

# Tenseurs à valeurs quaternioniques : un objet mathématique à identifier\*

Julien FLAMANT<sup>1</sup>, Xavier LUCIANI<sup>2</sup>, Yassine ZNIYED<sup>2</sup>, Sebastian MIRON<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy, France

<sup>2</sup>Université de Toulon, Aix Marseille Université, CNRS, LIS, Toulon, France

{julien.flamant, sebastian.miron}@univ-lorraine.fr, {xavier.luciani, yassine.zniyed}@univ-tln.fr

**Résumé** – La notion de tenseur à valeurs quaternioniques revêt un intérêt récent pour l’analyse et le traitement de signaux 3D et 4D. Nous explicitons ici les difficultés théoriques relatives à la définition d’un tel objet mathématique, et proposons une solution permettant la conservation des propriétés algébriques tensorielles usuelles. Ce nouveau modèle autorise l’extension au cas quaternionique des décompositions tensorielles de Tucker et canonique polyadique. Pour cette dernière, nous introduisons un algorithme de type ALS dont la pertinence est validée numériquement.

**Abstract** – Quaternion-valued tensors are of recent interest for the analysis and processing of 3D and 4D signals. We explain here the theoretical difficulties related to the definition of such a mathematical object, and propose a solution allowing the preservation of the usual tensor algebraic properties. This new model allows the extension of Tucker and canonical polyadic decompositions to quaternion tensors. For the latter, we introduce an ALS-type algorithm whose relevance is numerically validated.

## 1 Introduction

Les quaternions sont une généralisation des nombres complexes en quatre dimensions, permettant une représentation naturelle géométrique et compacte des signaux multidimensionnels, en particulier 3D et 4D. De ce fait, les matrices à valeurs quaternioniques ont été utilisées avec succès en imagerie couleur, séparation de sources polarisées, traitement d’antenne vectorielle, etc. Cependant, on assiste ces dernières années à un accroissement de la complexité des données, qui requiert l’utilisation de modèles prenant explicitement en compte de multiples diversités : les tenseurs. Toutefois, malgré la popularité des représentations et modèles quaternioniques en traitement du signal/analyse des données, les travaux existants se limitent à considérer des tableaux multidimensionnels de quaternions, sans s’intéresser à la structure sous-jacente d’espace tensoriel [1, 2]. L’absence de définition pour les *tenseurs quaternioniques* peut en outre s’expliquer par la noncommutativité du produit quaternionique, ce qui interdit une extension directe des définitions classiques du cas réel ou complexe.

Après avoir explicité les difficultés inhérentes à la définition d’un tel objet mathématique, nous proposons une définition d’un tenseur quaternionique permettant la conservation d’un nombre maximum de propriétés usuelles du calcul tensoriel. Nous revisitons les principales décompositions tensorielles – Tucker et la décomposition Canonique Polyadique (CPD) – pour ce nouveau modèle. Enfin, nous introduisons un algorithme de type ALS pour l’estimation du modèle CPD, dont la pertinence est démontrée par une expérience numérique.

## 2 Vecteurs et matrices de quaternions

**Quaternions** L’ensemble des quaternions  $\mathbb{H}$  définit un corps de dimension 4 de base canonique  $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  où  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sont des nombres imaginaires purs tels que  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1$ ,  $\mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}$ . En particulier, ces relations montrent que  $\mathbb{H}$  est un corps non-commutatif, c’est à dire que  $pq \neq qp$  en général pour tout  $p, q \in \mathbb{H}$ . Tout quaternion s’écrit  $q = q_a + \mathbf{i}q_b + \mathbf{j}q_c + \mathbf{k}q_d$  où  $q_a, q_b, q_c, q_d \in \mathbb{R}$  sont les composantes de  $q$ . La partie réelle de  $q$  est  $\text{Re } q = q_a$  et sa partie imaginaire est  $\text{Im } q = \mathbf{i}q_b + \mathbf{j}q_c + \mathbf{k}q_d$ . Un quaternion est dit pur si  $\text{Re } q = 0$ . Le conjugué de  $q$  est défini par  $q^* = \text{Re } q - \text{Im } q$ . Son module est  $|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q^*q} = \sqrt{q_a^2 + q_b^2 + q_c^2 + q_d^2}$ . Tout quaternion  $q \neq 0$  admet un inverse donné par  $q^{-1} = q^*/|q|^2$ .

**Algèbre linéaire quaternionique** A l’instar des cas réel et complexe, les notions de vecteurs et matrices quaternioniques peuvent être définies en considérant des tableaux 1D et 2D de quaternions. Ainsi, un vecteur quaternionique  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^N$  de dimension  $N$  est défini par ses entrées  $(\mathbf{q})_i = q_i \in \mathbb{H}$ . De même, une matrice quaternionique  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{M \times N}$  a pour entrées  $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \in \mathbb{H}$ . Sa transposée est notée par  $\mathbf{A}^T$  et sa matrice adjointe est donnée par  $\mathbf{A}^H \triangleq (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$ . La définition du produit matriciel est toutefois compliquée par la noncommutativité du produit quaternionique. Étant donné deux matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{M \times N}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{N \times P}$ , on distingue ainsi deux types de produits matriciels – gauche et droit – définis par :

$$(\mathbf{A} \cdot_L \mathbf{B})_{ij} \triangleq \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj} \quad \text{et} \quad (\mathbf{A} \cdot_R \mathbf{B})_{ij} \triangleq \sum_{k=1}^N b_{kj} a_{ik}.$$

\*Travail soutenu par l’INS2I dans le cadre du projet TenQ (2022).

En particulier  $A \cdot_L B \neq A \cdot_R B$  en toute généralité. Ces deux produits vérifient différentes propriétés algébriques, dont les plus importantes sont [3] :

- transposition :  $(A \cdot_{L,R} B)^\top = B^\top \cdot_{R,L} A^\top$
- conjugaison :  $(A \cdot_{L,R} B)^* = A^* \cdot_{R,L} B^*$
- adjoint :  $(A \cdot_{L,R} B)^H = B^H \cdot_{L,R} A^H$

Pour plus de détails sur le sujet de l'algèbre linéaire quaternionique, on pourra se référer à [4] et références associées.

**Espaces vectoriels quaternioniques** Les quaternions  $\mathbb{H}$  formant un corps, l'extension de la notion d'espace vectoriel ne pose pas de problème particulier [5]. Toutefois, la noncommutativité du produit quaternionique impose de distinguer en espaces vectoriels à *gauche* et à *droite*, en fonction du côté où est appliqué l'opération de multiplication par un scalaire quaternionique. On notera ainsi par un indice  $L$  ou  $R$  les espaces quaternioniques gauche et droite, respectivement. Ainsi  $\mathbb{H}_L^M$  est un espace vectoriel quaternionique gauche de dimension  $M$  : pour tout  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}_L^M$  et tout  $\lambda \in \mathbb{H}$ , la linéarité à gauche implique  $\lambda \mathbf{q} \in \mathbb{H}_L^M$ . Le même raisonnement s'applique pour l'espace quaternionique à droite  $\mathbb{H}_R^M$ , où  $\forall \mathbf{q} \in \mathbb{H}_R^M, \forall \lambda \in \mathbb{H}, \mathbf{q} \lambda \in \mathbb{H}_R^M$ .

### 3 Tenseurs quaternioniques : définitions et propriétés

**Multilinéarité quaternionique : une chimère ?** Considérons  $D$  espaces vectoriels quaternioniques  $\mathcal{S}_d, 1 \leq d \leq D$ , sans spécifier leur linéarité à *gauche* ou à *droite* pour le moment. Soit  $f : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \dots \times \mathcal{S}_D \rightarrow \mathbb{H}$  une fonction de  $D$  variables quaternioniques à valeurs sur  $\mathbb{H}$ . Si à présent on cherche à se restreindre à des fonctions  $f$  multilinéaires, c'est à dire telle que  $f$  est linéaire en chacune des variables quaternioniques, plusieurs problèmes apparaissent. Pour les illustrer, considérons le cas simplifié  $D = 3$  et supposons  $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  linéaire à gauche en chaque argument, c'est-à-dire  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{H}, \forall \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \alpha f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + \beta f(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \quad (1)$$

$$f(\mathbf{x}_1, \alpha \mathbf{x}_2 + \beta \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3) = \alpha f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + \beta f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3) \quad (2)$$

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \alpha \mathbf{x}_3 + \beta \mathbf{y}_3) = \alpha f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + \beta f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_3) \quad (3)$$

L'évaluation de  $f(\alpha \mathbf{x}_1, \beta \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$  pose alors aussitôt problème. En effet, l'ordre dans lequel les propriétés de linéarité (1) – (3) sont appliquées mène à des résultats différents. Invoquer (1) puis (2) donne  $f(\alpha \mathbf{x}_1, \beta \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \alpha \beta f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ , et l'ordre inverse donne  $f(\alpha \mathbf{x}_1, \beta \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \beta \alpha f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ . En raison de la noncommutativité du produit dans  $\mathbb{H}$ , on a alors  $\alpha \beta \neq \beta \alpha$  et donc  $\beta \alpha f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \neq \alpha \beta f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ , ce qui n'est pas satisfaisant. Les mêmes conclusions négatives sont observées si l'on choisit tout autre couple de variables ou si l'on considère  $f$  linéaire à droite en chaque argument. L'impossibilité d'une définition générale de la notion de multilinéarité quaternionique est l'une des raisons centrales expliquant l'absence d'une théorie globale des tenseurs à valeurs quaternioniques.

### Une classe générale de formes linéaires quaternioniques

Pour pallier ce problème, nous proposons une classe générale de formes (multi-)linéaires quaternioniques satisfaisant un certain nombre de propriétés élémentaires tout en autorisant une multitude d'opérations algébriques propres au domaine quaternionique. Cette définition est au centre de la définition de la notion de *tenseur quaternionique*, que nous détaillons ci-après. L'extension au cas quaternionique d'une notion de multilinéarité pertinente impose de restreindre la nature des différents espaces vectoriels  $\mathcal{S}_d$  associés à  $f$ . Plus précisément, supposons :

- $\mathcal{S}_1 = \mathbb{H}_L^{N_1}$  un espace vectoriel quaternionique à gauche ;
- $\mathcal{S}_D = \mathbb{H}_R^{N_D}$  un espace vectoriel quaternionique à droite ;
- $\mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^{N_2}, \dots, \mathcal{S}_{D-1} = \mathbb{R}^{N_{D-1}}$  des espaces vectoriels réels.

Ce cadre définit une classe de formes à valeurs quaternioniques  $f : \mathbb{H}_L^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_{D-1}} \times \mathbb{H}_R^{N_D} \rightarrow \mathbb{H}$  satisfaisant des propriétés de multilinéarité propre à l'algèbre des quaternions :

- linéarité quaternionique à gauche pour  $d = 1$  :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{H}, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in \mathbb{H}_L^{N_1} \\ f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{y}_1, \dots) = \alpha f(\mathbf{x}_1, \dots) + \beta f(\mathbf{y}_1, \dots) \quad (4)$$

- linéarité quaternionique à droite pour  $d = D$  :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{H}, \forall \mathbf{x}_D, \mathbf{y}_D \in \mathbb{H}_R^{N_D} \\ f(\dots, \mathbf{x}_D \alpha + \mathbf{y}_D \beta) = f(\dots, \mathbf{x}_D) \alpha + f(\dots, \mathbf{y}_D) \beta \quad (5)$$

- linéarité réelle pour  $2 \leq d \leq D - 1$  :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}_d, \mathbf{y}_d \in \mathbb{R}^{N_d} \\ f(\dots, \alpha \mathbf{x}_d + \beta \mathbf{y}_d, \dots) = f(\dots, \mathbf{x}_d \alpha + \mathbf{y}_d \beta, \dots) \\ = \alpha f(\dots, \mathbf{x}_d, \dots) + \beta f(\dots, \mathbf{y}_d, \dots) \\ = f(\dots, \mathbf{x}_d, \dots) \alpha + f(\dots, \mathbf{y}_d, \dots) \beta \quad (6)$$

Il est à noter que, par définition, si  $f$  satisfait ces conditions de multilinéarité, alors elle est également multilinéaire réelle. *Remarque.* L'ordre des espaces vectoriels quaternioniques à gauche et à droite, ainsi que des espaces vectoriels réels centraux est complètement arbitraire et peut être permuté si nécessaire. Le choix fait ici permet de simplifier la présentation.

### Tenseurs quaternioniques vus comme formes multilinéaires

Le cœur de l'approche proposée repose sur l'association d'un tenseur quaternionique  $\mathcal{T}$  avec une forme *multilinéaire mixte*  $f$  : en outre, cela permet d'interpréter les coefficients de  $f$  une fois les bases des espaces vectoriels  $\mathcal{S}_d$  fixées. Soit  $N_d = \dim \mathcal{S}_d$  et  $\{\mathbf{e}_{i_d}^{(d)}\}_{i_d=1:N_d}$  une base de  $\mathcal{S}_d$ . On définit alors

$$\mathcal{T}_{i_1 i_2 \dots i_D} \triangleq f \left( \mathbf{e}_{i_1}^{(1)}, \mathbf{e}_{i_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{e}_{i_D}^{(D)} \right) \quad (7)$$

i.e.  $\mathcal{T} \in \mathbb{H}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_D}$  représente le tableau des coefficients de  $f$  dans la base produit  $\{\mathbf{e}_{i_1}^{(1)}\}_{i_1=1:N_1} \times \dots \times \{\mathbf{e}_{i_D}^{(D)}\}_{i_D=1:N_D}$ .

**Produit  $n$ -mode** La définition d'un tenseur quaternionique (7), notamment via le choix des espaces vectoriels associés, permet de définir les différentes opérations et propriétés essentielles associées à ce nouvel objet mathématique. En outre, la

nature différente des espaces vectoriels associés à chaque mode impose de distinguer entre les produits 1-mode,  $D$ -mode et  $d$ -mode pour  $2 \leq d \leq D - 1$ .

— Produit 1-mode défini par le produit quaternionique matriciel à gauche d'une matrice  $U \in \mathbb{H}^{J \times N_1}$  :

$$(\mathcal{T} \times_1^L U)_{j i_2 \dots i_D} \triangleq \sum_{i_1=1}^{N_1} u_{j i_1} T_{i_1 i_2 \dots i_D}. \quad (8)$$

— Produit  $D$ -mode défini par le produit quaternionique matriciel à droite d'une matrice  $U \in \mathbb{H}^{J \times N_D}$  :

$$(\mathcal{T} \times_D^R U)_{i_1 \dots i_{D-1} j} \triangleq \sum_{i_D=1}^{N_D} T_{i_1 i_2 \dots i_D} u_{j i_D}. \quad (9)$$

— Produit  $d$ -mode défini par le produit matriciel réel classique d'une matrice  $U \in \mathbb{R}^{J \times N_d}$  :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T} \times_d U)_{i_1 \dots j \dots i_D} &\triangleq \sum_{i_d=1}^{N_d} T_{i_1 \dots i_d \dots i_D} u_{j i_d} \\ &= \sum_{i_d=1}^{N_d} u_{j i_d} T_{i_1 \dots i_d \dots i_D}. \end{aligned} \quad (10)$$

Notons l'utilisation de l'indice  $L$  ou  $R$  pour rappeler le type de multiplication matricielle quaternionique associé. Le choix particulier de la définition d'un tenseur quaternionique, en définissant un ensemble d'espaces réels, quaternioniques gauche et droite permet alors de préserver l'importante propriété de commutativité du produit  $n$ -mode dans le contexte quaternionique, comme précisées par la proposition suivante.

**Proposition 1 (Commutativité).** *Soit  $\mathcal{T} \in \mathbb{H}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_D}$ ,  $U \in \mathbb{H}^{J_1 \times N_1}$ ,  $U_D \in \mathbb{H}^{J_D \times N_D}$  et  $U_d \in \mathbb{R}^{J_d \times N_d}$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

$$\mathcal{T} \times_1^L U_1 \times_D^R U_D = \mathcal{T} \times_D^R U_D \times_1^L U_1 \quad (11)$$

$$\mathcal{T} \times_1^L U_1 \times_d U_d = \mathcal{T} \times_d U_d \times_1^L U_1 \quad (12)$$

$$\mathcal{T} \times_d U_d \times_D^R U_D = \mathcal{T} \times_D^R U_D \times_d U_d \quad (13)$$

Les produits  $n$ -mode se composent de manière similaire aux cas réels et complexes [6], en tenant compte cette fois du sens de la multiplication matricielle quaternionique :

$$\mathcal{T} \times_1^L U \times_1^L V = \mathcal{T} \times_1^L (V \cdot_L U) \quad (14)$$

$$\mathcal{T} \times_D^R U \times_D^R V = \mathcal{T} \times_D^R (V \cdot_R U) \quad (15)$$

$$\mathcal{T} \times_d U \times_d V = \mathcal{T} \times_d (VU) \quad (16)$$

Les preuves de ces résultats sont obtenues par calcul explicite.

## 4 Décompositions tensorielles sur $\mathbb{H}$

La représentation d'un tenseur  $\mathcal{T}$  par une succession de produits  $n$ -mode appliquée à un tenseur  $\mathcal{S}$ , idéalement de plus faible dimension, permet d'étendre les décompositions tensorielles de rang faible au cas quaternionique. On présentera ici deux cas, à savoir la décomposition de Tucker et la décomposition canonique polyadique (CPD). Par souci de simplicité, on se limitera ci-dessous au cas des tenseurs d'ordre 3, mais les résultats présentés s'étendent facilement aux ordres supérieurs.

**Décomposition de Tucker** On considère ici un tenseur cœur quaternionique  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}^{R_1 \times R_2 \times R_3}$  et trois matrices facteurs  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N_1 \times R_1}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N_2 \times R_2}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{N_3 \times R_3}$  tel que la décomposition de Tucker de  $\mathcal{T} \in \mathbb{H}^{N_1 \times N_2 \times N_3}$  s'écrive :

$$\mathcal{T} = \mathcal{S} \times_1^L \mathbf{A} \times_2 \mathbf{B} \times_3^R \mathbf{C} \triangleq \llbracket \mathcal{S}; \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rrbracket. \quad (17)$$

Plus précisément, chaque élément  $\mathcal{T}_{i_1 i_2 i_3}$  de  $\mathcal{T}$  s'écrit

$$\mathcal{T}_{i_1 i_2 i_3} = \sum_{j_1=1}^{R_1} \sum_{j_2=1}^{R_2} \sum_{j_3=1}^{R_3} a_{i_1 j_1} \mathcal{S}_{j_1 j_2 j_3} b_{i_2 j_2} c_{i_3 j_3}. \quad (18)$$

Contrairement au cas réel, les quantités dans l'expression (18) ne commutent pas, à l'exception de  $b_{i_2 j_2}$  qui commute avec toutes les autres.

**Modèle CPD quaternionique** Cette décomposition peut être déduite de celle de Tucker, en imposant un tenseur cœur diagonal  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}^{R \times R \times R}$  avec  $R = R_1 = R_2 = R_3$ . On note alors la CPD par  $\mathcal{T} = \llbracket \lambda; \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rrbracket$ , avec  $\lambda$  un vecteur de taille  $R$  contenant les valeurs sur la diagonale de  $\mathcal{S}$ . Chaque élément  $\mathcal{T}_{i_1 i_2 i_3}$  de  $\mathcal{T}$  s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{T}_{i_1 i_2 i_3} = \sum_{r=1}^R a_{i_1 r} \lambda_r b_{i_2 r} c_{i_3 r}, \quad (19)$$

où  $\lambda_r \in \mathbb{H}$  est un facteur d'échelle *quaternionique* associé au  $r$ -ème terme de la décomposition CP.

**Ambiguïtés de la CPD quaternionique** Pour faciliter la notation et sans perdre de généralité, on note une CPD par  $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rrbracket$ , en considérant que le tenseur  $\mathcal{S}$  est l'identité. Dans ce cas, l'eq. (19), montre que si la décomposition CP quaternionique est unique, alors elle sera associée à des ambiguïtés triviales. La première ambiguïté de permutation de colonnes est exprimée par :  $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rrbracket = \llbracket \mathbf{A}\mathbf{\Pi}, \mathbf{B}\mathbf{\Pi}, \mathbf{C}\mathbf{\Pi} \rrbracket$ , où  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{R \times R}$  est une matrice de permutation. Cette ambiguïté s'exprime de la même manière que pour les CPDs réelles et complexes. L'ambiguïté d'échelle, quant à elle, est différente du cas classique, et nous avons :  $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rrbracket = \llbracket \mathbf{A} \cdot_L \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_2, \mathbf{C} \cdot_R \mathbf{\Gamma}_3 \rrbracket$ , avec  $\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_3 \in \mathbb{H}^{R \times R}$ , et  $\mathbf{\Gamma}_2 \in \mathbb{R}^{R \times R}$  des matrices diagonales vérifiant  $(\mathbf{\Gamma}_1 \cdot_L \mathbf{\Gamma}_3)\mathbf{\Gamma}_2 = \mathbf{I}_R$ , où  $\mathbf{I}_R$  est la matrice identité de taille  $R$ .

**Algorithme pour la CPD quaternionique** Notre approche consiste à identifier  $\mathbb{H}$  à  $\mathbb{R}^4$  et à réécrire la CPD quaternionique de  $\mathcal{T}$  comme une décomposition réelle inspirée de la décomposition CONFAC [7] et pouvant être calculée simplement à l'aide d'un algorithme de type Alternating Least Squares (ALS). Pour cela commençons par définir  $\mathcal{T}^{(1)}$ ,  $\mathcal{T}^{(2)}$ ,  $\mathcal{T}^{(3)}$  et  $\mathcal{T}^{(4)}$ , les quatre tenseurs réels de dimensions  $(N_1, N_2, N_3)$  tels que :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^{(1)} + i\mathcal{T}^{(2)} + j\mathcal{T}^{(3)} + k\mathcal{T}^{(4)}, \quad (20)$$

et  $\tilde{\mathcal{T}}$  le tenseur réel de taille  $(N_1, N_2, N_3, 4)$  contenant ces quatre tenseurs sur son dernier mode. De même, pour les matrices facteurs quaternioniques nous posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^{(1)} + i\mathbf{A}^{(2)} + j\mathbf{A}^{(3)} + k\mathbf{A}^{(4)} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}^{(1)} + i\mathbf{C}^{(2)} + j\mathbf{C}^{(3)} + k\mathbf{C}^{(4)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Enfin, nous définissons les matrices :

- $\Theta \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  la matrice identité de taille 4.
- $\Omega^{(1)} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  nulle à l'exception de  $\Omega_{11}^{(1)} = 1$  et  $\Omega_{22}^{(1)} = \Omega_{33}^{(1)} = \Omega_{44}^{(1)} = -1$ ,  $\Omega^{(2)} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  nulle à l'exception de  $\Omega_{12}^{(2)} = \Omega_{21}^{(2)} = 1$  et  $\Omega_{43}^{(2)} = \Omega_{34}^{(2)} = -1$ .  $\Omega^{(3)} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  nulle à l'exception de  $\Omega_{13}^{(3)} = \Omega_{24}^{(3)} = \Omega_{31}^{(3)} = 1$  et  $\Omega_{42}^{(3)} = -1$ .  $\Omega^{(4)} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  nulle à l'exception de  $\Omega_{14}^{(4)} = \Omega_{32}^{(4)} = \Omega_{41}^{(4)} = 1$  et  $\Omega_{23}^{(4)} = -1$ .
- $\forall r = 1 \dots R$ ,  $U^{(r)} \in \mathbb{R}^{N_1 \times 4}$  telles que  $U_{i_1 l}^{(r)} = A_{i_1 r}^{(l)}$  et  $W^{(r)} \in \mathbb{R}^{N_3 \times 4}$  telles que  $W_{i_3 l}^{(r)} = C_{i_3 r}^{(l)}$ .

Nous pouvons alors réécrire l'équation (19) sous forme de 4 équations réelles. Ainsi, en identifiant avec (20) et (21) et après quelques calculs, nous avons pour tout  $l = 1 \dots 4$  :

$$\mathcal{T}_{i_1 i_2 i_3}^{(l)} = \sum_{r=1}^R \sum_{f=1}^{16} \sum_{l_1=1}^4 \sum_{l_3=1}^4 U_{i_1 l_1}^{(r)} B_{i_2 r} W_{i_3 l_3}^{(r)} \Theta_{l_1 f} \Omega_{l_3 f}^{(l)}. \quad (22)$$

Considérons maintenant  $T_1^{(l)}$ ,  $T_2^{(l)}$  et  $T_3^{(l)}$  les matrices de dépliement du tenseur  $\mathcal{T}^{(l)}$  suivant chacun de ses trois modes. En notant  $\otimes$  le produit de Kronecker et  $\odot$  le produit de Khatri-Rao et en définissant les matrices  $U = [U^{(1)}, \dots, U^{(R)}] \in \mathbb{R}^{N_1 \times 4R}$ ,  $W = [W^{(1)}, \dots, W^{(R)}] \in \mathbb{R}^{N_3 \times 4R}$ ,  $\bar{\Theta} = I_R \otimes \Theta \in \mathbb{R}^{4R \times 4R}$ ,  $\bar{\Psi} = I_R \otimes [1 \ 1 \ 1 \ 1] \in \mathbb{R}^{R \times 4R}$  et  $\forall l = 1 \dots 4$ ,  $\bar{\Omega}^{(l)} = I_R \otimes \Omega^{(l)} \in \mathbb{R}^{4R \times 4R}$ , nous avons alors :

$$(T_1^{(l)})^T = ((V\bar{\Psi}) \odot (W\bar{\Omega}^{(l)})) \bar{\Theta}^T U^T \quad (23)$$

$$(T_2^{(l)})^T = ((W\bar{\Omega}^{(l)}) \odot (U\bar{\Theta})) \bar{\Psi}^T V^T \quad (24)$$

$$(T_3^{(l)})^T = ((U\bar{\Theta}) \odot (V\bar{\Psi})) (\bar{\Omega}^{(l)})^T W^T. \quad (25)$$

On retrouve ainsi les expressions matricielles d'une décomposition CONFAC de  $\mathcal{T}^{(l)}$ . Chacun des 4 tenseurs  $\mathcal{T}^{(l)}$  permettrait donc à lui seul d'estimer les matrices facteurs par ALS. Cependant, on peut améliorer la précision de l'estimation, en les traitant conjointement.

Soient  $\tilde{T}_1$ ,  $\tilde{T}_2$  et  $\tilde{T}_3$  les trois matrices de dépliement du tenseur  $\tilde{\mathcal{T}}$ . En posant alors  $\tilde{\Omega} = [\bar{\Omega}^{(1)}, \bar{\Omega}^{(2)}, \bar{\Omega}^{(3)}, \bar{\Omega}^{(4)}]$  et  $\tilde{\Omega}' = [(\bar{\Omega}^{(1)})^T (\bar{\Omega}^{(2)})^T (\bar{\Omega}^{(3)})^T (\bar{\Omega}^{(4)})^T]^T$  il vient

$$\tilde{T}_1^T = ((B\bar{\Psi}) \odot ((I_4 \otimes W)\tilde{\Omega}')) \bar{\Theta}^T U^T, \quad (26)$$

$$\tilde{T}_2^T = (((I_4 \otimes W)\tilde{\Omega}') \odot (U\bar{\Theta})) \bar{\Psi}^T B^T, \quad (27)$$

$$\tilde{T}_3^T = (I_4 \otimes ((U\bar{\Theta}) \odot (B\bar{\Psi}))) \tilde{\Omega}'^T W^T, \quad (28)$$

que l'on peut interpréter comme les expressions matricielles d'une décomposition CONFAC étendue de  $\tilde{\mathcal{T}}$  [8]. On peut ainsi estimer les matrices  $U$ ,  $B$  et  $W$  par ALS d'où l'on déduit  $U^{(r)}$  et  $W^{(r)}$  pour tout  $r = 1 \dots R$  et enfin les matrices  $A$  et  $C$ .

## 5 Illustration numérique et discussion

L'algorithme pour l'estimation de la CPD quaternionique que nous venons de proposer a été validé sur des simulations

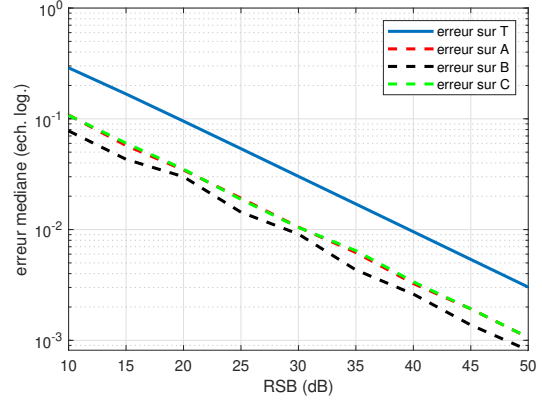


FIGURE 1 – Erreurs médianes en fonction du SNR

numériques. Nous avons construit 100 tenseurs quaternioniques de taille  $10 \times 10 \times 10$  selon le modèle donné dans l'équation (19), avec  $R = 4$ . Les éléments des 3 matrices facteurs ont été tirés aléatoirement suivant une loi normale centrée réduite, et ont été corrompus par l'ajout d'un bruit blanc Gaussien de puissance variable. On obtient ainsi 100 tenseurs bruités à décomposer. La figure 1 présente l'évolution des valeurs médianes des écarts relatifs entre le tenseur bruité et le tenseur estimé par notre algorithme ainsi qu'entre chacune des matrices facteurs vraies et estimées en fonction du SNR (par pas de 5dB). L'écart relatif entre un tableau  $X$  et son estimée  $Y$  est défini par  $\|X - Y\|_F / \|X\|_F$ , où  $\|\cdot\|_F$  est la norme de Frobenius.

Le bon comportement numérique de cet algorithme illustre la pertinence de l'approche. En outre, cela nous permet d'envisager de nombreux développements futurs autour du modèle (7) de tenseur quaternionique, tant sur les plans théoriques (ex. identifiabilité des décompositions), algorithmiques (ex. optimisation quaternionique) qu'applicatifs (ex. vidéo couleur).

## Références

- [1] J. Miao, K. I. Kou, and W. Liu, "Low-rank quaternion tensor completion for recovering color videos and images," *Pattern Recognition*, vol. 107, p. 107505, 2020.
- [2] Z.-H. He, C. Chen, and X.-X. Wang, "A simultaneous decomposition for three quaternion tensors with applications in color video signal processing," *Analysis and Applications*, vol. 19, no. 03, pp. 529–549, 2021.
- [3] D. Schulz and R. S. Thomä, "Using Quaternion-Valued Linear Algebra," *arXiv :1311.7488 [math]*, Mar. 2014, arXiv : 1311.7488.
- [4] L. Rodman, *Topics in quaternion linear algebra*. Princeton University Press, 2014, vol. 45.
- [5] J. E. Jamison, "Extension of some theorems of complex functional analysis to linear spaces over the quaternions and Cayley numbers," Ph.D. dissertation, University of Missouri–Rolla, 1970.
- [6] T. G. Kolda and B. W. Bader, "Tensor decompositions and applications," *SIAM review*, vol. 51, no. 3, pp. 455–500, 2009.
- [7] A. L. F. de Almeida, G. Favier, and J. C. M. Mota, "A constrained factor decomposition with application to mimo antenna systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 6, pp. 2429–2442, 2008.
- [8] A. L. F. de Almeida, X. Luciani, A. Stegeman, and P. Comon, "Confac decomposition approach to blind identification of underdetermined mixtures based on generating function derivatives," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 11, pp. 5698–5713, 2012.