

Filtrage Particulaire sur Groupes de Lie

Clément CHAHBAZIAN¹, Karim DAHIA¹, Nicolas MERLINGE¹,
Bénédicte WINTER-BONNET², Aurélien BLANC², Christian MUSSO¹

¹ONERA, The French Aerospace Lab,
6 Chem. de la Vauve aux Granges, 91120 Palaiseau, France

²MBDA France,
1 Av. Réaumur, 92350 Le Plessis-Robinson, France

{clement.chahbazian ; nicolas.merlinge ; karim.dahia ; christian.musso}@onera.fr
{benedicte.winter-bonnet ; aurelien.blanc}@mbda-systems.com

Résumé – Les filtres particuliers sont une famille de méthodes numériques permettant de traiter des problèmes d’estimation non-linéaires et non-Gaussiens. Ils constituent un domaine de recherche actif. En particulier, les nouveaux travaux sur le filtre particulier dans les groupes de Lie présentés dans cet article démontrent des résultats numériques prometteurs. Les algorithmes proposés sont testés sur un scénario de navigation longue portée.

Abstract – Particle filters represent a class of methods which address nonlinear and non-Gaussian estimation problems. They are also an active field of research. Recent works on particle filters on Lie groups demonstrated promising results in nonlinear filtering. Thus, the works presented in this paper tackle particle filtering methods on Lie groups. The proposed algorithms are tested on long-range navigation scenarios.

1 Introduction

L’estimation non-linéaire est un problème récurrent dans de nombreuses applications industrielles et scientifiques. Le but de cette discipline est de décrire l’évolution d’un système stochastique en se basant sur un modèle prédictif et une séquence de mesures bruitées.

Les filtres particuliers permettent de résoudre ces problèmes dans des cas non-linéaires et non-Gaussiens. Pour cela, ils résolvent l’équation de Chapman-Kolmogorov et la formule de Bayes en approchant la densité de probabilité de l’état à estimer par une somme de distributions de Dirac pondérées, appelées communément particules.

Le ré-échantillonnage est une étape cruciale dans les filtres particuliers. Elle consiste à garantir une bonne répartition des poids affectés aux particules afin d’éviter la divergence du filtre. Des travaux de recherche ont mené au filtre Laplacien qui permet de robustifier cette étape en plaçant les particules dans les zones les plus probables.

En outre, les avancées récentes sur les filtres non-linéaires dans les groupes de Lie ont démontré la supériorité de ce type de géométrie en établissant des résultats théoriques et expérimentaux hors de portée des méthodes jusqu’alors utilisées. Leur intérêt principal est de permettre une meilleure représentation des variables non-linéaires.

Le travail présenté dans cet article aborde le problème du filtrage particulier dans les groupes de Lie avec un ré-échantillonnage Laplacien dans la lignée de travaux précédents sur le sujet [1] [2]. Cette méthode est comparée à un filtre particulier

de la littérature sur un scénario de navigation optimale avec des recalages Doppler. Dans tous les cas étudiés, le filtre proposé présente une nette amélioration en précision et en robustesse même pour un nombre réduit de particules.

2 Introduction aux groupes de Lie

Un groupe de Lie (G, \cdot) est une variété différentielle munie d’une structure de groupe [3]. L’espace tangent à l’élément identité du groupe est l’algèbre de Lie \mathfrak{g} . Il est possible de définir l’exponentielle de groupe $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$ et le logarithme de groupe $\log_G : G \rightarrow \mathfrak{g}$, qui dans le cas des groupes de Lie matriciels, forment un difféomorphisme au voisinage de l’identité. De plus, l’algèbre de Lie étant un espace vectoriel, il existe deux applications linéaires définies telles que :

$$[\cdot]^\wedge : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{g}, \text{ and } [\cdot]^\vee : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

et leur composition avec \exp_G et \log_G sont notées :

$$\exp_G([\cdot]^\wedge) = \exp_G^\wedge(\cdot); \log_G([\cdot]^\vee) = \log_G^\vee(\cdot). \quad (2)$$

Soit $(X, \widehat{X}) \in (G, \cdot)$ deux matrices. La loi de composition interne n’étant généralement pas commutative, l’erreur matricielle entre X et \widehat{X} peut se définir de deux façons : à droite $\eta^R = \widehat{X} \cdot X^{-1}$ et à gauche $\eta^L = X^{-1} \cdot \widehat{X}$.

Soit $\mu \in G$, $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, P)$ un vecteur Gaussien centré et P une matrice de covariance. Une variable aléatoire $X \in G$ suit

une loi normale concentrée dans G à gauche (resp. à droite) si :

$$\begin{aligned} \text{Gauche : } & X \sim \mathcal{N}_G^L(X; \mu, P); X = \mu \cdot \exp_G^\wedge(\epsilon). \\ \text{Droite : } & X \sim \mathcal{N}_G^R(X; \mu, P); X = \exp_G^\wedge(\epsilon) \cdot \mu. \end{aligned} \quad (3)$$

Cette définition n'est valable que lorsque la densité est *concentrée* autour de sa moyenne, plus formellement si les valeurs propres de la covariance P sont suffisamment petites [4]. Par souci de concision, cet article ne traite que le cas de densités et d'erreurs définies à gauche. L'adaptation aux cas à droite peut être réalisée avec des ajustements mineurs.

Soit $X \sim \mathcal{N}_G^L(\mu, P)$ une variable aléatoire dans G . La densité de probabilités d'une loi Gaussienne concentrée dans G s'écrit [5] :

$$p(X) \approx \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det[P]}} e^{-\frac{1}{2} \|\epsilon\|_P^2}, \quad (4)$$

où $\epsilon = \log_G^\vee(\mu^{-1}X)$ et $\|\cdot\|_P$ est la norme de Mahalanobis calculée par rapport à P .

3 Filtre particulaire sur groupes de Lie

3.1 Description du filtre

Cette section décrit le filtre particulaire Laplacien sur groupes de Lie. L'objectif est de déterminer l'évolution de $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in G$ étant donnée une séquence de mesures appartenant à un autre groupe de Lie $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in G'$, et selon le modèle d'états :

$$X_{k+1} = f(X_k, u_{k+1}, n_{q,k}), \quad (5)$$

$$y_{k+1} = h(X_{k+1}, n_{r,k+1}), \quad (6)$$

où u_{k+1} est un vecteur de commandes, $(n_{q,k}, n_{r,k})$ sont des bruits centrés et (f, h) deux fonctions non-linéaires. Le filtre particulaire estime la densité de probabilité a posteriori $p(X_k) \triangleq p(X_k | y_{1:k})$ en l'approchant par un échantillon de N_p particules pondérées $\{X_k^i, w_k^i\}_{i=1:N_p} \in G \times \mathbb{R}$:

$$p(X_k) \approx \sum_{i=1}^{N_p} w_k^i \delta_{X_k^i}(X_k). \quad (7)$$

Lorsqu'une entrée u est disponible, les particules sont propagées selon (5) :

$$X_{k+1}^i = f(X_k^i, u_{k+1}, n_{q,k}^i) \forall i \in [1, N_p], \quad (8)$$

estimant la densité prédite : $q(X_{k+1}) \triangleq p(X_{k+1} | y_{1:k})$.

Quand une mesure est disponible, les poids sont mis à jour en utilisant la vraisemblance $g(X_{k+1}) \triangleq p(y_{k+1} | X_{k+1})$ du modèle de mesure :

$$w_{k+1}^i \propto w_k^i g(X_{k+1}^i) \forall i \in [1, N_p], \quad (9)$$

Après quelques étapes de mise à jour, la majorité des poids des particules tendent vers zéro alors que le poids des plus probables tendent vers un. Ce phénomène, appelé dégénérescence des poids, est contrôlé par le critère [6] :

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_p} (w^i)^2}. \quad (10)$$

Lorsque N_{eff} passe sous un seuil N_{th} déterminé par l'utilisateur, une étape de ré-échantillonnage est initiée afin de redistribuer les particules dans les zones les plus probables. Après ce procédé les poids sont ré-initialisés à $\frac{1}{N_p}$.

3.2 Filtre particulaire Laplacien

Les méthodes de ré-échantillonnage classiques se basent principalement sur les poids de la densité a priori pour générer les nouvelles particules. Cette approche a pour défaut de ne pas prendre en compte les informations données par la dernière mesure, et peut mener à la divergence du filtre dans des cas d'estimation difficile. Ainsi, le principe du filtre particulaire Laplacien (LPF) est de ré-échantillonner les particules selon une densité d'importance notée $\tilde{q}(X; X^L, P^L)$, et dont les moments X^L et P^L sont proches de la densité a posteriori [7]. Cette approche permet un gain notable en précision et en robustesse. Dans la pratique, \tilde{q} est une Gaussienne dont la moyenne est le Maximum a Posteriori (MAP) noté X^* et la covariance l'inverse de la matrice d'information de Fisher, notée J^* .

En supposant que la densité a priori q et la vraisemblance g ont

Algorithm 1: Filtre de Kalman itéré sur groupes de Lie (iLG-EKF).

Inputs : $\mu, X^0, \delta^0, \tau, P;$

while $\|\delta^l - \delta^{l-1}\| \geq \tau$ **do**

$$\left. \begin{aligned} H_l &= - \frac{\log_{G'}(\partial h(X^l \exp_G^\wedge(\epsilon))^{-1} y_{k+1})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \\ K_l &= P \phi_G^T(\delta^l) H_l^T [H_l \phi_G(\delta^l) P \phi_G^T(\delta^l) H_l^T + R]^{-1} \\ \delta^{l+1} &= K_l (\log_{G'}^\vee(y_{k+1}^{-1} h(X^l)) + H_l \delta^l) \\ X^{l+1} &= \mu \exp_G^\wedge(\delta^{l+1}) \end{aligned} \right\}$$

end

Après convergence :

$$X^* = X^l$$

$$J^* = [\phi_G(\delta^l)(Id - K_l H_l \phi_G(\delta^l)) P \phi_G(\delta^l)]^{-1}$$

un mode prédominant, une bonne approximation de X^* et de J^* est obtenue grâce à un filtre de Kalman itéré (iLG-EKF) [1] détaillé dans l'Algorithme 1 [8] [5]. Cette approche pose un cadre de travail simplifié pour le filtre Laplacien car sa mise en œuvre nécessite seulement le calcul de H , la Jacobienne du modèle de mesure dans le groupe.

Une fois la densité d'importance \tilde{q} obtenue, un nouvel échantillon de particules est généré :

$$X_{k+1}^i \sim \tilde{q}(X_{k+1}; X_{k+1}^*, (J_{k+1}^*)^{-1}), \forall i \in [1, N_p], \quad (11)$$

et les poids sont mis à jour :

$$w_{k+1}^i \propto \frac{g(X_{k+1}^i) q(X_{k+1}^i)}{\tilde{q}(X_{k+1}^i)}, \forall i \in [1, N_p]. \quad (12)$$

Le filtre Laplacien sur groupes de Lie (LG-LPF) est résumé dans l'Algorithme 2. Il s'inscrit donc dans la continuité de [9] en proposant une formulation sur groupes de Lie avec un calcul simplifié de la fonction d'importance.

Algorithm 2: Filtre particulière Laplacien sur groupes de Lie (LG-LPF)

Result: $\widehat{X}_{0:T}$ and $\widehat{P}_{0:T}$

Initialization : sample $X_0^i \sim \mathcal{N}(X; \widehat{X}_0, \widehat{P}_0)$ (3);

Prediction : $X_{k+1|k}^i = f(X_k^i, u_{k+1}, n_{q,k}^i)$, $i \in [1, N_p]$

Update : $w_{k+1}^i \propto w_k^i g(X_{k+1|k}^i)$

Compute : $\widehat{X}_{0:T}$ and $\widehat{P}_{0:T}$ [1]

if $N_{eff} < N_{th}$ **then**

Compute : X_{k+1}^* , J_{k+1}^* from Algorithm 1

Drawn :

$X_{k+1}^i \sim \tilde{q}(X_{k+1}; X_{k+1}^*, (J_{k+1}^*)^{-1})$, $i \in [1, N_p]$

Weight update : (12).

end

4 Application au recalage de navigation inertielle

4.1 Modélisation

Un système de navigation estime la position, la vitesse et l'orientation d'un mobile au cours du temps. Il se base sur une centrale inertielle qui mesure à haute fréquence la vitesse de rotation ω_{eb}^b et l'accélération f_{eb}^b du référentiel du véhicule $[\mathbf{b}]$ par rapport au référentiel terrestre $[\mathbf{e}]$ supposé inertiel. Ces grandeurs sont intégrées au cours du temps selon l'équation cinématique :

$$\begin{cases} \dot{C}_b^e = C_b^e [\omega_{eb}^b]_{\times}, \\ \dot{v}_{eb}^e = C_b^e f_{eb}^b + g^e, \\ \dot{x}_{eb}^e = v_{eb}^e, \end{cases} \quad (13)$$

où C_b^e représente la matrice de rotation du référentiel $[\mathbf{b}]$ vers $[\mathbf{e}]$, $[u]_{\times}$ la matrice produit vectoriel de u , et v_{eb}^e , x_{eb}^e sont respectivement la vitesse et la position de $[\mathbf{b}]$ par rapport à $[\mathbf{e}]$ exprimées dans $[\mathbf{e}]$. Enfin, g^e est le vecteur de gravité supposé constant. Un drone effectue une trajectoire manœuvrante et observe les signaux provenant de N_e émetteurs fixes situés au sol. En supposant que la fréquence f_0^n et la position p^n de chaque émetteur sont connues, le capteur mesure le décalage Doppler Δf^n tel que :

$$\Delta f^n = \frac{f_0^n}{c} (\vec{v}_{eb}^e \cdot \vec{e}^n), \quad (14)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide et \vec{e}^n représente le vecteur unitaire de la ligne de visée du véhicule vers l'émetteur n :

$$\vec{e}^n = \frac{\vec{p}^n - \vec{x}_{eb}^e}{\|\vec{p}^n - \vec{x}_{eb}^e\|}. \quad (15)$$

4.2 Implémentation pratique

Les variables d'état estimées sont la matrice de rotation représentant l'attitude du drone, le vecteur vitesse, et le vecteur position. Un groupe de Lie matriciel se prêtant bien à cette re-

présentation est $SE_2(3)$:

$$SE_2(3) = \left\{ M = \begin{bmatrix} C & u_1 & u_2 \\ 0_{1,3} & 1 & 0 \\ 0_{1,3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| C \in SO(3), u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3 \right\}, \quad (16)$$

et $SO(3)$ est tel que :

$$SO(3) = \left\{ C \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid CC^T = Id_3, \det[C] = 1 \right\}. \quad (17)$$

En notant l'indice temporel k à la matrice d'états :

$$X_k = \begin{pmatrix} C_{b,k}^e & v_{be,k}^e & x_{be,k}^e \\ 0_{1,3} & 1 & 0 \\ 0_{1,3} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

La propagation des particules se base sur la discrétisation de (8) et le modèle de mesure pour le n^{eme} émetteur se base sur (15) :

$$h^n(X) = \frac{f_0^n}{c} \left(\vec{v}_{eb}^e \cdot \frac{\vec{p}_{eb}^e - \vec{x}_{eb}^e}{\|\vec{p}_{eb}^e - \vec{x}_{eb}^e\|} \right). \quad (19)$$

La Jacobienne à gauche pour le n^{eme} émetteur s'écrit :

$$H^n = \left[0_{1,3}, \frac{(\Delta^n)^T}{\|\Delta^n\|} C_b^e, -J_{\Delta^n} C_b^e \right], \quad (20)$$

avec $\Delta^n \triangleq p_{eb}^{e,n} - x_{eb}^e = [\Delta_x^n, \Delta_y^n, \Delta_z^n]^T$ le vecteur orienté du mobile vers le point fixe, et J_{Δ^n} tel que :

$$J_{\Delta^n}^n = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_x^n}{\|\Delta^n\|} - \frac{(\Delta_x^n)^2}{\|\Delta^n\|^3} & -\frac{\Delta_x^n \Delta_y^n}{\|\Delta^n\|^3} & -\frac{\Delta_x^n \Delta_z^n}{\|\Delta^n\|^3} \\ -\frac{\Delta_x^n \Delta_y^n}{\|\Delta^n\|^3} & \frac{\Delta_y^n}{\|\Delta^n\|} - \frac{(\Delta_y^n)^2}{\|\Delta^n\|^3} & -\frac{\Delta_y^n \Delta_z^n}{\|\Delta^n\|^3} \\ -\frac{\Delta_x^n \Delta_z^n}{\|\Delta^n\|^3} & -\frac{\Delta_y^n \Delta_z^n}{\|\Delta^n\|^3} & \frac{\Delta_z^n}{\|\Delta^n\|} - \frac{(\Delta_z^n)^2}{\|\Delta^n\|^3} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Finalement, la fonction du modèle de mesure et sa Jacobienne s'écrivent :

$$h(X) = \begin{pmatrix} h^1(X) \\ \dots \\ h^{N_e}(X) \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} H^1 \\ \dots \\ H^{N_e} \end{pmatrix} \quad (22)$$

4.3 Résultats numériques

Les paramètres de la simulation sont présentés dans la Table 1. On compare l'approche proposée dans cet article avec un filtre particulière Laplacien (LPF) dont la seule différence est de représenter les variables estimées dans l'espace Euclidien.

La Table 2 présente les RMSE moyens calculés sur les dix dernières secondes de simulation pour les simulations Monte-Carlo convergentes. Les définitions de ces grandeurs sont données dans [1] et la trajectoire suivie est analogue à [2]. Ces résultats montrent une supériorité nette du LG-LPF par rapport au LPF, notamment avec un nombre de particules significativement plus faible. Ce résultat présente un intérêt particulier dans les cas où les ressources de calculs sont limitées (e.g. systèmes embarqués).

Le RMSE du LG-LPF est tracé et comparé à la borne de Cramer-Rao (CRLB) pour différents nombres de particules dans la Figure 1 et pour les simulations convergentes. Celui-ci montre que le LG-LPF est quasiment optimal en vitesse, tangage et cap dès 500 particules. Enfin, les pics sur la vitesse sont dus à une fréquence d'intégration trop faible lors des phases de dynamique rapide. Le LG-LPF démontre une bonne robustesse par rapport à ces erreurs.

5 Conclusion

Le filtre particulaire Laplacien sur groupe de Lie (LG-LPF) proposé dans cet article, a été testé sur un scénario de navigation par mesures Doppler en présence de grandes incertitudes initiales et de fortes non-linéarités. Celui-ci présente des performances supérieures en précision et en robustesse par rapport à son équivalent Euclidien (LPF), même pour un nombre de particules nettement plus faible. Les travaux futurs porteront sur le calcul précis de la matrice de Fisher dans les groupes de Lie et sur des cas d'application plus complexes.

TABLE 1 – Paramètres de la simulation

Capteurs			
	Bruit (1σ)	Fréquence	
Accéléromètre	10^{-3} m/s	100Hz	
Gyromètre	2° /h	100Hz	
Doppler	5 m/s	1Hz	
Filtre			
(1σ)	Attitude	Position	Vitesse
Incertitude initiale	0.6°	500 m	10 m/s
Bruit modèle	2° /h	0 m	10^{-2} m/s
Bruit mesure	Doppler	10 m/s	
Seuil N_{th}	$0.1N_p$		

TABLE 2 – Résultats de la simulation : taux de convergence et RMSE moyen sur les 10 dernières secondes de vol.

Filtres	LG-LPF			LPF	
	N_p	500	1000	1000	5000
Position (m)		33.6	30.1	23.6	248.5
Vitesse (m/s)		0.81	0.66	0.48	6.26
Roulis ($^\circ$)		0.612	0.459	0.313	0.655
Tangage ($^\circ$)		0.118	0.087	0.072	0.562
Cap ($^\circ$)		0.123	0.114	0.077	0.587
Taux convergence		85%	89%	97%	57%
				69%	

Références

- [1] C. Chahbazian, N. Merlinge, K. Dahia, B. Winter-Bonnet, J. Marini, and C. Musso, "The Laplace particle filter on Lie groups applied to angles-only navigation." *IEEE International Conference on Information Fusion*, 2021.
- [2] C. Chahbazian, K. Dahia, N. Merlinge, B. Winter-Bonnet, K. Honore, and C. Musso, "Improved Kalman-Particle Kernel Filter on Lie Groups Applied to Angles-Only Navigation." *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2022.
- [3] J. Hilgert and K.-H. Neeb, *Structure and Geometry of Lie Groups*, 2011.
- [4] G. Chirikjian and M. Kobilarov, "Gaussian approximation of non-linear measurement models on Lie groups," *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 6401–6406, 2014.

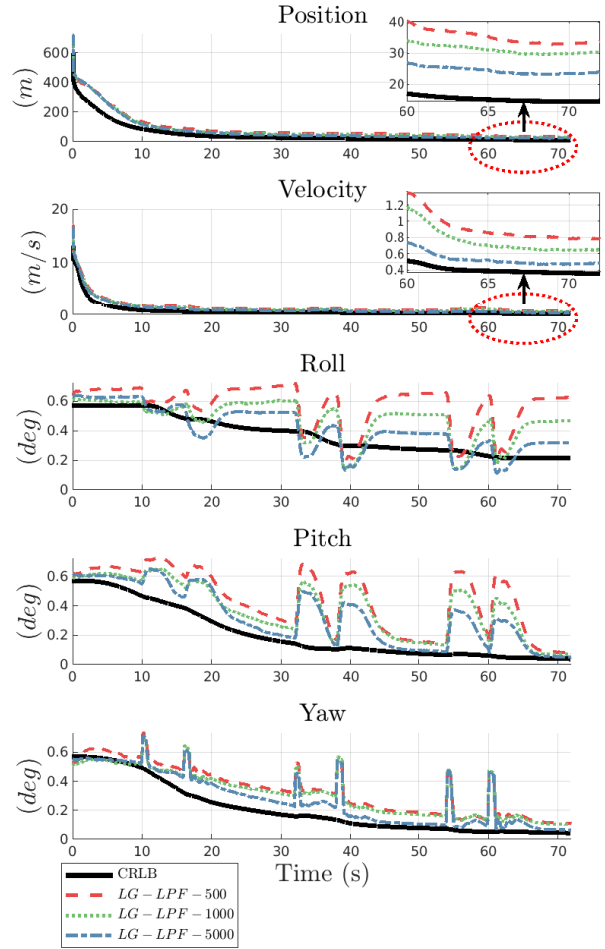


FIGURE 1 – Tracé du RMSE du LG-LPF pour les simulations Monte-Carlo convergentes et de la borne de Cramer-Rao a posteriori.

- [5] G. Bourmaud, "Estimation de paramètres évoluant sur des groupes de Lie : application à la cartographie et à la localisation d'une caméra monoculaire." Ph.D. dissertation, Université de Bordeaux, 2015.
- [6] A. Kong, J. S. Liu, and W. Wong, "Sequential imputations and Bayesian missing data problems," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 89, pp. 278–288, 1994.
- [7] P. B. Quang, C. Musso, and F. Gland, "Particle filtering and the Laplace method for target tracking," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 52, pp. 350–366, 2016.
- [8] G. Bourmaud, R. Mégret, A. Giremus, and Y. Berthoumiou, "From intrinsic optimization to iterated extended Kalman filtering on Lie groups," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 55, pp. 284–303, 2015.
- [9] A. Murangira, C. Musso, and K. Dahia, "A mixture regularized rao-blackwellized particle filter for terrain positioning," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 52, pp. 1967–1985, 2016.