

Codage Réseau pour Canal à Accès Multiple avec Relai

Abdellatif ZAIDI[†], Mohieddine EL SOUSSI[‡], Luc VANDENDORPE[‡]

[†]Université Paris-Est Marne La Vallée,
Laboratoire d'Informatique Gaspard Monge UMR CNRS 8049
5 Bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

[‡]Université Catholique de Louvain
Place du Levant.2, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique
abdellatif.zaidi@univ-mlv.fr,
{mohieddine.elsoussi, luc.vandendorpe}@uclouvain.be

Résumé – Nous étudions la transmission de données sur un canal à accès multiple avec un relai. Le système est composé de deux émetteurs qui communiquent avec un récepteur en présence d'un noeud relai. Le rôle du relai est d'aider les deux émetteurs à communiquer avec la destination. Les méthodes classiques de codage pour ce système sont basées sur des techniques comme "décoder-et-transférer" (DF), "amplifier-et-transférer" (AF) ou "compresser-et-transférer" (CF). Ces méthodes sont limitées dans certaines situations, principalement parcequ'elles ne sont pas bien adaptées au cas où le relai assiste plusieurs utilisateurs à la fois.

Nous proposons une stratégie de codage basée sur une forme de codage réseau au niveau du relai. La méthode consiste à concevoir la transmission de telle manière qu'il soit possible à la destination de décoder deux équations qui relient les symboles envoyés, au lieu de décoder les symboles eux même. L'idée est qu'il peut être moins coûteux de décoder une équation (c'est à dire les coefficients de cette équation), plutôt que les inconnues de cette équation. Nous montrons que l'utilisation de codes avec une structure algébrique appropriée, les réseaux de points ou *lattice codes*, rend cela possible.

Dans un premier temps, nous établissons le débit somme de transmission offert par notre méthode et, en le comparant à ceux des méthodes classiques, nous montrons la pertinence et l'utilité de cette forme de codage réseau au niveau du relai. Dans un deuxième temps, nous discutons le choix des paramètres du codage de façon à maximiser ce débit de transmission. Nous montrons qu'il s'agit d'un problème non convexe qui est en général difficile à résoudre; et que nous résolvons ici en utilisant des méthodes d'approximations convexes successives [1] que nous traitons à l'aide d'une série de programmes géométriques.

Abstract – In this work, we study a multiaccess relay channel (MARC). The system consists of two transmitters communicating with a destination with the help of a half-duplex relay. We extend and adapt the recently proposed lattice-based compute-and-forward coding scheme to the model we study. This coding scheme can be seen as a form of some network-coding that is implemented at the relay through modulo-reduction. In this scheme, the destination decodes two linear equations with integer coefficients that relate the transmitted symbols at different computational rates. First, we discuss the design criteria, and derive the allowed computation rate. Then, we optimally allocate the different parameters by solving a series of geometric programs through the approach of successive convex approximation [1]. The analysis shows that our coding scheme can offer substantial gain over the standard amplify-and-forward and decode-and-forward for this model. We illustrate our results through some numerical examples.

1 Introduction

Les réseaux de points [2], codes algébriques, ont été proposés et étudiés pour implémenter des techniques de codage réseau au niveau de la couche physique pour certains systèmes de communication. Cela comprend la canal bidirectionnel à relai (two-way relay channel) [3], [4], [5] [6] et le canal à entrées multiples et sorties multiples (MIMO) [7], [8]. Dans [7] et [8], les réseaux de points sont utilisés en conjonction avec un codage approprié pour mieux combattre les interférences. L'idée est que le récepteur décode des équations reliant les symboles interférants ce qui permet après de décoder ces symboles individuellement en inversant (quand cela est possible) le système d'équations obtenu. Les auteurs montrent que cela peut offrir

des taux de transmissions qui sont bien meilleurs que ceux qu'on peut obtenir avec des méthodes plus classiques d'annulation d'interférences comme le décodage successif.

Dans cette contribution, nous considérons la transmission sur un canal à accès multiple avec un relai (MARC) dans lequel deux émetteurs communiquent avec une destination commune avec l'aide d'un relai. Le relai assiste les deux utilisateurs à la fois. Nous concevons et analysons une stratégie de codage pour ce système. Cette stratégie est liée, dans l'esprit, aux méthodes de [7] et [8], mais nous la concevons et utilisons différemment ici. En particulier, l'idée de décoder des équations n'est pas utilisée pour annuler une interférence mais pour permettre une meilleure coopération entre le relai et les émetteurs qu'il aide. Aussi, ces équations sont obtenues et conçues aux niveaux des

émetteurs qui ne sont pas colocalisés, par opposition à [7] et [8]. Nous analysons notre méthode et nous montrons qu'elle offre un débit de transmission somme qui est meilleur que ceux qu'on peut obtenir avec des méthodes classiques de codage pour ce système.

2 Description du Modèle

Deux utilisateurs A et B communiquent avec une destination commune avec l'aide d'un relai. L'utilisateur A veut transmettre un message W_a à la destination. L'utilisateur B veut transmettre un message W_b à la destination. Nous considérons le cas où ces deux messages sont transmis avec un même débit R .

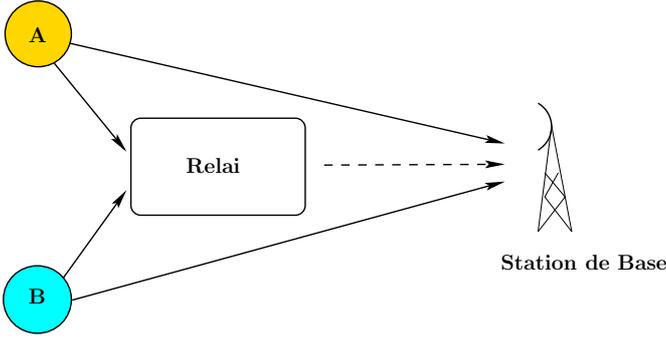


FIG. 1: Canal à accès multiple avec relai.

La transmission se fait en deux phases, de même durée. Par convention, nous utilisons la notation suivante : la notation “sans barre” (exemple : \mathbf{x}) désigne un signal envoyé ou reçu au cours de la première phase et la notation “avec barre” (exemple : $\bar{\mathbf{x}}$) désigne un signal envoyé ou reçu au cours de la deuxième phase.

Au cours de la première phase, l'utilisateur A encode son message W_a en un mot de code ou symbole \mathbf{x}_a et l'envoie sur le canal, et l'utilisateur B encode son message W_b en un mot de code ou symbole \mathbf{x}_b et l'envoie sur le canal.

Pendant cette première phase, le relai et la destination reçoivent

$$\mathbf{y}_r = h_{ar}\mathbf{x}_a + h_{br}\mathbf{x}_b + \mathbf{z}_r, \quad \mathbf{y}_d = h_{ad}\mathbf{x}_a + h_{bd}\mathbf{x}_b + \mathbf{z}_d, \quad (1)$$

respectivement, où h_{ar} , h_{br} , h_{ad} et h_{bd} désignent les coefficients des atténuations du canal.

Au cours de la deuxième phase, seul le relai transmet. Il envoie un mot de code $\bar{\mathbf{x}}_r$ qui est destiné à aider les deux utilisateurs A et B en même temps. Le signal reçu par la destination pendant ce temps est

$$\bar{\mathbf{y}}_d = h_{rd}\bar{\mathbf{x}}_r + \bar{\mathbf{z}}_d. \quad (2)$$

Nous supposons que les contraintes de puissance d'émission au niveau des émetteurs A et B et du relai sont respectivement P_A , P_B et P_R . Les bruits additifs au relai et à la destination sont tous blancs et indépendants de même variance N par élément. Aussi, nous considérons le taux somme de transmission $R_{\text{sum}} = 2R$ comme critère de performance; et nous nous

attachons à concevoir et étudier une stratégie de codage basée sur le codage réseau pour ce système. Aussi, nous montrons que le débit offert est bien meilleur que celui par des méthodes classiques.

3 Méthode proposée: codage réseau au niveau du relai

Nous basons notre construction sur des codes à structure algébriques, les réseaux de points [2]. Par manque d'espace, nous nous limitons à exposer l'idée et les étapes principales.

3.1 Encodage / Décodage

Soient un réseau de points Λ de second moment P_Λ , et \mathbf{v}_a et \mathbf{v}_b deux vecteurs associés aux messages W_a et W_b , respectivement.

Encodage aux niveaux des sources : Au cours de la première phase de transmission, les deux utilisateurs envoient

$$\mathbf{x}_a = \frac{[\mathbf{v}_a - \mathbf{u}_a] \bmod \Lambda}{\beta_a}, \quad \mathbf{x}_b = \frac{[\mathbf{v}_b - \mathbf{u}_b] \bmod \Lambda}{\beta_b} \quad (3)$$

respectivement, où $[\mathbf{x}] \bmod \Lambda := \mathbf{x} - \mathcal{Q}_\Lambda(\mathbf{x})$ et $\mathcal{Q}_\Lambda(\mathbf{x})$ est le point du réseau de points Λ le plus proche de \mathbf{x} . Les vecteurs \mathbf{u}_a et \mathbf{u}_b sont deux vecteurs aléatoires qui sont supposés connus (*dithers*), et les coefficients $\beta_a \in \mathbb{R}$ et $\beta_b \in \mathbb{R}$ sont des constantes à valeurs réelles qui sont choisies pour satisfaire les contraintes sur les puissances transmises.

Décodage au relai : Soient $k_a \in \mathbb{N}$, $k_b \in \mathbb{N}$ et $\alpha_r \in \mathbb{R}$ des paramètres dont nous discuterons la sélection plus bas. Le relai reçoit \mathbf{y}_r et calcule

$$\tilde{\mathbf{y}}_r = [\alpha_r \mathbf{y}_r + k_a \mathbf{u}_a + k_b \mathbf{u}_b] \bmod \Lambda. \quad (4)$$

En utilisant certaines propriétés de la réduction algébrique modulo, on peut montrer que

$$\tilde{\mathbf{y}}_r = [k_a \mathbf{v}_a + k_b \mathbf{v}_b + \tilde{\mathbf{z}}_r] \bmod \Lambda, \quad (5)$$

où $\tilde{\mathbf{z}}$ est un bruit, dit *équivalent*, et donné par

$$\tilde{\mathbf{z}}_r = [(\alpha_r h_{ar} - \beta_a k_a) \mathbf{x}_a + (\alpha_r h_{br} - \beta_b k_b) \mathbf{x}_b + \alpha_r \mathbf{z}_r] \bmod \Lambda.$$

Nous remarquons que, puisque k_a et k_b sont deux entiers (et non réels!), la quantité $k_a \mathbf{v}_a + k_b \mathbf{v}_b$ est un point du réseau Λ , çà-d, $\mathbf{e}_1 = (k_a \mathbf{v}_a + k_b \mathbf{v}_b) \in \Lambda$. Avec un bon choix du paramètre $\alpha_r \in \mathbb{R}$ (celui qui minimise la variance du bruit $\tilde{\mathbf{z}}_r$), le relai peut donc décoder correctement ce point et ainsi obtenir une équation à coefficients entiers qui relie les symboles inconnus \mathbf{v}_a et \mathbf{v}_b . Nous dénotons le débit auquel le relai peut obtenir \mathbf{e}_1 par R_{sr} . Ce débit sera calculé plus bas.

Encodage au niveau du relai : Le relai ne décode pas les symboles individuels \mathbf{v}_a et \mathbf{v}_b , et envoie à la destination une équation qui les relie,

$$\bar{\mathbf{x}}_r = \frac{[\mathbf{e}_1 - \mathbf{u}_r] \bmod \Lambda}{\beta_r}, \quad (6)$$

où \mathbf{u}_r est un vecteur aléatoire qui est supposé connu (*dither*), et $\beta_r \in \mathbb{R}$ est une constante qui est choisie de manière à satisfaire la contrainte de puissance au relai.

Décodage à la destination : Soient $t_a \in \mathbb{N}$, $t_b \in \mathbb{N}$ et $\alpha_d \in \mathbb{R}$. Durant la première phase de transmission, la destination reçoit \mathbf{y}_d et calcule $\tilde{\mathbf{y}}_d = [\alpha_d \mathbf{y}_d + t_a \mathbf{u}_a + t_b \mathbf{u}_b] \bmod \Lambda$. On peut montrer que

$$\tilde{\mathbf{y}}_d = [t_a \mathbf{v}_a + t_b \mathbf{v}_b + \tilde{\mathbf{z}}_d] \bmod \Lambda \quad (7)$$

où $\tilde{\mathbf{z}}_d$ est un bruit équivalent donné par

$$\tilde{\mathbf{z}}_d = [(\alpha_d h_{ad} - \beta_a t_a) \mathbf{x}_a + (\alpha_d h_{bd} - \beta_b t_b) \mathbf{x}_b + \alpha_d \mathbf{z}_d] \bmod \Lambda.$$

De manière analogue au relai, puisque t_a et t_b sont deux entiers, la quantité $\mathbf{e}_2 = (t_a \mathbf{v}_a + t_b \mathbf{v}_b) \in \Lambda$ peut être décodée correctement par la destination. Soit R_{sd} le débit auquel la destination peut obtenir \mathbf{e}_2 à l'issue de cette première phase. Ce débit sera calculé plus bas.

Donc, en choisissant le paramètre $\alpha_d \in \mathbb{R}$ de manière à minimiser la variance du bruit $\tilde{\mathbf{z}}_d$, la destination peut décoder correctement ce point et obtenir une équation à coefficients entiers qui relie les symboles inconnus \mathbf{v}_a et \mathbf{v}_b .

Ensuite, pour pouvoir obtenir les symboles \mathbf{v}_a et \mathbf{v}_b qui ont été émis, la destination a besoin d'une deuxième équation reliant ces deux symboles inconnus. Elle peut obtenir celle-ci en utilisant le signal $\tilde{\mathbf{y}}_d$ reçu lors de la seconde phase de transmission, de la façon suivante. Le décodeur calcule

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\mathbf{y}}}_d &= [\bar{\alpha}_d \tilde{\mathbf{y}}_d + k_a \mathbf{u}_a + k_b \mathbf{u}_b] \bmod \Lambda \\ &= [k_a \mathbf{v}_a + k_b \mathbf{v}_b + \tilde{\tilde{\mathbf{z}}}_d] \bmod \Lambda \end{aligned} \quad (8)$$

où le bruit équivalent $\tilde{\tilde{\mathbf{z}}}_d$ est donné par

$$\tilde{\tilde{\mathbf{z}}}_d = [(\bar{\alpha}_d h_{rd} - \beta_r) \bar{\mathbf{x}}_r + \bar{\alpha}_d \tilde{\mathbf{z}}_d] \bmod \Lambda.$$

De façon similaire, avec un choix approprié du paramètre $\bar{\alpha}_d \in \mathbb{R}$, la destination peut décoder correctement $\mathbf{e}_2 = (k_a \mathbf{v}_a + k_b \mathbf{v}_b) \in \Lambda$ et obtenir ainsi une deuxième équation à coefficients entiers qui relie les inconnus \mathbf{v}_a et \mathbf{v}_b . Soit R_{rd} le débit auquel la destination peut obtenir \mathbf{e}_1 à l'issue de la deuxième phase de transmission. Ce débit sera calculé plus bas.

Finalement, le décodeur retrouve les inconnus \mathbf{v}_a et \mathbf{v}_b en inversant le système linéaire

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= k_a \mathbf{v}_a + k_b \mathbf{v}_b \\ \mathbf{e}_2 &= t_a \mathbf{v}_a + t_b \mathbf{v}_b. \end{aligned} \quad (9)$$

3.2 Taux de transmission somme

Nous montrons (les détails sont omis) que le débit somme de transmission des deux messages par phase de transmission est donné par

$$\begin{aligned} R_{\text{CFD}} &= \max \min \left\{ \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{P_\Lambda}{\text{Var}(\tilde{\mathbf{z}}_r)} \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{P_\Lambda}{\text{Var}(\tilde{\tilde{\mathbf{z}}}_d)} \right), \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{P_\Lambda}{\text{Var}(\tilde{\mathbf{z}}_d)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

où $\text{Var}(\cdot)$ indique la variance et la maximization est par rapport aux paramètres $(\alpha_r, \alpha_d, \bar{\alpha}_d) \in \mathbb{R}^3$, $(\beta_a, \beta_b, \beta_r) \in \mathbb{R}^3$ et $(k_a, k_b, t_a, t_b) \in \mathbb{N}^4$.

Remark 1. Les choix optimaux des paramètres α_r , α_d et $\bar{\alpha}_d$ correspondent aux coefficients de Wyner et s'obtiennent très facilement en analysant les variances des bruits effectifs $\tilde{\mathbf{z}}_r$, $\tilde{\mathbf{z}}_d$ et $\tilde{\tilde{\mathbf{z}}}_d$, respectivement.

Avec le choix des paramètres α_r , α_d et $\bar{\alpha}_d$ de manière à minimiser les variances des bruits équivalents. Nous obtenons

$$\begin{aligned} R_{sr} &= \frac{1}{4} \log \left(\left[k_a^2 + k_b^2 - \frac{P_\Lambda (h_{ar} \beta_b k_a + h_{br} \beta_a k_b)^2}{N \beta_a^2 \beta_b^2 + P_\Lambda (|h_{ar}|^2 \beta_b^2 + |h_{br}|^2 \beta_a^2)} \right]^{-1} \right) \\ R_{sd} &= \frac{1}{4} \log \left(\left[t_a^2 + t_b^2 - \frac{P_\Lambda (h_{ad} \beta_b t_a + h_{bd} \beta_a t_b)^2}{N \beta_a^2 \beta_b^2 + P_\Lambda (|h_{ad}|^2 \beta_b^2 + |h_{bd}|^2 \beta_a^2)} \right]^{-1} \right) \\ R_{rd} &= \frac{1}{4} \log \left(1 + \frac{|h_{rd}|^2 P_R}{\beta_r^2 N} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Remark 2. La figure 2 montre le débit somme de transmission obtenu avec notre méthode (dénoté par CFD). La figure montre aussi les taux sommes obtenus avec deux autres méthodes de codage basées sur AF avec codage réseau (CFA) et sans codage réseau (AFL). L'avantage de l'utilisation du codage réseau dans notre méthode est visible sur la figure, puisque les taux de transmissions que nous obtenons sont bien meilleurs que ceux qu'on peut obtenir avec les stratégies classiques de codage comme AF et DF.

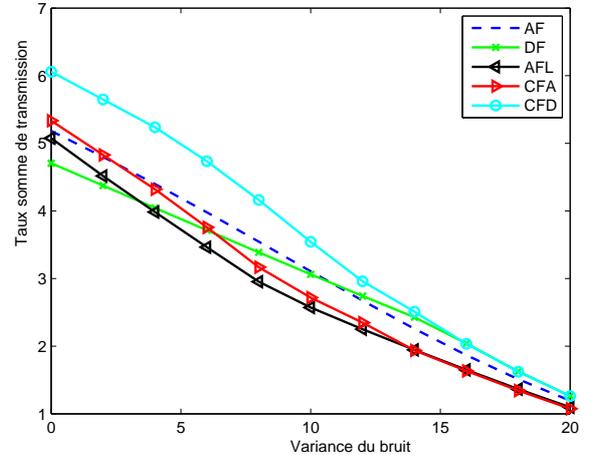


FIG. 2: Débit somme de transmission en fonction du bruit au relai. Valeurs numériques : $P_A = P_B = P_R = 10$ dB.

3.3 Optimisation du débit et approximation convexe

Soient $\beta = (\beta_a, \beta_b, \beta_r)$ et

$$\Omega = \begin{pmatrix} t_a & t_b \\ k_a & k_b \end{pmatrix}.$$

Nous considérons le problème d'optimisation suivant

$$(P) : \max_{\beta, \Omega} \min \{R_{sr}, R_{sd}, R_{rd}\}$$

$$\text{s.c. } \beta_a^2 \geq P_\Lambda/P_A, \beta_b^2 \geq P_\Lambda/P_B,$$

$$(t_a, t_b, k_a, k_b) \in \mathbb{N}^4 \text{ telsque } \text{rang}(\Omega) = 2. \quad (13)$$

Le problème d'optimisation (P) est un problème d'optimisation mixte, entière et non entière. Aussi, c'est un problème non convexe [9]. Dans cette section, nous exposerons l'optimisation de (10) en utilisant un algorithme de *Geometric Programming* (GP).

3.3.1 Coefficients des équations

Pour un jeu de paramètres $\beta = (\beta_a, \beta_b, \beta_r)$ donné, la maximization de (13) par rapport à Ω est un problème "NP hard". Soient, pour β donné, $\mathcal{T}_a(\beta)$, $\mathcal{T}_b(\beta)$, $\mathcal{K}_a(\beta)$ et $\mathcal{K}_b(\beta)$ respectivement l'ensemble des coefficients entiers t_a , t_b , k_a et k_b telque $R_{sr} \geq 0$, $R_{sd} \geq 0$ et $R_{rd} \geq 0$

3.3.2 Algorithme

Algorithm 1 Algorithme d'optimisation

- [1:] $p=1$
 - [2:] Choisir un jeux d'entiers $\Omega^{(p)}$ de rang 2.
 - [3:] Résoudre (13) avec $\Omega := \Omega^{(p)}$ pour obtenir le jeu optimal de paramètres $\beta^{(p)}$. (voir la section suivante).
 - [4:] Incréments p et recommencer à l'étape 3.
 - [5:] Terminer l'algorithme après avoir parcouru l'ensemble des entiers possibles $(t_a, t_b) \in \mathcal{T}_a \times \mathcal{T}_b$ et $(k_a, k_b) \in \mathcal{K}_a \times \mathcal{K}_b$.
 - [6:] Choisir le p qui correspond au taux somme le plus élevé.
-

3.3.3 Sélection de $\beta = (\beta_a, \beta_b, \beta_r)$

L'optimisation de (13) par rapport à β est un problème non linéaire et non convexe. Le lecteur pourra trouver les détails de la résolution de ce problème dans [10].

Références

- [1] B. R. Marcks and G. P. Wright. A general inner approximation algorithm for nonconvex mathematical programs. *Operations Research*, 26:681–683, 1978.
- [2] J. H Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere Packing, Lattices and Groups*. third edition, John Willey & Sons INC., New York, 1988.
- [3] K. Narayanan, M. P. Wilson, and A. Sprintson. Joint physical layer coding and network coding for bi-directional relaying. In *Proc. 45th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, Illinois, USA, Sep. 2007.

- [4] M. P. Wilson and K. Narayanan. Power allocation strategies and lattice based coding schemes for bi-directional relaying. In *Proc. IEEE Int. Symp. Information Theory*, Jul. 2009.
- [5] W. Nam, S.-Y. Chung, and Y. H. Lee. Capacity bounds for two-way relay channels. In *Proc. Int. Zurich Seminar on Comm.*, Mar. 2008.
- [6] I.-J. Baik and S.-Y. Chung. Network coding for two-way relay channels using lattices. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Communications*, May 2008.
- [7] B. Nazer and M. Gastpar. The case for structured random codes in network communication theorems. In *Proc. IEEE Int. Theo. Workshop*, Sep. 2007.
- [8] B. Nazer and M. Gastpar. Compute-and-forward: Harnessing interference with structured codes. In *Proc. IEEE Int. Symp. Information Theory*, July 2008.
- [9] M. Chiang. Geometric programming for communication systems. *Foundation and Trends in Commun. and Inf. Theory*, 2, Aug. 2005.
- [10] M. El Soussi, A. Zaidi, and L. Vandendorpe. Resource allocation for the multiple access relay channel with a compute-and-forward relay. In *Proc. IEEE International Symposium on Wireless Communication Systems*, Aachen, Germany, Nov. 2011.