Optimisation Rapide du Filtre Désadapté pour des Problèmes à Grande Échelle: Cas de l'Imagerie Radar

Maria-Elisavet Chatzitheodoridi, Abigael Taylor, Olivier Rabaste, Hélène Oriot

DEMR, ONERA, Université Paris-Saclay, F-91123 Palaiseau - France
prenom.nom@onera.fr

Résumé – L'atténuation des lobes secondaires est un critère essentiel pour avoir de bonnes performances en radar. Elle peut être obtenue par l'utilisation d'un filtre désadapté, solution d'un problème d'optimisation convexe, qui minimise l'énergie moyenne des lobes secondaires. Cependant, l'optimisation d'un tel filtre peut être coûteuse, surtout pour des problèmes à grande échelle. Ainsi, cet article propose un algorithme rapide pour calculer le filtre désadapté optimal qui minimise le niveau intégré de lobes secondaires, fondé sur l'optimisation du problème dual. Le temps de calcul résultant montre une amélioration spectaculaire du temps d'exécution de la méthode proposée en comparaison avec la Toolbox Matlab *CVX*. Cette méthode est appliquée à un système conjoint *SAR*-communication qui utilise des codes de communication pour générer une image *SAR*.

Abstract – Sidelobe mitigation is an essential criterion for good radar performance. It can be obtained by using a mismatched filter, solution of a convex optimization problem, which minimizes the integrated sidelobe level energy. However, the optimization of such a filter can be costly, especially for large scale problems. Thus, this paper proposes a fast algorithm to compute the optimal mismatched filter that minimizes the integrated sidelobe level, based on the optimization of the dual problem. The resulting computational time shows a dramatic improvement in the execution time of the proposed method compared to the Matlab Toolbox *CVX*. This method is applied on a joint *SAR*-communication system that uses communication codes to generate a *SAR* image.

1 Introduction

En radar, la technique de compression d'impulsion la plus courante est le filtre adapté (*FA*) qui vise à maximiser le rapport signal à bruit (*SNR*) [1]. Cependant, des lobes secondaires potentiellement forts sont créés par le *FA* en présence de cibles fortes, ce qui peut empêcher la détection de cibles plus faibles [2]. Dans ce cas, le contrôle du niveau des lobes secondaires est nécessaire et peut être réalisé en utilisant un filtre différent, qui minimise par exemple l'énergie des lobes secondaires. Ces filtres sont appelés filtres désadaptés (*FD*). Il existe une littérature détaillée sur leur optimisation en utilisant différents critères et paramètres de minimisation [3–7]. Pour des signaux échantillonnés, le *FD* peut être obtenu comme solution optimale d'un problème d'optimisation convexe. Le choix de la fonction de coût de ce problème dépend de l'application radar considérée, le rapport lobe principal-lobe secondaire (*PSL*) et le niveau de lobes secondaires intégré (*ISL*) étant les critères les plus souvent utilisés [4–6]. Dans cet article, on considère un radar à ouverture synthétique (*SAR*), pour lequel les signatures des réflecteurs potentiellement nombreux s'additionnent et peuvent générer des lobes secondaires forts. Pour cette raison, l'*ISL* sera le critère utilisé pour la création du problème d'optimisation convexe.

De nombreux articles traitent de la suppression des lobes secondaires [3, 6, 8] en utilisant la Toolbox Matlab *CVX* : Matlab Software for Disciplined Convex Programming [9] pour résoudre les problèmes d'optimisation convexe. Cependant, comme mentionné dans [9], ce solveur n'est pas recommandé pour des problèmes à grande échelle en raison du coût de calcul. Plus précisément, le problème considéré ici implique plusieurs milliers d'impulsions, toutes différentes les unes des autres, chacune contenant quelques milliers d'échantillons. Le coût de calcul global avec *CVX* pour la génération de tous les filtres optimaux est alors estimé à plusieurs années ! Il est donc essentiel de proposer une méthode rapide de résolution de ce problème convexe, adapté aux problèmes à grande échelle.

Nous montrons dans cet article que le problème convexe primal peut être résolu efficacement via le problème dual associé, dans le cas de la minimisation du critère *ISL*. On montre en particulier que la résolution du problème primal, contenant plusieurs milliers de variables, peut se réécrire sous la forme d'un simple problème d'optimisation mono-dimensionnel dans l'espace dual, qui peut être facilement résolu par un algorithme de type Newton-Raphson.

Les résultats montrent que le temps de calcul de l'algorithme proposé est considérablement amélioré, même pour un seul calcul de filtre de grande taille. Ainsi, le gain en temps de calcul, pour quelques milliers de filtres, est drastiquement réduit. De plus, on considère un exemple de création d'un système joint *SAR*-communication qui permet de générer une image *SAR* re-synthétisée obtenue avec plusieurs signaux modulés continûment en phase et ses *FD* optimaux associés.

Le reste de cet article est organisé de la façon suivante, dans la section 2, la définition du *FD* est rappelée, afin de permettre dans la section 3 d'introduire la solution d'optimisation proposée, en passant par le problème dual. La section 4 présente les performances de calcul de l'algorithme proposé en comparaison avec le solveur *CVX*, ainsi qu'une image *SAR* générée en utilisant des codes de communications. Enfin, la section 5 conclut cet article.

2 Définition du Filtre Désadapté

Soit $\mathbf{s}$ un signal échantillonné de longueur N,

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_N \end{bmatrix}^T, \quad (1)$$

où $.^T$ est l'opérateur de transposition.

Le signal reçu est corrélé avec un *FD* $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^K$ afin de comprimer l'impulsion tout en contraignant l'énergie des lobes secondaires. La longueur K du *FD* peut être égale ou supérieure à la longueur du signal ($K \geq N$) et elle est de l'ordre de quelques milliers d'échantillons. Le signal résultant peut alors être exprimé comme [3],

$$\mathbf{y} = \overline{\mathbf{\Lambda}}_K(\mathbf{s})\,\mathbf{q}, \quad (2)$$

où $\mathbf{\Lambda}_K$ est la matrice de corrélation de $\mathbf{s}$ de taille $(K + N - 1) \times K$, et $\overline{\mathbf{\Lambda}}_K$ est son complexe conjugué.

Comme mentionné en introduction, le critère considéré pour notre application sera l'*ISL* et le problème peut s'exprimer comme un problème de minimisation de norme L_2 [3] :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{q}} \quad & \mathbf{q}^H\mathbf{M}\mathbf{q}, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{s}^H\mathbf{q} = \mathbf{s}^H\mathbf{s}, \\ & \mathbf{q}^H\mathbf{q} \leq 10^{\frac{\beta}{10}}\mathbf{s}^H\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (3)$$

où $\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda}_K^T(s)\mathbf{F}\overline{\mathbf{\Lambda}}_K(s)$ est une matrice positive symétrique semi-définie, $\mathbf{F}$ est une matrice diagonale dont la diagonale est composée de uns à l'exception de quelques valeurs nulles correspondant aux indices de position du lobe principal et β est une constante positive en dB exprimant la perte de traitement. Cette valeur représente la perte maximale tolérée pour le filtre par rapport au *FA* [3].

Comme montré dans [3], la fonction objectif et les contraintes sont toutes convexes. Le problème (3) pourrait alors être résolu à l'aide d'un solveur convexe, tel que *CVX* [9]. Or, le nombre de variables qui doit être déterminé à l'aide de *CVX* est au moins de l'ordre de la taille du filtre et le coût de calcul du problème croît énormément. Notre problème étant de grande échelle, le coût de calcul engendré par *CVX* devient rédhibitoire, et il est nécessaire de le résoudre autrement.

3 Optimisation Rapide du Filtre Désadapté

Ainsi, la solution proposée consiste à considérer le problème dual de ce problème (3). La fonction Lagrangienne, est définie par [10],

$$\begin{aligned} & L(\mathbf{q}, \lambda, \nu) \\ & = -\lambda\alpha\mathbf{s}^H\mathbf{s} - \nu\mathbf{s}^H\mathbf{s} \quad + \quad \mathbf{q}^H(\mathbf{M} + \lambda\mathbf{I})\mathbf{q} + \nu\mathbf{s}^H\mathbf{q}, \end{aligned} \quad (4)$$

où $\alpha = 10^{\frac{\beta}{10}}$, $\lambda \geq 0$ et $\nu \in \mathbb{R}$.

La fonction duale du problème est alors donnée par,

$$g(\lambda, \nu) = \inf_{\mathbf{q}} L(\mathbf{q}, \lambda, \nu) = L(\mathbf{q}^\star, \lambda, \nu).$$

Le filtre optimal est donc trouvé en annulant le gradient par rapport à $\mathbf{q}$ de la fonction Lagrangienne,

$$\nabla_{\mathbf{q}} L(\mathbf{q}^\star, \lambda, \nu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}^\star = -\frac{1}{2}\nu(\mathbf{M} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{s}. \quad (5)$$

Après avoir injecté la solution (5) dans la fonction Lagrangienne (4), on obtient

$$g(\lambda, \nu) = -\lambda\alpha\mathbf{s}^H\mathbf{s} - \nu\mathbf{s}^H\mathbf{s} - \frac{1}{4}\nu^2\mathbf{s}^H(\mathbf{M} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{s}. \quad (6)$$

Puisque g est concave [10] et polynomiale en ν, la valeur optimal $\nu^\star$ peut donc être trouvé analytiquement en annulant le gradient par rapport à ν,

$$\frac{\partial g}{\partial \nu}(\lambda, \nu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu^\star = -\frac{2\mathbf{s}^H\mathbf{s}}{\mathbf{s}^H(\mathbf{M} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{s}}. \quad (7)$$

Ensuite, on injecte l'équation (7) dans l'équation (6), afin de fournir une fonction g qui ne dépend que de la variable λ. Notre problème revient alors à résoudre numériquement un problème d'optimisation mono-dimensionnel d'une fonction concave, exprimée comme,

$$g(\lambda) = \max_{\nu} g(\lambda, \nu) = -\lambda\alpha\mathbf{s}^H\mathbf{s} + \frac{(\mathbf{s}^H\mathbf{s})^2}{\mathbf{s}^H(\mathbf{M} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{s}}.$$

La valeur optimale $\lambda^\star$ peut être trouvée numériquement en utilisant la méthode itérative de Newton-Raphson [11], exprimée comme,

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{g'(\lambda_k)}{g''(\lambda_k)}. \quad (8)$$

Les dérivées première et seconde de la fonction g par rapport à la variable λ doivent être calculées, afin d'exécuter l'algorithme itératif en utilisant la formule (8). Pour simplifier les calculs, on note,

$$h(\lambda) = \mathbf{s}^H(\mathbf{M} + \lambda\mathbf{I})^{-1}s \quad (9)$$

Les dérivées de g dépendent alors de la fonction h, et de ses dérivées première h' et seconde h''. Cela signifie qu'à chaque itération, la fonction h et ses dérivées associées doivent être calculées, ce qui conduit à des calculs de matrice inverse. Afin d'éviter ces inversions à chaque étape de l'algorithme, une décomposition en valeurs propres de $\mathbf{M}$ est effectuée. Plus précisément, $\mathbf{M}$ peut être écrite comme $\mathbf{M} = \mathbf{P}^H\mathbf{D}\mathbf{P}$, avec $\mathbf{P}$ une matrice carrée, $\mathbf{D}$ une matrice diagonale. La fonction h s'écrit alors,

$$h(\lambda) = \mathbf{s}^H\mathbf{P}^H\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\mathbf{d} + \lambda}\right)\mathbf{P}\mathbf{s}, \quad (10)$$

où $\mathbf{d}$ est le vecteur qui détermine les éléments diagonaux de la matrice $\mathbf{D}$, et en ce cas le terme inverse peut être facilement calculé.

De même, les dérivées première et seconde de la fonction h de l'équation (10) peuvent être exprimées après avoir effectué la décomposition en valeurs propres, comme,

$$h^{(i)}(\lambda) = \mathbf{s}^H \mathbf{P}^H \mathrm{diag}\left((-1)^i \frac{i}{(\mathbf{d}+\lambda)^{i+1}} \right) \mathbf{P}\mathbf{s},$$

avec $i = \{1, 2\}$. L'avantage de cette écriture est que la matrice carrée $\mathbf{P}$ et la matrice diagonale $\mathbf{D}$ peuvent être calculées une seule fois pour le problème d'optimisation et la fonction h exprimée dans (10) et ses dérivées ne sont finalement calculées qu'en effectuant des multiplications et aucune inversion de matrice au cours des itérations.

Cette méthode permet ainsi de maximiser de manière peu coûteuse le problème dual. Toutefois cela ne garantit pas a priori d'avoir obtenu la solution optimale du problème primal. Afin de garantir que la paire optimale $(\lambda\ , \nu\ )$ du problème dual coïncide avec la solution optimale du problème primal (3), la dualité forte doit s'appliquer. Cette dualité forte est assurée lorsque le problème primal est convexe et que les contraintes de Slater sont vérifiées [10]. La première condition est justifiée dans la section 2. La deuxième est vérifiée s'il existe un x_0 relint (D), avec relint (D) l'intérieur relatif de D, et D l'ensemble des solutions réalisables du problème primal, tel que la contrainte d'égalité est vérifiée et la contrainte d'inégalité est strictement vérifiée. En considérant $x_0 = s$, qui correspond au *FA*, ces contraintes sont vérifiées.

Finalement, le couple optimal $(\lambda\ , \nu\ )$ étant calculé, le filtre optimal est explicité, à l'aide de l'expression (5), et la dualité forte garantit qu'il est bien solution optimale du problème primal (3).

4 Simulations et Résultats

Cette section est consacrée à la comparaison du coût de calcul entre l'algorithme proposé et le solveur *CVX*. Ensuite, des images *SAR* re-synthétisées sont fournies, créées à partir de codes de communications et de leurs *FD* associés. Plus précisément, les codes *CPFSK* (continuous phase frequency-shift keying) [12], une famille de codes modulés continûment en phase, sont choisis pour leurs propriétés intéressantes en radar, telles que l'enveloppe constante, la phase continue et une énergie spectrale bien contenue [13].

Dans notre cas, 6522 impulsions sont transmises. De plus, chaque impulsion est de $N = 3000$ échantillons, et on choisit la longueur du *FD* comme $K = 3N$ qui correspond à un filtre de longueur $K = 9000$. Le choix de filtres plus longs permet d'obtenir une énergie de lobes secondaires inférieure à celle obtenue avec des filtres de même longueur de signal [14, 15].

Le tableau 1 montre le temps de calcul de la méthode proposée et du solveur *CVX* pour un *FD* et pour l'ensemble des *FD* générés. Bien que les solutions des filtres fournis par les deux méthodes coïncident, leur différence de temps de calcul est énorme. Le coût de calcul d'un filtre en utilisant notre méthode est estimé à 3.48 minutes, contre 14.5 heures pour l'algorithme *CVX*. Extrapolé aux 6522 signaux nécessaires pour la formation de l'image *SAR*, ce temps de calcul serait égal à 11 ans. Au contraire, la solution proposée permet d'obtenir les 6522 *FD* en moins de 16 jours. Ces résultats montrent que l'algorithme proposé fournit un gain en temps de calcul d'un facteur 250 par rapport au solveur *CVX*.

Nombre de filtres	**Algorithme Proposé**	***CVX***	Ratio
1 6522	3.48 minutes 15.8 jours	14.5 heures ≈ 11 ans	249.7

TABLE 1 – Coût de calcul de la méthode proposée et du solveur *CVX*.

Après avoir calculé les *FD* des signaux de communications *CPFSK*, on génère des image *SAR* re-synthétisées et leurs réponses impulsionnelles associées, avec la méthode décrite dans [16]. La figure 1 représente d'abord les réponses impulsionnelles d'un signal chirp et des codes *CPFSK* compressés avec les *FA* ou *FD* sur un diffuseur ponctuel unique, puis les images *SAR* re-synthétisées correspondantes.

La figure 1a représente la réponse impulsionnelle et l'image *SAR* du chirp et elle est utilisée comme référence de comparaison pour le reste des images. A noter que le chirp, qui est usuellement utilisé pour le *SAR*, ne peut pas transmettre d'information. Les figures 1b & 1c illustrent les réponses impulsionnelles et les images *SAR* re-synthétisées des *CPFSK* utilisant respectivement un filtrage adapté ou désadapté. En comparant les réponses impulsionnelles des sous-figures 1b & 1c, celle générée avec les *FD* fournit une énergie de lobes secondaires globalement plus faible et plus diffuse par rapport à celle générée avec les *FA*. En raison du grand nombre de signaux transmis, l'énergie des lobes secondaires est répartie dans le plan 2D et pas seulement dans les directions de l'axe distance et azimut du trièdre, comme le montre le cas de la réponse impulsionnelle du chirp (sous-figure 1a). Cet effet peut réduire les lobes secondaires élevés dans les directions distance et azimut mais peut potentiellement créer des zones plus floues sur l'image surtout aux endroits d'intensité faible.

L'image *SAR* générée avec des codes *CPFSK* et des *FD* (sous-figure 1c) est plus proche en termes de contraste avec celle générée par le chirp (sous-figure 1a). Cependant, le contraste de l'image chirp est meilleur, en raison de la décroissance des lobes secondaires. En comparant les images *SAR* générées avec des codes *CPFSK* et des *FA* (sous-figure 1b), et des *FD* (sous-figure 1c), nous pouvons remarquer que le niveau d'énergie dans le cas de la sous-figure 1b est plus élevé.