5),  $\underline{\alpha}$  étant un vecteur de probabilité,

$$\underline{p}(n) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (A \varepsilon_n + B \mu_n) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

avec

$$A + iB = \underline{1}_2^t \underline{\gamma}$$

De la même manière, on évalue la matrice de transition de  $y_{n-1}$  à  $y_n$  en évaluant  $P_{1,1}(n) = \Pr[y_n = -c | y_{n-1} = -c] =$

<sup>2</sup> $\underline{I}$  représente la matrice identité de taille *ad hoc*

$\frac{\Pr\{x_n < 0 \text{ et } x_{n-1} < 0\}}{p_1(n-1)}$  et  $P_{2,2}(n)$ . On calcule alors  $\underline{\underline{P}}(n)$  comme étant

$$\underline{\underline{P}}(n) = \underline{\underline{P}} + (U\varepsilon_n + V\mu_n)\underline{\underline{D}} \quad (7)$$

où

$$\beta = (\underline{\underline{1}}_2 - \underline{\underline{1}}_1)^t \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\alpha}}_2$$

$U + iV = (1 - \beta e^{-2i\pi\lambda_0})(A + iB)$ ,  $\underline{\underline{P}} = \frac{1+\beta}{2}\underline{\underline{I}} + \frac{1-\beta}{2}\underline{\underline{J}}$  et  $\underline{\underline{D}} = [-1 \ 1]^t [1 \ 1]$ .  $\underline{\underline{J}}$  est la matrice  $2 \times 2$  de permutation,  $\underline{\underline{1}}_1$  est le vecteur de taille  $N$  ayant ses  $\frac{N}{2}$  premières composantes égales à 1, les autres étant nulles, et  $\underline{\underline{\alpha}}_2$  est le vecteur issu du produit composante à composante de  $\underline{\underline{\alpha}}$  et  $\underline{\underline{1}}_2$ .  $\frac{1+\beta}{2}$  représente ainsi la probabilité de saut de  $\pm c$  vers  $\mp c$ , et  $\frac{1-\beta}{2}$  celle de ne pas sauter, en absence de sinusoïde d'entrée. On constate que ces probabilités sont modulés, ce qui signifie que le système dont l'entrée est une sinusoïde bruitée peut être vu comme un système modulé excité par du bruit.

La matrice de transition et le vecteur de probabilité étant définis, on peut évaluer la fonction de corrélation de  $y_n$ .

### 2.3 Fonction de corrélation, phénomène de résonance stochastique

En notant  $\underline{\underline{\Pi}}(n, q) = \underline{\underline{P}}(n+q) \dots \underline{\underline{P}}(n+1)$  la matrice de transition de  $y_n$  à  $y_{n+q}$  on s'aperçoit que  $\Gamma(n, q) = E[y_n y_{n+q}]$  s'écrit en fonction des éléments de cette matrice, et des composantes de  $\underline{\underline{p}}(n)$ . D'après (7), en négligeant les termes en  $\varepsilon^k$ , on calcule aisément  $\underline{\underline{\Pi}}(n, q)$  pour  $q \in \mathbb{N}$  pour aboutir (utilisant également (6)) à la fonction de corrélation de  $y_n$  suivante

$$\Gamma(n, q) = c^2 \beta^q [1 - 4(A\varepsilon_n + B\mu_n)^2 + 4c^2(A\varepsilon_n + B\mu_n)(A\varepsilon_{n+q} + B\mu_{n+q})] \quad (8)$$

Ce résultat est en totale concordance avec celui obtenu par McNamara et Wiesenfeld [2] pour les systèmes à temps continu. En moyennant à présent (8) suivant  $n$  pour obtenir la corrélation correspondant à la fréquence cyclique nulle, on obtient pour  $q \in \mathbb{Z}$

$$\Gamma(q) = c^2 \cdot \beta^{|q|} [1 - 2\varepsilon^2(A^2 + B^2) + 2c^2\varepsilon^2(A^2 + B^2) \cos(2\pi q \lambda_0)]$$

Cette corrélation est composé de la corrélation de la "partie bruit" de sortie (en  $\beta^{|q|}$ ) et de la "partie sinusoïde" de sortie (en  $\cos(2\pi q \lambda_0)$ ). On constate qu'il y a en quelque sorte un transfert d'énergie du bruit vers la sinusoïde, transfert dépendant du système et du bruit d'entrée ( $f_b$  et particulièrement de la puissance  $\sigma^2$ ). En effet,  $A + iB$  dépend implicitement de  $\Phi$ ,  $f_b$  et  $\sigma^2$ . On calcule facilement le spectre de la partie bruit  $S_{\text{bruit}}(\lambda) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} [c^2 \cdot \beta^{|q|} (1 - 2\varepsilon^2(A^2 + B^2))] e^{-2i\pi q \lambda}$ . On

en déduit alors le rapport signal sur bruit local à la fréquence  $\lambda_0$  comme étant le rapport entre la puissance en  $\lambda_0$  de la sinusoïde de sortie et la densité spectrale de puissance en  $\lambda_0$  du bruit de sortie :

$$RSB = \frac{\varepsilon^2(A^2 + B^2)(1 + \beta^2 - 2\beta \cos(2\pi \lambda_0))}{(1 - 2\varepsilon^2(A^2 + B^2))(1 - \beta^2)} \quad (9)$$

On montre que ce RSB tend vers 0 pour  $\sigma$  tendant vers 0 ou vers  $+\infty$  : il existe un  $\sigma$  pour lequel ce RSB atteint un maximum. La démonstration de ce résultat est trop longue pour être présentée ici, néanmoins on peut le comprendre facilement. En effet, pour  $\sigma = 0$ , le système est uniquement excité par une sinusoïde. Compte tenu de notre hypothèse "impossibilité de basculer en absence de bruit", le système ne peut pas basculer et donc les probabilités de saut sont nulles :  $\frac{1-\beta}{2} \pm (U\varepsilon_n + V\mu_n) \approx 0$ . Par conséquent  $\beta$  tend vers 1 et  $U + iV$  vers 0, ce qui implique que  $A + iB$  tend vers 0. On montre alors que  $|A + iB|^2$  tend vers 0 plus vite que  $\beta$  vers 1 (à faible bruit, seul celui-ci peut faire sauter le système), et donc que le RSB tend vers 0. En  $\sigma = +\infty$  le système est complètement aléatoire, ainsi  $\frac{1\pm\beta}{2} \pm (U\varepsilon_n + V\mu_n) \approx \frac{1}{2}$ . Par conséquent  $\beta$  et  $A + iB$  tendent vers 0 : le RSB est bien nul.

Le fait qu'il existe une puissance d'entrée pour laquelle le RSB de sortie présente un maximum met en exergue le phénomène de résonance stochastique. On remarque en particulier à travers la puissance de la sinusoïde de sortie,  $c^2\varepsilon^2(A^2 + B^2)$ , dépendant de  $\sigma^2$  l'effet d'interaction entre la sinusoïde et le bruit (cf. figure 1).

Nous allons à présent illustrer ce phénomène dans le cas particulier  $\Phi(x) = c \cdot \text{sign}(x)$ .

## 3 Etude expérimentale

Pour la fonction  $\Phi(x) = c \cdot \text{sign}(x)$  on calcule ainsi

$$\begin{cases} \beta &= F_b(c) - F_b(-c) \\ A + iB &= \frac{f_b(c)}{1 - \beta e^{-2i\pi\lambda_0}} \end{cases}$$

On calcule alors le RSB suivant

$$RSB \approx \frac{\varepsilon^2 f_b(c)^2}{1 - [F_b(c) - F_b(-c)]^2}$$

On vérifie facilement sur cet exemple que le RSB tend vers 0 en  $\sigma = 0$  et  $\sigma = +\infty$ . On pourra remarquer que le signal  $y_n$  correspond à la sortie d'une version discrète du Trigger de Schmitt. On peut également remarquer que sur cet exemple le RSB est indépendant de la fréquence de la sinusoïde. Les figures 1 (A), 2 (A) et 3 (A) représentent respectivement la puissance locale de la sinusoïde de sortie, le rapport signal sur bruit local de sortie, et le gain du système (rapport entre le RSB de sortie et le RSB d'entrée) en fonction de la puissance de bruit d'entrée  $\sigma^2$ . On s'aperçoit très bien sur la figure 1 (A) l'interaction entre le bruit et la modulation d'entrée du système : la puissance de la sinusoïde de sortie dépend du bruit d'entrée. Cet effet est illustré également sur la figure 2 (A) : le RSB atteint un maximum ce qui met en évidence le phénomène de résonance stochastique. Néanmoins, malgré l'effet d'amplification de la modulation par le bruit, ce système semble inintéressant pour faire de la détection de sinusoïde de faible amplitude noyée dans du bruit blanc gaussien : en effet, le gain du système est toujours inférieur à 1 (cf. figure 3 (A)). Il faut sans doute mettre en oeuvre des SETAR à plus de paliers, afin de filtrer en quelque sorte le bruit.

Les figures 1 (B), 2 (B) et 3 (B) représentent les mêmes paramètres que dans l'exemple précédent, mais le bruit est cette fois considéré uniforme. La théorie précédente n'est plus valide dans ce cas ( $f_b$  s'annule). Les résultats "théoriques" présentés sont ceux effectués pour  $b_n$  gaussien généralisé d'ordre 20. Les résultats dits "asymptotiques" sont ceux obtenus en supposant que la théorie reste valide. Les simulations ont pour leur part été effectuées en utilisant du bruit blanc uniforme. On constate cette fois que le gain du système peut dépasser 1. Les différents résultats obtenus autour de  $\sigma^2$  optimal sont très différents : ceci est dû à la discontinuité de  $f_b$  qui est telle pour ce  $\sigma$  que  $b_n$  est uniforme sur environ  $[-c ; +c]$ . De tels systèmes peuvent être donc très intéressants dans une optique de détection de signaux périodiques bruités par certains type de bruit non gaussien (ex : uniforme).

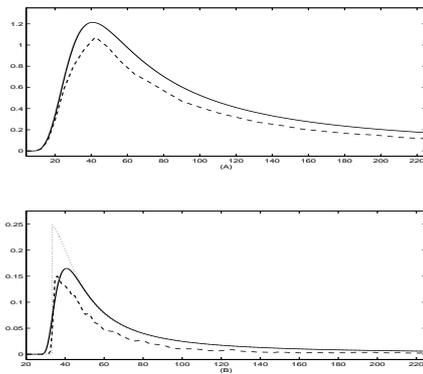


FIG. 1 — Puissance locale de la sinusoïde de sortie selon  $\sigma^2$ ,  $c = 10$ ,  $\lambda_0 = 0.02$ . (A) : gaussien ( $\varepsilon = 1$ ) ; (B) : uniforme ( $\varepsilon = 0.25$ ). Trait plein : allures théoriques ; tirets : allures expérimentales ; pointillés : allures asymptotiques.

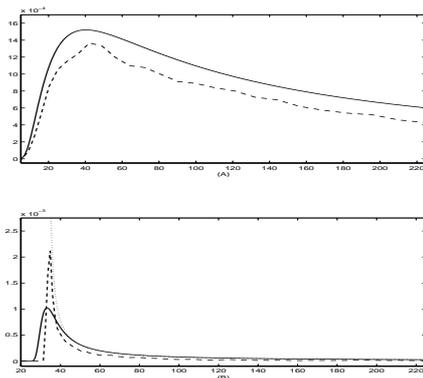


FIG. 2 — RSB local de sortie selon  $\sigma^2$ . (A) : gaussien ; (B) : uniforme.

## 4 Conclusion

Le phénomène de résonance stochastique à temps discret existe, sans grande restriction sur le type de bruit (pourvu qu'il soit blanc), et sans restriction sur la fréquence de la sinusoïde d'entrée. L'utilisation d'un tels système en traitement du signal semble alors intéressante, pouvant entre autre facilement

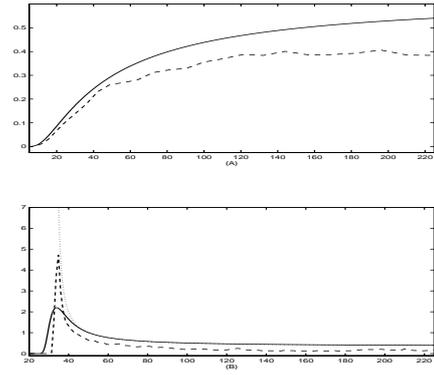


FIG. 3 — Gain du système en fonction de  $\sigma^2$ . (A) : gaussien ; (B) : uniforme.

engendrer des algorithmes adaptatifs. Ayant un signal composé d'une sinusoïde et d'un bruit, l'idée est de construire un tel système qui s'adapte à la puissance du bruit d'entrée, dans le but de faire ressortir la sinusoïde. Sur l'exemple précédent il s'agirait de régler le paramètre  $c$  de telle sorte que la puissance du bruit d'entrée  $\sigma^2$  soit la puissance "optimale" du système.

## Références

- [1] S. Fauve and F. Heslot *Stochastic resonance in a bistable system*, Phys. Let., Vol.97A, 1983
- [2] McNamara, B. ; Wiesenfeld, K. *Theory of stochastic resonance*, Phys. Rev. A, Vol.39, no.9, 1989
- [3] Jung, P. ; Hanggi, P. *Amplification of small signals via stochastic resonance*, Phys. Rev. A, Vol.44, no.12, 1991
- [4] A. S. Asdi and A. H. Tewfik *Detection of weak signals using adaptive stochastic resonance*, IEEE Int. conf. on Acoustic, Speech and Sig. Proc., vol.2, 1995
- [5] F. Moss *Stochastic resonance : from the ice ages to the monkey's ear*, in Some Contemporary Problems in Statistical Physics, edited by G. Weiss (SIAM, Philadelphia), 1994
- [6] H. Tong *Non-linear Times Series : A Dynamical System Approach*, Oxford Science Publication, New York, 1990
- [7] P. E. Kloeden, E. Platen *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1995
- [8] F. R. Gantmacher *Théorie des matrices*, tome 2, Ed. Dunod, Paris, 1966