

Performances des codes LDPC pour l’Ultra-Large Bande (ULB) impulsionnelle sous approximation gaussienne généralisée des interférences

Charly POUILLIAT¹, Alban GOUPIL², Maxime COLAS², Guillaume GELLE²

¹Laboratoire ETIS, UMR8051 CNRS/ENSEA/UCP
6 avenue du Ponceau, F-95014 Cergy-Pontoise Cedex, France

²CReSTIC-DéCom, Université de Reims Champagne-Ardenne
Moulin de la Housse, BP 1039, F-51687 Reims Cedex 2

charly.poulliat@ensea.fr, alban.goupil@univ-reims.fr
maxime.colas@univ-reims.fr, guillaume.gelle@univ-reims.fr,

Résumé – Dans cet article, on s’intéresse à la caractérisation et à l’évaluation des performances des codes LDPC pour des systèmes de communications ultra-large bande. En se basant sur une approximation gaussienne généralisée des interférences multi-utilisateurs, nous évaluons pour certains paramètres système la capacité et nous comparons alors les seuils sous évolution de densité pour des codes LDPC réguliers et pour certaines familles de codes irréguliers. Enfin, des résultats de performances à taille finie sont fournis.

Abstract – In this article, we intend to evaluate asymptotic performance of LDPC codes for ultra-wide band communication systems. For some particular system parameters and based on a generalized gaussian approximation of the multi-user interference, we evaluate the channel user capacity and we compute for comparison LDPC codes thresholds under density evolution for regular as well as for some irregular LDPC codes families. Finally, some finite length simulation results are given.

1 Introduction

D’aurénavant pour de nombreux scénarios de communication, certains codes correcteurs d’erreurs permettent de s’approcher de la limite de Shannon tout en ayant une complexité de décodage satisfaisante. Parmi les familles de bons candidats, les codes LDPC (low-density parity-check) proposés par Gallager [1] présentent des performances très intéressantes et permettent notamment d’atteindre la capacité sur les canaux sans mémoire à entrées binaires et sorties symétriques [2].

Auparavant, l’hypothèse de gaussianité du bruit était appropriée puisque l’objectif était d’obtenir des relations simples sur les performances et des mises en oeuvre peu coûteuses. Même si cette hypothèse est justifiée dans un large éventail de scénarios de situations réelles, il y a des situations où le théorème central limite ne peut plus être invoqué et où les expériences mettent en exergue un bruit non gaussien à caractère impulsif où la queue de la distribution de son amplitude est lourde.

Parmi ces situations, nous pouvons citer les canaux de courant porteur en ligne, certaines lignes ADSL ou encore les canaux Ultra-Large-Bande (ULB) impulsionnelle qui nous intéressent ici plus particulièrement. Dans ce cas, le bruit peut avoir des impulsions puissantes dues aux interférences multi-utilisateurs réduisant fortement le rapport signal à bruit.

Dans ce papier, les performances des codes LDPC seront

étudiées dans un environnement impulsif où le bruit est modélisé par une distribution dite gaussienne généralisée. Cette distribution approche le terme d’interférence multi-utilisateurs, le bruit thermique restant toutefois modélisé par un bruit blanc gaussien classique.

La section suivante présente plus précisément le canal utilisé pour modéliser l’ULB impulsionnelle ainsi que l’évaluation de sa capacité au sens de Shannon. Ensuite l’utilisation des codes LDPC sur ce type de canaux sera étudiée au travers de l’étude de seuils asymptotiques de convergence et de simulations de performance de codes à taille finie.

2 Canal équivalent en sortie de récepteur et capacité associée

2.1 Modèle de canal après récepteur RAKE en Ultra-Large Bande

On considère donc un système ultra-large bande (ULB) comportant N_u utilisateurs et un accès multiple par répartition de saut de temporel (Time-Hopping, TH). La modulation considérée est la modulation par amplitude d’impulsion. On se contentera ici de symboles émis appartenant au set de symboles équiprobables $\{-1, +1\}$, indépendants et identiquement distribués.

On notera N_c le nombre de chips par symbole et T_c la durée d'un chip. De même, on notera également N_f le nombre de trames par temps symbole T_s . Si on néglige l'interférence entre symboles, il a été montré (voir par exemple [3] ou [4]) que la sortie du récepteur RAKE pouvait être décomposée de la manière suivante :

$$y[n] = \sqrt{P_0}N_s x[n] + z[n] + b[n] \quad (1)$$

où P_0 est la puissance reçue par l'utilisateur d'intérêt, $x[n]$ le symbole émis, N_s le paramètre de répétition (i.e. $N_s = N_f$ pour un système TH-UWB, voir [4] pour plus de détails), $z[n]$ le terme d'interférence multi-utilisateurs et $b[n]$ un bruit blanc gaussien de variance $\sigma_b^2 = N_0/2$. Il apparaît que le terme d'interférence multi-utilisateurs peut être efficacement modélisé par une distribution gaussienne généralisée dont la distribution est donnée par

$$p_z(x) = \frac{\sqrt{\Gamma(3/\alpha)}}{2\sigma\sqrt{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1+1/\alpha)}} e^{-\left|\frac{\sqrt{\Gamma(3/\alpha)}}{\sigma\sqrt{\Gamma(1/\alpha)}}x\right|^\alpha} \quad (2)$$

où $\sigma^2 = E(z^2)$, $\alpha > 0$ est un paramètre de forme de la distribution et $\Gamma(x)$ est la distribution Gamma. De manière évidente, σ et α sont dépendantes des paramètres système (N_u, T_c, T_s, N_f). Ce modèle a démontré une meilleure capacité à capturer les performances (en terme de taux d'erreur binaire) en sortie de récepteur RAKE ULB si on le compare à un modèle strictement gaussien des interférences multi-utilisateurs [4]. Nous utiliserons donc par la suite ce modèle pour caractériser les performances d'un système ULB codé employant des codes à décodage souple itératif.

2.2 Evaluation de la capacité du système codé sous approximation gaussienne généralisée

Avant même d'évaluer la performance d'un système ULB codé avec des codes LDPC, il est important de caractériser complètement les performances limites atteignables en fonction des paramètres du système. En ce sens, l'évaluation de la capacité du dit système est une étape obligatoire.

Si l'on considère l'équation (2), le modèle de canal équivalent se réduit finalement à

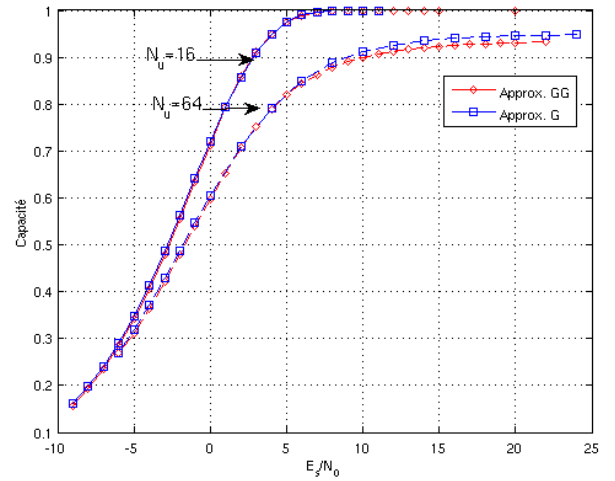
$$y[n] = x_u[n] + \eta[n] \quad (3)$$

qui correspond un modèle de canal sans mémoire à entrée binaire et sorties symétriques. Les bruits $z[n]$ et $b[n]$ étant indépendants, on a alors la densité de probabilité de $\eta[n]$, qui est donnée par la convolution des densités de $z[n]$ et $b[n]$. La densité des LRVs (Log-Rapport de Vraisemblance) associés aux observations est alors consistante au sens de [2]. On note alors $f_L(l, \alpha, \sigma, E_s/N_0)$ cette densité de probabilité. Elle dépend à la fois des paramètres de la gaussienne généralisée associée aux interférences multi-utilisateurs et du paramètre de bruit gaussien que l'on peut lier au rapport signal sur bruit défini par $E_s/N_0 = (P_0 N_s^2)/N_0$. La capacité est alors donnée par l'expression suivante :

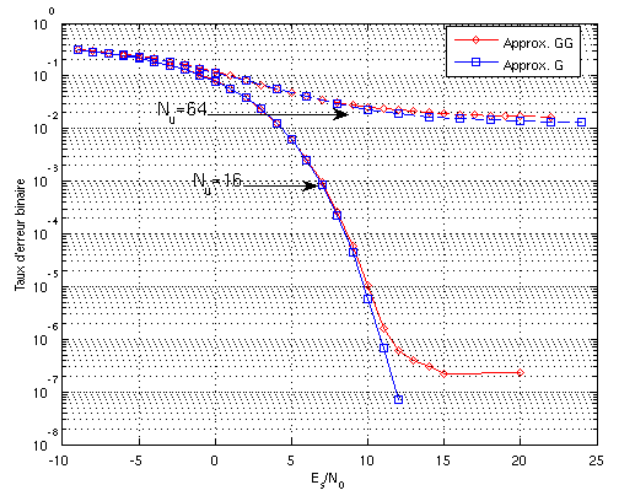
$$C(E_s/N_0) = 1 - \mathbb{E}_L(\log_2(1 + e^{-l})) \quad (4)$$

, où est L est une variable aléatoire de loi $f_L(l, \alpha, \sigma, E_s/N_0)$. Cette expression est alors facilement estimée par méthode de Monte-Carlo.

En guise d'illustration, on considérera le système TH-UWB avec les paramètres $\{N_u = 16, N_s = N_f = 8, T_c = 8ns, N_c = 16\}$ et $\{N_u = 64, N_s = N_f = 4, T_c = 3ns, N_c = 4\}$. On a comparé la capacité et le taux d'erreur binaire pour une interférence multi-utilisateurs considérée comme un bruit gaussien ou comme un bruit gaussien généralisé. On remarque alors sur la figure 1-(a) que les capacités atteignables dans les deux cas sont proches. La comparaison des taux d'erreur binaire (TEB) sur la figure 1-(b) montre que considérer l'interférence multi-utilisateurs comme gaussienne tend à sur-évaluer les performances en terme de taux d'erreur.



(a) Capacités atteignables



(b) Taux d'erreurs binaires non codés

FIG. 1 – Performances d'un système TH-UWB pour $N_u = \{16, 64\}$ et comparaison des performances atteignables pour l'approximation gaussienne ("Approx. G.") et gaussienne généralisée ("Approx. GG").

TAB. 1 – Seuils de convergence pour des ensembles de codes LDPC $(3, X)$ pour un canal ULB et avec pour paramètres $\{N_u = 16, N_s = N_f = 8, T_c = 8 \text{ ns}, N_c = 16\}$.

Rendement	Shannon	LDPC	Δ_{dB}
1/2	-2.75 dB	-1.88 dB	0.87 dB
2/3	-0.67 dB	0.008 dB	0.68 dB
4/5	1.1 dB	1.64 dB	0.54 dB

3 Performances des codes LDPC pour l'ULB

Une fois le modèle de canal en entrée de codage canal identifié, on peut alors entreprendre de caractériser les performances limites des codes LDPC, nous permettant ainsi de déterminer la région des capacités atteignables asymptotiquement par ce schéma de codage et de déterminer son efficacité par rapport à la capacité intrinsèque du canal. Nous allons donc mener d'abord une étude asymptotique des performances des codes LDPC, puis nous finirons sur une étude des performances à taille finie.

3.1 Seuils asymptotiques de convergence

L'approximation gaussienne généralisée offre un très bon modèle statistique du canal équivalent en entrée de codage canal. La caractérisation de ce canal comme un canal sans mémoire à entrées binaires et sorties symétriques nous permet alors de caractériser complètement les performances limites des codes LDPC sur ce canal en fonction des paramètres système en utilisant notamment comme outil d'analyse asymptotique l'évolution de densité [2] : l'évolution de densité consiste à suivre l'évolution des densités des différents messages se propageant dans le graphe associé à une famille de codes LDPC quand on considère un décodage itératif par propagation de croyance. En supposant le graphe associé de taille infinie et les messages transitant sur le graphe indépendants et identiquement distribués, les auteurs calculèrent les équations d'évolution des densités au cours des itérations et purent en déduire les seuils asymptotiques de convergence pour de nombreux canaux symétriques à entrées binaires sans mémoire. Compte tenu du modèle que nous considérons, cet outil d'analyse s'applique donc de manière naturelle.

Nous allons maintenant présenter une évaluation des seuils pour différentes familles de codes LDPC réguliers (ie. différents rendements) et irréguliers. Nous les avons comparés aux limites de Shannon théoriques obtenues par estimation de la capacité comme décrit précédemment. Les résultats sont donnés dans les tableaux Tab.1 à Tab.3 en fonction du rapport signal sur bruit E_s/N_0 optimal, exprimé en dB et pour les paramètres TH-ULB considérés.

Le tableau Tab.1 montre que les codes réguliers semblent offrir de bonnes performances en terme de seuils asymptotiques. En particulier, on peut remarquer que les écarts à la capacité sont du même ordre que le cas gaussien.

TAB. 2 – Seuils de convergence pour des ensembles de codes LDPC réguliers $(3, X)$ pour un canal ULB et avec pour paramètres $\{N_u = 64, N_s = N_f = 4, T_c = 3 \text{ ns}, N_c = 4\}$ et comparaison au seuils estimés sous approximation gaussienne (AG) de l'interférence.

Rendement	Shannon	LDPC	Δ_{dB}	Seuil AG
1/2	-1.788	-0.59 dB	1.198 dB	-0.59 dB
2/3	1.13	2.27 dB	1.14 dB	2.22 dB
4/5	4.35 dB	5.65 dB	1.3 dB	5.43 dB

Le tableau Tab.2 montre que les codes réguliers semblent également offrir de bonnes performances en terme de seuils asymptotiques pour ces paramètres. Cependant, les gains sont nettement moindres que le cas précédent, ceci étant dû en partie à l'interférence plus grande. Contrairement au cas précédent, l'écart à la capacité ne décroît pas avec le rendement. De plus, quand on compare aux seuils obtenus sous approximation gaussienne, il apparaît alors également que les seuils sont sur-estimés, et ce d'autant plus que le rendement augmente. Ceci illustre encore le caractère optimiste d'une approximation gaussienne de l'interférence multi-utilisateurs. Cependant, d'autres études mettant en jeu des paramètres plus critiques vis-à-vis de cette approximation gaussienne sont à mener.

TAB. 3 – Seuils de convergence pour des ensembles de codes LDPC de rendement $R = 1/2$ pour un canal ULB et avec pour paramètres $\{N_u = 64, N_s = N_f = 4, T_c = 3 \text{ ns}, N_c = 4\}$ et avec un degré maximum des noeuds de variables $d_{v \max} = \{6, 15, 30\}$ [2].

$d_{v \max}$	LDPC irrégulier R=1/2	Δ_{dB}
6	-1.01 dB	0.78 dB
15	-1.46 dB	0.33 dB
30	-1.51 dB	0.28 dB

Le tableau Tab.3 montre les gains obtenus pour des codes irréguliers optimisés pour le canal gaussien : les performances sont meilleures que dans le cas réguliers, indiquant que pour ce jeu de paramètres, des codes irréguliers optimisés pour le canal gaussien ont un intérêt. Cependant, rien ne garantit que ces codes soient "optimaux" : seule une optimisation des profils des codes LDPC pour l'ULB pourrait nous garantir l'optimalité des familles considérées.

3.2 Performances à taille finie

On s'intéresse maintenant aux performances à taille finie pour les codes réguliers. Pour cela, on considère dans un premier temps, le système TH-UWB avec les paramètres $\{N_u = 16, N_s = N_f = 8, T_c = 8 \text{ ns}, N_c = 16\}$. Les codes sont construits avec l'algorithme RPEG [5] pour les rendements considérés précédemment et pour une taille d'information de $K = \{800, 12000\}$ bits d'information. On utilise un décodage BP classique avec 50 itérations de décodage et un critère d'arrêt basé sur le calcul du syndrome. Pour chaque point de fonc-

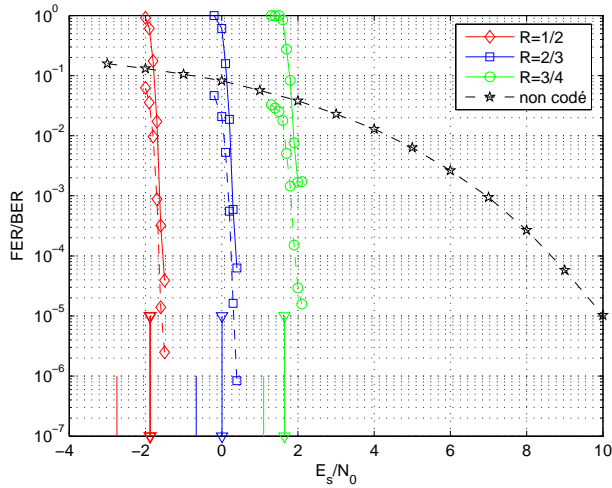
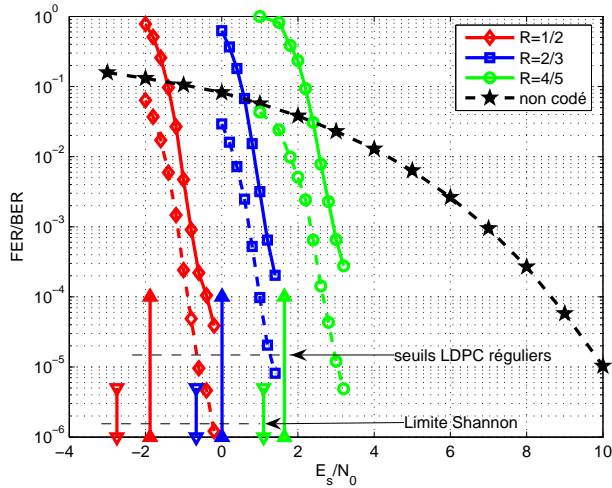


FIG. 2 – Performances d’un système TH-UWB avec les paramètres $\{N_u = 16, N_s = N_f = 8, T_c = 8ns, N_c = 16\}$. $K = \{800, 12000\}$ bits.

tionnement simulé, au moins 100 trames ont été détectées en erreur. Les résultats en termes de taux d’erreur trame et bit (FER, frame error rate et bit error rate, BER) sont alors donnés sur la figure 2 montrant les bonnes performances en seuil de convergence et zone de plancher d’erreur pour les tailles considérées. On considère enfin le système TH-UWB avec les paramètres $\{N_u = 64, N_s = N_f = 4, T_c = 3ns, N_c = 4\}$ pour $K = 800$ bits d’information. Les performances données figure 3 permettent de mettre en évidence l’apparition du plancher d’erreur et la perte de pente dus aux interférences multi-utilisateurs, le phénomène étant accentué quand le rendement augmente.

4 Conclusion

Dans cet article, on s’est intéressé à la caractérisation et à l’évaluation des performances des codes LDPC pour des sys-

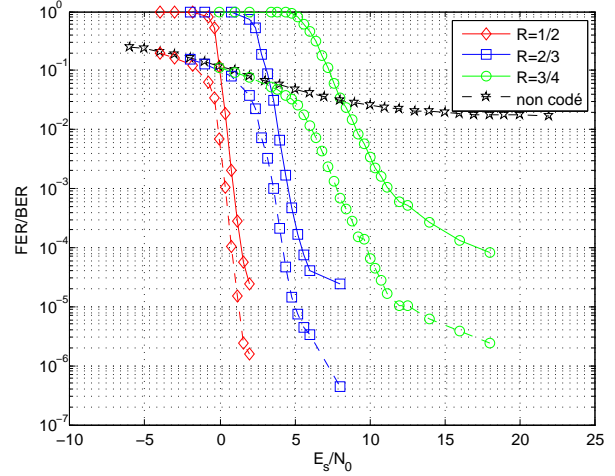


FIG. 3 – Performances d’un système TH-UWB avec les paramètres $\{N_u = 64, N_s = N_f = 4, T_c = 3ns, N_c = 4\}$. $K = \{800\}$ bits.

tèmes de communications ultra-large bande. En considérant une approximation gaussienne généralisée de l’interférence multi-utilisateurs, nous avons évalué pour certains paramètres système la capacité et nous l’avons comparée aux seuils de codes LDPC sous évolution de densité. De manière générale, les codes LDPC semblent offrir de bonnes performances sur ce type de canaux. Cependant, il reste à étudier le cas d’une interférence fortement non gaussienne et à déterminer des familles de codes LDPC optimales pour l’ULB.

Références

- [1] R.G. Gallager, *Low-Density Parity-Check Codes*, MIT Press, 1963.
- [2] T.J. Richardson, M.A. Shokrollahi, and R.L. Urbanke, “Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes”, *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(2) :619–637, February 2001.
- [3] J. Fiorina and D. Domenicali, “Revisiting TH-IR-UWB performance limits dependency on essential system parameters using the Generalized Gaussian Approximation,” in *Proc. IEEE ICUWB*, pp. 751–754, Sept. 2007.
- [4] F. Kharrat-Kammoun, P. Ciblat, and C. Le Martret, “Error probability approximation and codes selection in presence of multi-user interference for IR-UWB,” in *Proc. IEEE PIMRC*, pp. 1–5, Cannes, France, Sept. 2008.
- [5] A. Venkiah, D. Declercq and C. Poulliat, “Design of Cages with a Randomized Progressive Edge Growth Algorithm,” in *IEEE Commun. Letters*, vol. 12(4), pp. 301–303, April 2008.