Estimation distribuée du maximum dans un réseau de capteurs

Franck IUTZELER, Philippe CIBLAT, Walid HACHEM, Jérémie JAKUBOWICZ

Institut Télécom / Télécom ParisTech ; CNRS LTCI
{iutzeler, ciblat, hachem, jakubowi}@telecom-paristech.fr

Résumé – Le problème de l'estimation distribuée de la moyenne des mesures d'un réseau de capteurs est un sujet très étudié. En revanche, l'estimation de la valeur maximale est très peu abordée dans la littérature. Ce papier expose les preuves de convergence et fournit des bornes sur les vitesses de convergence de différents algorithmes d'estimation distribuée de la valeur maximale des mesures provenant d'un réseau de capteurs sans fil.

Abstract – The problem of estimating the average of the measures over a Wireless Sensor Network is widely studied in the literature; however, the estimation of the maximum over the network is not. In this paper, we provide convergence proofs and convergence speed bounds for various algorithms dealing with the estimation of the maximum value over a Wireless Sensor Network.

1 Introduction

Dans le contexte des réseaux sans fil (*ad hoc*) de capteurs, de nombreuses applications nécessitent que tous les capteurs partagent la valeur maximale des mesures présentes dans le réseau. A titre d'exemple applicatif, on peut songer qu'en partageant la valeur maximale[1] de la puissance reçue provenant d'une source (électromagnétique, thermique, ...) et l'identifiant du capteur lié à cette mesure, on peut procéder à une localisation primaire de cette cible (qui pourrait servir à déclencher une action comme l'écoute passive). Comme autre application, on peut envisager des problèmes de gestion de stocks ou de calcul distribué dans lesquels il est utile de connaître en tout point du réseau le capteur ayant le plus (ou le moins) de ressources disponibles. Par conséquent, il nous apparaît opportun de concevoir des algorithmes distribués d'estimation de la valeur maximale du réseau.

Les algorithmes d'estimation distribuée, introduits par [1], connaissent un fort regain d'intérêt depuis quelques années [2, 3, 4, 5]. Néanmoins, la très grande majorité de ces travaux s'occupent de l'estimation de la moyenne des mesures réalisées par les capteurs [2, 3, 4]. Ce n'est que très récemment que d'autres problématiques sont apparues comme le vote distribué (qui permet, par exemple, de savoir si la majorité des mesures est supérieure ou inférieure à un seuil prédéfini) [5]. Quant à l'estimation du maximum, la littérature est pauvre et provient du monde de l'informatique pour lequel une différence fondamentale existe puisque les capteurs savent s'ils disposent de la valeur maximale, le problème se résume alors à évaluer le temps de propagation de cette valeur dans le réseau sachant que seuls les capteurs disposant de la valeur maximale *parlent* [6, 7].

Ainsi, la contribution majeure de ce papier est de montrer la convergence et de fournir des bornes sur les vitesses de consensus de quelques algorithmes *naturels* pour l'estimation du maximum.

[1]De manière évidente, le partage du maximum est en tout point similaire à un partage du minimum, ...

2 Algorithmes proposés

On considère un réseau de N capteurs modélisé par un graphe non-orienté et non-valué $\mathcal{G} = (V, E)$ où l'ensemble des nœuds V représente les N capteurs et l'ensemble des arêtes E décrit les liens parfaits existants entre ceux-ci. Ainsi, chaque capteur i peut communiquer avec son voisinage $\mathcal{V}_i$ défini par $\mathcal{V}_i = \{j \in V | e = (i,j) \in E\}$ et $d_{max} = \max_{i \in V} |\mathcal{V}_i|$. Nous supposons également que le graphe $\mathcal{G}$ est connexe, c'est-à-dire que pour tout couple de nœuds (i,j), il existe une suite d'arêtes reliant i à j. De plus, les capteurs sont asynchrones et leurs horloges suivent un modèle de Poisson de paramètre λ indépendant. Ce modèle est en fait équivalent à une horloge de Poisson globale de paramètre $N\lambda$ où un capteur/nœud est choisi uniformément à chaque coup d'horloge globale. Nous parlerons de l'instant t pour désigner le $t^{\text{ième}}$ coup de l'horloge globale [8].

Un capteur i dispose d'une mesure $x_i(0)$ au démarrage de l'horloge globale. On note $x_{\max} = \max_{i \in V} x_i(0)$. Les algorithmes distribués d'estimation du maximum ont pour objectif que tous les capteurs aient la connaissance de $x_{\max}$, c'est-à-dire, qu'il y ait *max-consensus*.

On note $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \cdots, x_N(t)]^{\mathrm{T}}$ où $x_i(t)$ est la valeur du capteur i à l'instant t et $(.)^{\mathrm{T}}$ désigne l'opérateur de transposition. On dira que l'algorithme a convergé s'il y a **max-consensus** après un nombre **fini** d'instants. Mathématiquement, cela se traduit de la manière suivante (avec $\mathbf{1}$ le vecteur-colonne de taille N ne contenant que des 1) :

$$\exists \tau_{\max} < \infty, \; \forall t > \tau_{\max}, \; \mathbf{x}(t) = x_{\max}\mathbf{1}$$

Nous proposons d'adapter deux algorithmes liées au calcul de la moyenne au cas du calcul du maximum. i) le RANDOM GOSSIP qui est inspiré du *Randomized Gossip Averaging* [8], la référence pour l'estimation de la moyenne, ii) le BROADCAST qui est inspiré de [3] et qui utilise la diffusion naturelle de l'information en sans fil. Il faut noter que le BROADCAST de [3] a un défaut inhérent dans le cas du calcul de la moyenne puisqu'il ne conserve pas la somme des mesures au cours du temps donc ne converge pas vers la moyenne statistique. Ce défaut n'a aucune importance lorsque on s'intéresse à la recherche du maximum. Enfin, un troisième algorithme différent dans sa logique est proposé : c'est le RANDOM WALK.

Algorithme 1. RANDOM GOSSIP *(RG)*
Quand l'horloge du capteur i sonne :
- *Le capteur i choisit un noeud j parmi ses $|\mathcal{V}_i|$ voisins et échange sa valeur avec lui.*
- *Les capteurs i et j changent leur valeur de la manière suivante : $x_i(t+1) = x_j(t+1) = \max(x_i(t), x_j(t))$.*

Algorithme 2. BROADCAST *(BC)*
Quand l'horloge du capteur i sonne :
- *Le capteur i diffuse sa valeur $x_i(t)$ à son voisinage $\mathcal{V}_i$.*
- *Les capteurs de $\mathcal{V}_i$ changent leur valeur de la manière suivante : $\forall j \in \mathcal{V}_i, \quad x_j(t+1) = \max(x_i(t), x_j(t))$.*

Algorithme 3. RANDOM WALK *(RW)*
Un noeud i est choisi uniformément au début de l'algorithme puis la procédure suivante est itérée :
- *Le capteur i choisit un noeud j parmi ses $|\mathcal{V}_i|$ voisins et lui envoie sa valeur.*
- *Le capteur j change sa valeur de la manière suivante : $x_j(t+1) = \max(x_i(t), x_j(t))$.*
- *Le capteur j devient le capteur actif ($i \leftarrow j$).*

3 Convergence des algorithmes

On note $H_t = \{i \in V | x_i(t) = x_{\max}\}$ l'ensemble des capteurs disposant du maximum à l'instant t, $\overline{H}_t$ son complémentaire dans V, et $\partial(H_t) = \left\{e = (i,j) \in E | i \in H_t \text{ et } j \in \overline{H}_t\right\}$ l'ensemble des arêtes reliant H_t à son complémentaire. On définit $\tau_n = \min_t \{|H_t| = n\}$ comme le premier instant pour lequel n capteurs disposent du maximum. Comme tous les algorithmes proposés sont stables, c'est-à-dire, qu'une fois que le max-consensus est atteint, les valeurs des capteurs ne changent plus, nous avons $\tau_{\max} = \tau_N$. Par conséquent, prouver la convergence d'un algorithme revient à prouver que $\mathbb{E}[\tau_N] < \infty$. Nous avons obtenu les trois théorèmes suivants concernant les convergences respectives des algorithmes proposés.

Théorème 1. *L'algorithme* RANDOM GOSSIP *atteint le max-consensus en un temps fini τ_{RG}.*

Démonstration. À l'instant t, si le max-consensus n'a pas été atteint, il y a au moins un nœud dans H_t qui dispose d'un voisin dans $\overline{H}_t$ donc $|\partial(H_t)| \geq 1$.

Or, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{|H_t| \text{ augmente d'une unité}\} \\ = \; & \mathbb{P}\{\text{l'échange se fait autour d'une arête de } \partial(H_t)\} \\ \geq \; & \frac{2}{N}\frac{1}{d_{max}} \end{aligned}$$

car $\partial(H_t) \neq \emptyset$ et qu'autour d'une arête e il y a deux nœuds liés au plus à d_{max} arêtes.
En considérant la variable $b_t = |H_t| - |H_{t-1}|$ qui suit une loi de Bernouilli de paramètre minoré par $2/(Nd_{max})$, on déduit que la variable correspondant au temps d'une incrémentation de $|H_t|$ suit une loi géométrique de même paramètre. Donc : $\mathbb{E}\{\arg\min_\tau |H_{t+\tau}| = |H_t| + 1\} \leq Nd_{max}/2$.
D'où $\tau_{RG} = \sum_{i=1}^{N-1}(\tau_{i+1} - \tau_i) \leq (N-1)Nd_{max}/2 < \infty$. □

Théorème 2. *L'algorithme* BROADCAST *atteint le max-consensus en un temps fini τ_{BC}.*

Démonstration. Nous avons vu dans la preuve précédente que $\forall t < \tau_N, \; |\partial(H_t)| \geq 1$; il y a donc au moins un nœud dans H_t qui a au moins un voisin dans $\overline{H}_t$ donc :
$\mathbb{P}\{|H_t| \text{ augmente d'au moins une unité}\} \geq 1/N$. De manière analogue à la preuve précédente, on en déduit que l'espérance du temps d'incrémentation de $|H_t|$ est majorée par N, d'où $\mathbb{E}[\tau_{BC}] \leq N(N-1) < \infty$. □

Théorème 3. *L'algorithme* RANDOM WALK *atteint le max-consensus en un temps fini τ_{RW}.*

Démonstration. On peut décomposer la progression de l'algorithme en deux phases : i) *L'atteinte du capteur ayant le maximum.* Partant d'un capteur i, le nombre d'itérations moyen pour atteindre une première fois le capteur j s'appelle le *Hitting Time* $H(i,j)$. On définit également le *Hitting Time* maximal du graphe par $H(G) = \max_{i,j} H(i,j)$. ii) *La propagation du maximum à tous les nœuds du graphe.* Partant d'un capteur i, le nombre d'itérations moyen pour atteindre au moins une fois tous les nœuds du graphe G s'appelle le *Cover Time* $C_i(G)$. On définit également le *Cover Time* maximal du graphe par $C(G) = \max_i C_i(G)$.
Il est clair que $\mathbb{E}[\tau_{RW}] \leq H(G) + C(G)$. Or, on sait que $H(G)$ et $C(G)$ sont finis p.s., et que $H(G) \leq 4N^3/27 + o(N^3)$ et $C(G) \leq 4N^3/27 + o(N^3)$ [9, 10] ce qui finit de montrer le résultat final. □

4 Vitesses de convergence

Les bornes sur le temps moyen de convergence fournies dans les preuves des théorèmes précedents ne dépendent pas du graphe considéré. Cependant, les simulations montrent que la structure du graphe joue fortement sur le temps de convergence, c'est pourquoi il est intéressant d'obtenir des bornes sur la vitesse de convergence dépendant de quelques caractéristiques du graphe telles que le Laplacien [11].

Résultat 1. *Pour l'algorithme* RANDOM GOSSIP,

$$\mathbb{E}[\tau_{RG}] \leq \frac{Nd_{max}}{\lambda_2^L}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k} \sim \frac{Nd_{max}\ln(N-1)}{\lambda_2^L}$$

avec λ_2^L la plus petite valeur propre non-nulle du Laplacien du graphe.

Démonstration. A la manière de la preuve du Théorème 1, le cardinal de H_t augmentera ainsi d'une unité si l'arête (i,j) choisie est dans $\partial(H_t)$ donc $\mathbb{P}\left\{|H_t| \text{ augmente d'une unité}\right\} \geq 2|\partial H_t|/(Nd_{max})$. Dans [11], on trouve l'inégalité suivante dérivée des travaux de Cheeger [12] :
$|\partial S| \geq \lambda_2^L|S|(1-|S|/|V|)$ pour un graphe $G=(V,E)$ et $S \subset V$ un sous-ensemble de nœuds . En appliquant cette inégalité sur H_t, on obtient : $\mathbb{P}\left\{|H_t| \text{ augmente d'une unité}\right\} \geq 2\lambda_2^L|H_t|(N-|H_t|)/(d_{max}N^2)$.

$$\text{D'où :}\qquad \begin{aligned}\mathbb{E}[\tau_{RG}] &= \sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}[\tau_{i+1}-\tau_i] \\ &\leq \sum_{k=1}^{N-1}\frac{d_{max}N^2}{2\lambda_2^L k(N-k)} \\ &= \frac{d_{max}N}{\lambda_2^L}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

□

Résultat 2. *Pour l'algorithme* BROADCAST,

$$\mathbb{E}[\tau_{BC}] \leq \bar{\epsilon}N + (\bar{\epsilon}-1)N\ln(\frac{N-1}{\bar{\epsilon}-1})$$

où $\bar{\epsilon}$ est l'excentricité moyenne du graphe.

Démonstration. Dans cette preuve, à la manière de Feige, Frieze et Grimmett [6, 13], nous travaillons sur un sous graphe $\mathcal{G}' = (V', E')$ de $\mathcal{G}$ avec $V' = V$ et $E' \subset E$ tel que $\mathcal{G}'$ soit l'arbre de plus courts chemins dont la racine est un nœud ayant le maximum à $t = 0$. Il est évident que l'algorithme de BROADCAST convergera plus lentement sur $\mathcal{G}'$ que sur $\mathcal{G}$. Considérons l'ensemble $\mathcal{L}_i$ de nœuds (couche) se trouvant à une distance i de la racine de $\mathcal{G}'$. Comme cette transformation du graphe ne modifie pas les plus courts chemins entre les nœuds , le nombre de couches est égal à l'excentricité du nœud racine ϵ_r.

Le temps nécessaire à ce que tous les nœuds de la couche $\mathcal{L}^{(i+1)}$ soient informés sachant que ceux de la couche $\mathcal{L}^{(i)}$ le sont est noté $\tau^{(i+1)}$. De manière générique, ce temps est le temps pour que $K = |\mathcal{L}^{(i)}|$ élements soient choisis dans ensemble à N élements avec un tirage uniforme ; l'espérance de ce temps peut s'écrire :
$\sum_{j=0}^{K}\sum_{t=1}^{\infty} t.\mathbb{P}[\text{Un élement parmi les } j \text{ restants est choisi}] \times \mathbb{P}[\text{Aucun élément parmi les } j \text{ restants n'a été choisi en } t \text{ coups}]$
$= \sum_{j=0}^{K}\sum_{t=1}^{\infty} t \times i/N \times (1-j/N)^{t-1}$
$= \sum_{j=0}^{K} N/j$.

Où la dernière égalité vient du fait que $\sum_{k=1}^{\infty} k(1-x)^{k-1} = 1/x^2 \quad \forall |1-x| < 1$, nous pouvons donc conclure que :

$$\mathbb{E}[\tau^{(i+1)}|\mathcal{L}^{(i)} \text{ est informée}] = N\sum_{j=1}^{|\mathcal{L}^{(i)}|} 1/j$$

Nous avons finalement :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tau_{BC}] &\leq \sum_{i=0}^{\epsilon_r-1}\mathbb{E}[\tau^{(i+1)}|\mathcal{L}^{(i)} \text{ est informée}] \\ &= N\sum_{i=0}^{\epsilon_r-1}\sum_{j=1}^{|\mathcal{L}^{(i)}|}\frac{1}{j} \\ &\leq N\sum_{i=0}^{\epsilon_r-1}\Big(\ln(|\mathcal{L}^{(i)}|)+1\Big) \\ &= N\epsilon_r + N\ln\left(\prod_{i=1}^{\epsilon_r-1}|\mathcal{L}^{(i)}|\right) \\ &\leq N\epsilon_r + N(\epsilon_r-1)\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{\epsilon_r-1}|\mathcal{L}^{(i)}|}{\epsilon_r-1}\right) \\ &\leq N\epsilon_r + N(\epsilon_r-1)\ln\left(\frac{N-1}{\epsilon_r-1}\right)\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\sum_{i=1}^{n} 1/i \leq \ln n + 1$, que $|\mathcal{L}^{(0)}| = 1$, l'inégalité arithmetico-géometrique et le fait que $\sum_{i=1}^{\epsilon_r-1}|\mathcal{L}^{(i)}| \leq N-1$. Finalement, nous avons obtenu le résultat voulu en prenant l'espérance sur toutes les positions possibles du maximum (donc de la racine) et applicant l'inégalité de Jensen. □

Notons qu'il existe de nombreuses bornes pour différents types de graphes pour la vitesse de convergence du RANDOM WALK dans la littérature ; citons par exemple [14].

5 Simulations

Nous appelerons dans la suite *Random Geometric Graphs* (RGG) les graphes pour lesquels les capteurs sont distribués uniformément sur le pavé $[0,1)^2$ et sont connectés deux à deux si et seulement si leur distance euclidienne est inférieure à un rayon r [15]. Les simulations ci-dessous ont été réalisées sur des RGGs de rayon $r = 4\sqrt{\log(N)/N}$.

Sur la Figure 1, nous traçons le pourcentage moyen de capteurs informés du maximum en fonction de l'instant t pour les algorithmes proposés avec $N = 75$ capteurs. On remarque que le BROADCAST converge bien plus vite que les deux autres algorithmes, qui ont des vitesses de convergence comparables. Le RANDOM WALK, plus rapide au début, est finalement plus lent car les derniers capteurs sont difficiles à informer puisque la marche aléatoire confine à un échange de proches en proches alors que le RANDOM GOSSIP favorise l'échange local uniformément sur le graphe.

Sur la Figure 2, nous affichons le nombre de communications nécessaires pour atteindre le consensus en fonction du nombre de capteurs. C'est un bon indicateur des performances d'un algorithme d'estimation dans les réseaux de capteurs car les contraintes de puissance sont très fortes dans ce domaine, il est donc intéressant de minimiser ce coût. Le nombre de communications se déduit facilement du nombre d'itérations en le multipliant par le nombre de communications par itération, à savoir 1 pour le BROADCAST et le RANDOM WALK et 2 pour le RANDOM GOSSIP. Nous avons tracé ce coût pour les trois algorithmes présentés ainsi que les bornes des Résultat 1 et 2. De nouveau, nous remarquons que le BROADCAST converge bien plus vite que les deux autres.

Il est à noter que le RANDOM GOSSIP converge plus rapidement que le RANDOM WALK en nombre d'itérations mais pour un coût en communications suprieur. Finalement, remarquons que les bornes des Résultats 1 et 2 sont atteintes dans le cas du graphe complet.

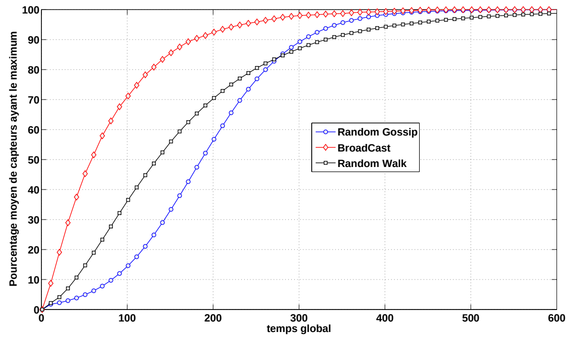

FIG. 1 – Pourcentage moyen de capteurs informés en fonction de l'instant t.

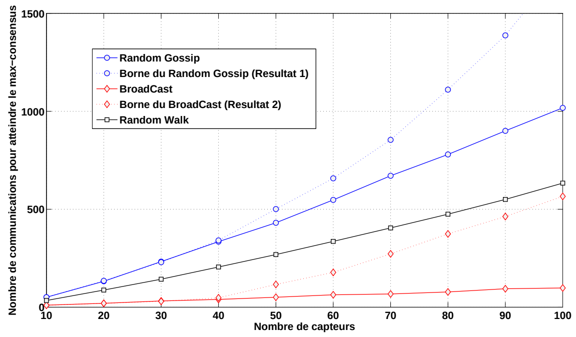

FIG. 2 – Nombre moyen de communications pour atteindre le max-consensus en fonction du nombre de capteurs.

6 Conclusions

Dans ce papier, nous nous sommes intéressés à trois algorithmes d'estimation distribuée du maximum dans un réseau de capteurs : le BROADCAST, le RANDOM GOSSIP et le RANDOM WALK. Nous avons prouvé leur convergence et donné des bornes sur leurs vitesses de convergence.

Remerciements

Ces travaux ont été partiellement financés par la DGA/MRIS et l'Institut Carnot Télécom/Eurécom.

Références

[1] J.N. TSITSIKLIS : *Problems in decentralized decision making and computation*. Thèse de doctorat, M. I. T., Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 1984.

[2] S. BOYD, A. GHOSH, B. PRABHAKAR et D. SHAH : Analysis and optimization of randomized gossip algorithms. *In Proc. CDC Decision and Control 43rd IEEE Conf*, volume 5, pages 5310–5315, 2004.

[3] T. C. AYSAL, M. E. YILDIZ, A. D. SARWATE et A. SCAGLIONE : Broadcast Gossip Algorithms for Consensus. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(7):2748–2761, 2009.

[4] A. G. DIMAKIS, S. KAR, J. M. F. MOURA, M. G. RABBAT et A. SCAGLIONE : Gossip Algorithms for Distributed Signal Processing. *Proceedings of the IEEE*, 98(11):1847–1864, 2010.

[5] F. BENEZIT, P. THIRAN et M. VETTERLI : Interval consensus : From quantized gossip to voting. *In Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP 2009*, pages 3661–3664, 2009.

[6] U. FEIGE, D. PELEG, P. RAGHAVAN et E. UPFAL : Randomized broadcast in networks. *Random Structures & Algorithms*, 1(4): 447–460, 1990.

[7] N. FOUNTOULAKIS, A. HUBER et K. PANAGIOTOU : Reliable Broadcasting in Random Networks and the Effect of Density. *In Proc. IEEE INFOCOM*, pages 1–9, 2010.

[8] S. BOYD, A. GHOSH, B. PRABHAKAR et D. SHAH : Randomized gossip algorithms. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(6):2508–2530, 2006.

[9] C. COOPER et A. FRIEZE : The cover time of random geometric graphs. *In Proceedings of the twentieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 48–57. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[10] U. FEIGE : A tight upper bound on the cover time for random walks on graphs. *Random Struct. Algorithms*, 6:51–54, 1995.

[11] D. SPIELMAN : Spectral Graph Theory. Lecture Notes, 2009.

[12] J. CHEEGER : Spectral geometry of singular Riemannian spaces. *Journal of differential geometry*, 18(4):575–657, 1983.

[13] A. FRIEZE et G. GRIMMETT : The shortest-path problem for graphs with random arc-lengths. *Discrete Applied Mathematics*, 10(1):57–77, 1985.

[14] C. AVIN et G. ERCAL : On the cover time and mixing time of random geometric graphs. *Theoretical Computer Scienc*, 380(1-2):2–22, 2007.

[15] M. PENROSE : *Random geometric graphs*. Oxford University Press, USA, 2003.