

Robustesse au Doppler du filtre de Wiener pour un radar OFDM

Bochra BENMEZIANE[#], Jean-Yves BAUDAIS[†], Stéphane MÉRIC[†] et Kevin CINGLANT[#]

[#]ZF Autocruise, Brest, France

[†]Univ Rennes, INSA Rennes, CNRS, IETR-UMR 6164, F-35000 Rennes, France

bochra.benmeziane@zf.com

Résumé – Le filtrage de Wiener est appliqué à un radar retard-Doppler exploitant des signaux OFDM. On montre que la réponse du filtre à une cible ponctuelle est une variable aléatoire exponentielle. On obtient alors que ce filtre est plus robuste aux décalages Doppler que le filtre ZF, généralement utilisé avec des signaux OFDM, et conserve les performances du filtre adapté dans les scénarios difficiles.

Abstract – A Wiener filter is applied to a range-Doppler radar that uses an OFDM waveform. This paper demonstrates that the filter output for a point target is an exponential random variable. We conclude that this filter is more robust to Doppler shifts than the usual ZF filter and that it maintains the performances of a matched filter in rough scenarios.

1 Introduction

L'exploitation de l'OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*) pour des applications radar et de communications (radcom) est largement étudiée, notamment dans [1]. Chacune de ces deux applications ainsi que leur cohabitation présentent des défis de dimensionnement répondant à des besoins spécifiques [2]. Cet article se penche sur l'application du radar OFDM.

Le radar dont il est question ici donne une carte distance-Doppler qui peut être obtenue via différentes méthodes telles que le filtre adapté (MF) [4] ou le forçage à zero (ZF) [5]. Chacune de ces méthodes présentent des limites [6]. Nous proposons d'appliquer et d'adapter le principe du filtre de Wiener (WF), aussi appelé filtre d'erreur quadratique moyenne minimum, comme candidat pour obtenir des profils en distance, ce qui n'a pas encore été fait à notre connaissance. Ce filtre est comparé aux filtres conventionnels en matière de PSLR (Peak to Sidelobe Ratio). Cet article prend aussi en considération l'impact que peut avoir le décalage Doppler sur ces profils en distance [7] et compare la robustesse du WF en présence de Doppler.

L'article est organisé comme suit. Le modèle du signal OFDM émis et l'équation du l'écho reçu et démodulé sont présentés dans la section 2. Le profil en distance utilisant le filtre de Wiener est déduit dans la section 3. La section 4 donne l'expression analytique du PSLR de ces profils en distance. Des simulations viennent confirmer cette expression dans différents environnements dans la section 5. Enfin, la section 6 conclut cet article.

2 Modèle

Nous considérons un radar OFDM monostatique. Soit n le nombre de sous-porteuses transportant n symboles complexes $a_{k,i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ces symboles $a_{k,i}$ sont des symboles de modulation permettant la transmission d'information pour des applications de communication. Le symbole OFDM en bande de base s'écrit alors [1]

$$\tilde{x}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} a_{k,i} e^{2i\pi f_i t} \quad (1)$$

pour $k = 0$, pour tout $t \in [0, T]$ avec T la durée du symbole OFDM et $f_i = \frac{i}{T}$ la i^e sous-porteuse. La bande occupée par ce symbole est $\frac{n}{T}$. Afin de garder la périodicité du symbole en réception et pour absorber les trajets multiples, un intervalle de garde appelé préfixe cyclique (CP) est ajouté au symbole. Sa durée τ_g est supérieure au retard de la cible la plus éloignée attendue dans le scénario. Le symbole OFDM en bande de base devient alors

$$x_0(t) = \tilde{x}_0(t - \tau_g) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} a_{0,i} e^{2i\pi f_i (t - \tau_g)} \quad (2)$$

L'expression du train de symboles OFDM, $\forall k \in \mathbb{Z}$, s'écrit

$$x(t) = \sum_k x_k(t - k(T + \tau_g)) \quad (3)$$

Le signal OFDM est ensuite mis sur une porteuse f_c , ce qui donne

$$s(t) = x(t) e^{2i\pi f_c t} \quad (4)$$

Soit une cible ponctuelle qui se trouve à une distance d_0 et qui a une vitesse radiale v . Le retard de l'écho réfléchi par cette cible est

$$\tau(t) = \frac{2d(t)}{c} = \tau_0 + \frac{2v}{c} t \quad (5)$$

où $\tau_0 = \frac{2d_0}{c}$, $d(t)$ est la distance entre le radar et la cible à un instant t et c est la célérité de la lumière. Afin d'alléger la présentation, nous considérons des retards tels que $\frac{n\tau_k}{T} \in \mathbb{N}$. En pratique, et avec des valeurs non entières, des fenêtres d'apodisation sont utilisées. L'expression de l'écho reçu en bande de base est

$$y(t) = Ae^{i\phi_0} s(t - \tau(t))e^{-2i\pi f_c t} + b(t) \quad (6)$$

où $b(t)$ est un bruit blanc additif et gaussien dont la puissance est σ_b^2 . Le terme $Ae^{i\phi_0}$ caractérise la propagation en espace libre et la cible. Cet article ne tenant pas compte de ces aspects, nous considérons que $Ae^{i\phi_0} = 1$.

Le k^e symbole OFDM reçu en bande de base est échantillonné à $t = \frac{jT}{n} + k(T + \tau_g) + \tau_g$, $j = 0, \dots, n-1$, soit

$$y_k(j) = \frac{e^{i\phi_k}}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} a_{k,i} e^{2i\pi \frac{ij}{n}} e^{-2i\pi \frac{i\tau_k}{T}} e^{-2i\pi \frac{j\nu T}{n}} + b_k(j) \quad (7)$$

où $\phi_k = -2\pi f_c \tau_k$, $\nu = f_c \frac{2\nu}{c}$ est le décalage Doppler et $\tau_k = \tau_0 + k(T + \tau_g) \frac{2\nu}{c}$ est le retard au début du symbole k . La démodulation OFDM du signal numérique $y_k(j)$ se fait via une transformation de Fourier, ce qui donne

$$\begin{aligned} Y_k(l) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_k(j) e^{-2i\pi \frac{jl}{n}} \\ &= e^{i\phi_k} \sum_{i=0}^{n-1} a_{k,i} e^{-2i\pi \frac{i\tau_k}{T}} D_n(i - l - \nu T) + B_k(l) \end{aligned} \quad (8)$$

avec

$$D_n(u) = e^{i\pi u(1 - \frac{1}{n})} \frac{\sin \pi u}{n \sin \frac{\pi}{n} u} \quad (9)$$

Ces échantillons $Y_k(l)$, $l = 0, \dots, n-1$ et $k = 0, \dots, m-1$ sont exploités pour estimer les paramètres de la cible à travers l'utilisation de filtres.

3 Retard-Doppler et filtre de Wiener

L'expression générale d'une carte radar distance-Doppler est

$$\chi(i, j) = \frac{1}{\sqrt{nm}} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} Y_k(l) c_{k,l} e^{2i\pi \frac{il}{n}} e^{-2i\pi \frac{jk}{n}} \quad (10)$$

où les $c_{k,l}$ représentent le filtre utilisé. Pour un filtre de Wiener, $c_{k,l} = \frac{\bar{a}_{k,l}}{|a_{k,l}|^2 + \sigma_b^2}$ [8], où $\bar{a}_{k,l}$ est le conjugué de $a_{k,l}$. Notre étude se concentre sur les dégradations du profil de distance dues à l'effet Doppler. Cette réponse en distance du k^e symbole est

$$\begin{aligned} \chi(i) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} Y_k(l) \frac{\bar{a}_{k,l}}{|a_{k,l}|^2 + \sigma_b^2} e^{2i\pi \frac{il}{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_{k,j} \bar{a}_{k,l}}{|a_{k,l}|^2 + \sigma_b^2} e^{2i\pi \left(\frac{il}{n} - \frac{\tau_k j}{T}\right)} D(j - l - \nu T) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} B_k(l) \frac{\bar{a}_{k,l}}{|a_{k,l}|^2 + \sigma_b^2} e^{2i\pi \frac{il}{n}} \end{aligned} \quad (11)$$

Pour assurer la qualité de détection en radar, nous analysons le lobe principal ainsi que les lobes secondaires. Pour cette analyse, nous supposons que les symboles $a_{k,l}$ sont des variables indépendantes et identiquement distribuées dont la moyenne est nulle, la puissance moyenne est σ_a^2 et le moment d'ordre quatre est μ_a^4 . L'espérance du profil en distance peut alors être estimée et s'écrit

$$\begin{aligned} E[\chi(i)] &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_{ca}^2 D(-\nu T) \sum_{j=0}^{n-1} e^{2i\pi \left(\frac{ij}{n} - \frac{\tau_k j}{T}\right)} \\ &= \sqrt{n} \sigma_{ca}^2 D(-\nu T) \delta_{i, \frac{n\tau_k}{T}} \end{aligned} \quad (12)$$

où $\sigma_{ca}^2 = E[a_{k,j} c_{k,j}]$ est une fonction de $|a_{k,j}|^2$ et $\delta_{i,j}$ est la fonction de Kronecker. L'énergie du signal est donnée par le lobe principal $|E[\chi(i_\tau)]|$.

L'espérance des lobes secondaires étant nulle, cf. (12), il nous est impossible d'estimer le SNR du profil en distance. Il est nécessaire d'étudier un moment d'ordre supérieur pour analyser ces lobes secondaires. On considère

$$A_{j,l} = a_{k,j} c_{k,l} e^{2i\pi \left(\frac{il}{n} - \frac{\tau_k j}{T}\right)} D(j - l - \nu T) \quad (13)$$

Le moment de second ordre du profil en distance est alors

$$\begin{aligned} E[|\chi(i)|^2] &= \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l'=0}^{n-1} \sum_{j'=0}^{n-1} E[A_{j,l} \overline{A_{j',l'}}] \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} E[|B_k(l)|^2] E[|c_{k,l}|^2] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} E[|A_{l,l}|^2] + \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{n-1} E[|A_{j,l}|^2] \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{n-1} E[A_{j,j} \overline{A_{l,l}}] + \sigma_b^2 \sigma_c^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Tous les autres termes $E[A_{j,l} \overline{A_{j',l'}}]$ sont nuls car

- i) $\{a_{k,l}\}_{l=0, \dots, n-1}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec une moyenne nulle;
- ii) $\{c_{k,l}\}_{l=0, \dots, n-1}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec une moyenne nulle;
- iii) $a_{k,l}$ et $c_{k,l'}$ sont indépendants $\forall l \neq l'$.

A partir de (14), nous pouvons déduire le moment d'ordre 2 du lobe principal et des lobes secondaires.

Proposition 1. *L'intensité moyenne du lobe principal est*

$$\begin{aligned} E[|\chi(i_\tau)|^2] &= (\mu_{ca}^4 + (n-1)\sigma_{ca}^4) \text{sinc}^2 \pi \nu T \\ &\quad + \sigma_c^2 \sigma_a^2 (1 - \text{sinc}^2 \pi \nu T) + \sigma_c^2 \sigma_b^2 \end{aligned}$$

Démonstration. La puissance du lobe principal est obtenue en remplaçant i_τ par $\frac{nT_k}{T}$ dans (14), et avec $\pi\nu T \ll n$, ce qui donne

$$E[|\chi(i_\tau)|^2] = (\mu_{ca}^4 + (n-1)\sigma_{ca}^4) \text{sinc}^2 \pi\nu T + \sigma_c^2 \sigma_a^2 g_n(\nu T) + \sigma_c^2 \sigma_b^2, \quad (15)$$

avec $\mu_{ca}^4 = E[|a_{k,j} c_{k,j}|^2]$, $\sigma_c^2 = E[|c_{k,j}|^2]$, et

$$g_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{n-1} \frac{\sin^2 \pi x}{n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} (j-l-x)} \quad (16)$$

Proposition 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$g_n(x) = 1 - |D_n(x)|^2$$

La démonstration de cette proposition 2 est obtenue en complétant la suite $g_n(x)$. La démonstration de la proposition 1 est alors terminée en considérant $\pi\nu T \ll n$. \square

Il ne reste plus qu'à analyser le moment d'ordre 2 des lobes secondaires.

Proposition 3. L'intensité des lobes secondaires tend vers une loi exponentielle de paramètre λ tel que

$$\frac{1}{\lambda} = E[|\chi(i_\tau)|^2] - n\sigma_{ca}^4 \text{sinc}^2 \pi\nu T$$

Démonstration. Le preuve de cette proposition exploite le théorème de Lindeberg [9]. \square

L'expression de l'intensité du lobe principal et des lobes secondaires nous permet de passer à l'estimation du PSLR du profil en distance.

4 Application au PSLR

Afin de caractériser le profil en distance, nous choisissons le PSLR comme métrique. Le PSLR dépend de l'énergie du lobe principal et est donné par

$$\gamma_{\text{PSLR}} = E \left[\frac{|\chi(i_\tau)|^2}{\max_{i \neq i_\tau} |\chi(i)|^2} \right] \quad (17)$$

Dans ce modèle, la largeur du lobe principal est une unité, puisque la fréquence d'échantillonnage est la fréquence nominale de l'OFDM.

Proposition 4. Le PSLR est

$$\gamma_{\text{PSLR}} \approx \frac{1}{H_{n-1}} + \frac{\frac{n}{H_{n-1}}}{\frac{\mu_{ca}^4}{\sigma_{ca}^4} - 1 + \frac{\sigma_c^2}{\sigma_{ca}^4} \frac{\sigma_a^2(1 - \text{sinc}^2 \pi\nu T) + \sigma_b^2}{\text{sinc}^2 \pi\nu T}}$$

avec H_n le n^{e} nombre harmonique.

En utilisant l'inégalité de Jensen, la moyenne du rapport est approchée par le rapport des moyennes. Pour calculer la moyenne du dénominateur, les statistiques d'ordre sont utilisées. Le calcul fait apparaître la fonction harmonique H_{n-1}

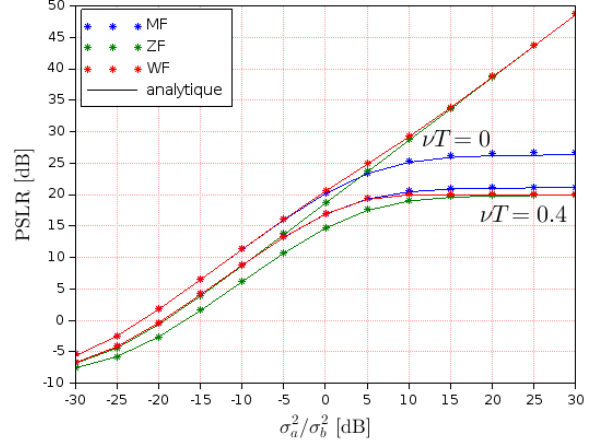


FIGURE 1 – PSLR en fonction du SNR d'entrée, $n = 2^{10}$, $\nu T \in \{0; 0,4\}$, 16-QAM.

5 Simulation

Pour nos simulations, nous utilisons un signal OFDM sur $n = 2^{10}$ sous-porteuses, ce qui donne un gain de traitement distance de 30 dB. Les symboles sont modulés en 16-QAM et leur puissance est normalisée à 1. Nous comparons le filtre de Wiener au filtre MF et au filtre ZF. Les coefficients des filtres MF et ZF sont, respectivement, $c_{k,l} = \overline{a_{k,l}}$ et $c_{k,l} = \frac{1}{a_{k,l}}$ [6].

La figure 1 représente le PSLR en fonction du SNR d'entrée $\frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2}$ en l'absence de Doppler ($\nu T = 0$) et en présence de Doppler ($\nu T = 0,4$). Les courbes de simulation proviennent de (11) et (17) et les courbes analytiques de la proposition 4. Ces courbes montrent, tout d'abord, la précision de la proposition 4 dont les courbes se superposent avec les courbes de simulation. Ensuite, elles mettent en évidence le comportement du filtre WF en fonction du SNR d'entrée. En l'absence de Doppler, le filtre WF tend à se comporter comme le filtre MF pour les SNR les plus bas, donnant un meilleur PSLR que le filtre ZF. Quand le SNR augmente, le filtre WF tend à se comporter comme le filtre ZF, donnant un meilleur PSLR que le filtre MF. En présence de Doppler de 40 % de l'espace inter-porteuse, le comportement du filtre WF reste le même, à savoir qu'il tend vers le filtre MF ou le filtre ZF en fonction du SNR. En revanche, le filtre ZF ayant des performances moindres que le filtre MF quel que soit le SNR d'entrée, le filtre WF perd en performances dans les environnements les moins bruités. Cette tendance est confirmée dans la figure 2.

La figure 2 représente le PSLR en fonction du décalage Doppler pour les trois filtres et pour un SNR d'entrée de -10 et 20 dB. Dans un environnement peu bruité (SNR de 20 dB), les courbes WF et ZF se superposent. Elles montrent un avantage pour des Doppler bas, mais

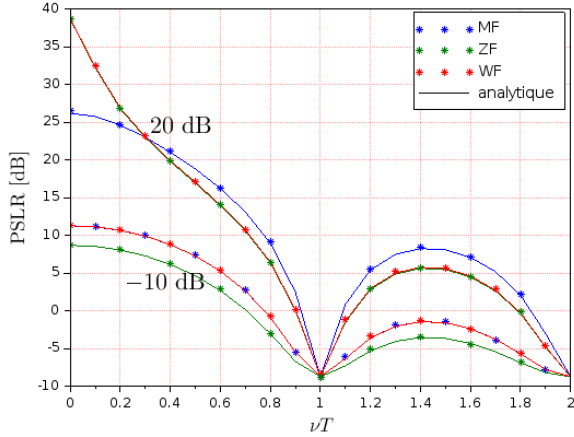


FIGURE 2 – PSLR en fonction de νT , $\frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2} \in \{-10, 20\}$ dB, $n = 2^{10}$, 16-QAM.

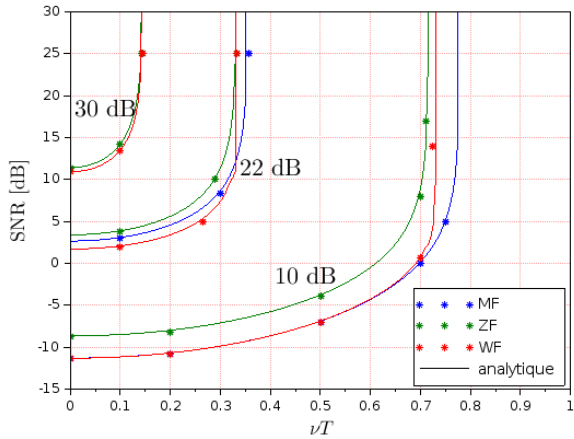


FIGURE 3 – SNR d'entrée requis en fonction de νT pour atteindre 4 valeurs de PSLR, $\{10, 22, 30\}$, $n = 2^{10}$, 16-QAM.

tombent très vite et perdent plus de 10 dB pour $\nu T = 0,2$. A partir de 30 % de l'espacement inter-porteuse, le filtre MF maintient un avantage de 3 dB sur les filtres ZF et WF. Dans un environnement bruité (SNR de -10 dB), les courbes MF et WF se superposent et sont supérieures à celle de ZF.

La figure 3 représente le SNR en entrée requis en fonction de νT pour atteindre un PSLR de 10, 22 ou 30 dB. Les courbes montrent que, pour atteindre des valeurs inférieures de PSLR, les trois filtres peuvent être très tolérants au Doppler et qui peuvent atteindre jusqu'à 70 % d'espacement avant que le système ne décroche, c'est-à-dire qu'il requière une valeur SNR infinie. Pour un PSLR de 30 dB, les filtres ZF et WF nécessitent un SNR d'entrée élevé (> 10 dB) et un Doppler relativement faible. Le filtre MF ne permet pas d'atteindre un tel PSLR avec $n = 2^{10}$, correspondant à un gain de traitement de 30 dB.

6 Conclusion

Dans cet article, un filtre de Wiener a été utilisé pour une application radar OFDM et les performances de ce système ont été comparées à celles des filtres MF et ZF en matière de robustesse au Doppler et de PSLR des profils en distance. Il a été démontré que le comportement du filtre WF peut tendre vers celui du filtre ZF dans les environnements à bruit faible, et se calque sur celui du filtre MF pour des environnements bruités. Il a été aussi démontré que, malgré l'avantage clair du filtre ZF en matière de PSLR pour un SNR élevé avec un décalage Doppler nul, cet avantage disparaît très vite en faveur du MF à partir d'un décalage Doppler aussi bas que 30 % de l'espacement inter-porteuses. Les exigences en SNR d'entrée en fonction du décalage Doppler ont été calculées pour un PSLR donné et le filtre WF offre le meilleur compromis. Les résultats peuvent être exploités pour le dimensionnement du système.

Références

- [1] Y. SIT, C. STURM, L. REICHARDT, T. ZWICK et W. WIESBECK, « The OFDM joint radar-communication system: An overview », in *International Conference on Advances in Satellite and Space Communications*, (Budapest, Hungary), p. 69–74, IARIA, avril 2011.
- [2] F. LIU, C. MASOUIROS, A. PETROPULU, H. GRIFFITHS et L. HANZO, « Joint radar and communication design: Applications, state-of-the-art, and the road ahead », *IEEE Transactions on Communications*, vol. 68, p. 3834–3862, juin 2020.
- [3] J. WANG, B. ZHANG et P. LEI, « Ambiguity function analysis for OFDM radar signals », in *International Conference on Radar*, p. 1–5, octobre 2016.
- [4] G.E.A. FRANKEN, H. NIKOOKAR et P. VAN GENDEREN, « Doppler tolerance of OFDM-coded radar signals », in *2006 European radar conference*, p. 108–111, 2006.
- [5] C. STURM, E. PANCERA, T. ZWICK et W. WIESBECK, « A novel approach to OFDM radar processing », in *2009 IEEE Radar Conference*, p. 1–4, 2009.
- [6] B. BENMEZIANE, J.-Y. BAUDAIS, S. MÉRIC et K. CINGLANT, « Comparison of ZF and MF filters through PSLR and ISLR assessment in automotive OFDM radar », in *European radar conference*, (Excel, London, UK), p. 1–4, avril 2022.
- [7] B. NUSS, J. MAYER et T. ZWICK, « Limitations of MIMO and multi-user access for OFDM radar in automotive applications », in *MTT-S International Conference on Microwaves for Intelligent Mobility*, p. 1–4, avril 2018.
- [8] S. KAISER, « On the performance of different detection techniques for OFDM-CDMA in fading channels », in *IEEE Global Communications Conference*, vol. 3, (Singapore), p. 2059–2063, novembre 1995.
- [9] R. ASH et C. DOLÉANS-DADE, *Probability and Measure Theory*. Academic Press, 2^e éd., 2000.