

# Estimation des statistiques d'un canal de Rayleigh à partir de mesures du rapport signal à interférences plus bruit

David JIA<sup>1,2</sup>, Xavier LETURC<sup>1</sup>, Mohamad ASSAAD<sup>2</sup>, Christophe LE MARTRET<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Thales SIX GTS France  
4 Avenue des Louvresses, 92230 Gennevilliers, France

<sup>2</sup>Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S, CNRS), CentraleSupélec, France  
3 Rue Joliot Curie, 91190 Gif-sur-Yvette, France

{david.jia, xavier.leturc, christophe.le\_martret}@thalesgroup.com  
mohamad.assaad@centralesupelec.fr

**Résumé** – Cet article traite le problème de l'estimation des paramètres de la distribution du rapport signal à interférences plus bruit (RSIB) dans un canal aléatoire de Rayleigh plat en fréquence et en présence d'une unique source interférante. On suppose qu'un ensemble de réalisations instantanées du RSIB est disponible, et notre objectif est d'estimer l'amplitude moyenne du canal direct et du canal interférant. Pour ce faire, nous proposons deux estimateurs : un estimateur du maximum de vraisemblance (MV) et un estimateur moins complexe basé sur la méthode des moments (MdM) à l'ordre deux. Nous proposons pour chacun de ces estimateurs une procédure numérique basée sur l'algorithme de Newton. Les performances de ces estimateurs sont évaluées par simulations et leur variance comparée à la borne de Cramer-Rao.

**Abstract** – In this paper, we tackle the problem of the Signal-to-Interference-plus-Noise ratio (SINR) distribution estimation under flat Rayleigh fading with a single interferer. Assuming that we collect a set of SINRs' values from the receiver, the distribution is parametrized by the direct and interfering channel magnitude that need to be estimated. To that purpose, we propose here two estimators: the maximum likelihood estimator and a second order method of moments that is less complex. For both estimators we propose a numerical implementation scheme based on Newton's algorithm. We provide simulations to assess the performance of our proposed estimators and to compare them against the Cramer-Rao lower bound.

## 1 Introduction

Le rapport signal à interférences plus bruit (RSIB) est un paramètre important pour mesurer la qualité de la liaison entre un émetteur et un récepteur en présence d'interférences dans les réseaux de communications sans fil multi-utilisateurs. Ce paramètre est par exemple utilisé pour effectuer l'allocation des ressources.

Dans les canaux aléatoires, le RSIB est une variable aléatoire puisque les signaux utiles et interférants sont soumis à des fluctuations aléatoires. Dans certains contextes tels que les réseaux véhicule à véhicule [1] ou dispositif à dispositif (DaD) [2], le temps de retour du RSIB du récepteur à l'émetteur est trop long par rapport à la vitesse de fluctuation temporelle du canal et ainsi seules des valeurs obsolètes de RSIB sont disponibles à l'émetteur. Dans ce cas, une approche statistique est nécessaire pour modéliser les fluctuations du RSIB.

Plusieurs travaux de la littérature concernant l'allocation de ressources considèrent la présence d'un unique interférant, comme par exemple [3] pour le DaD, ou [4] pour lequel un schéma d'accès multiple non-orthogonal est utilisé afin de permettre à deux utilisateurs de transmettre simultanément grâce à un mécanisme d'annulation successive d'interférences. Dans ces travaux, la densité de probabilité (dp) du RSIB est utilisée pour

calculer une capacité ergodique afin de trouver les paramètres optimaux d'allocation des ressources.

Dans le présent article, nous considérons l'hypothèse d'un seul interférant et d'un canal aléatoire de Rayleigh plat en fréquence. La distribution du RSIB dépend alors de deux paramètres scalaires : i) la puissance moyenne du canal utile, et ii) la puissance moyenne du canal interférant. Dans la suite de ce document, nous appellerons "paramètres statistiques du RSIB" ces deux paramètres. Nous supposons que le récepteur dispose d'un ensemble d'échantillons de RSIB estimés et notre objectif est d'estimer les paramètres statistiques du RSIB à partir de ces échantillons. Les auteurs de [5] ont proposé un estimateur du maximum de vraisemblance (MV) des paramètres statistiques du RSIB dans le contexte d'un canal présentant des effets de masquage, en approximant la distribution des échantillons du RSIB à l'aide d'une loi log-normale.

Dans cet article, nous proposons deux estimateurs pour déterminer les paramètres statistiques du RSIB : i) l'estimateur du MV, ii) un estimateur basé sur la méthode des moments (MdM). Les principales contributions de cet article sont la proposition de procédures numériques pour la mise en œuvre des estimateurs et l'évaluation de leur performances par simulations. En particulier, nous comparons leur variance avec la borne de Cra-

mer-Rao (BCR) dont nous avons calculé une expression analytique non fournie dans cet article par manque de place.

Le reste de cet article est organisé comme suit. Tout d'abord, nous décrivons le modèle du système considéré dans la section 2. Nous détaillons ensuite la mise en œuvre des estimateurs proposés dans la section 3. Les performances de ces estimateurs sont ensuite comparés à l'aide de simulations en section 4. Enfin, nous concluons dans la section 5.

## 2 Modèle du système

Nous considérons un réseau composé de trois nœuds : un émetteur  $T_1$  communicant avec un récepteur  $R_1$ , et un émetteur interférent  $T_2$  communicant sur le même canal créant ainsi des interférences au niveau du récepteur  $R_1$ . Le signal reçu en  $R_1$  s'écrit :

$$y_1 = \sqrt{P_1\gamma_1} \tilde{h}_1 s_1 + \sqrt{P_2\gamma_2} \tilde{h}_2 s_2 + n_1, \quad (1)$$

où  $s_i$  est le symbole transmis par  $T_i$ ,  $P_i$  est la puissance transmise par  $T_i$ ,  $\tilde{h}_i \sim \mathcal{CN}(0, 1)$  est une réalisation aléatoire du canal de Rayleigh entre l'émetteur  $T_i$  et  $R_1$  avec  $\mathcal{CN}(\mu, \Gamma)$  la loi normale complexe de moyenne  $\mu$  et de variance  $\Gamma$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  correspondent respectivement aux amplitudes du canal direct et du canal interférent, et  $n_1 \sim \mathcal{CN}(0, P_b)$  est un bruit blanc gaussien et centré. Dans cet article, nous supposons que la puissance du bruit  $P_b$  et les puissances d'émission  $P_1$  et  $P_2$  sont parfaitement connues. Notre objectif est d'estimer les paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

Pour ce faire, on suppose comme dans [5, 6] que le récepteur  $R_1$  fournit des estimations des valeurs instantanées de RSIB qui s'exprime d'après (1) par  $\mathcal{S} := P_1\gamma_1|\tilde{h}_1|^2/(P_b+P_2\gamma_2|\tilde{h}_2|^2)$ , où  $:=$  signifie "égal par définition". En posant  $a := P_1/P_b$ ,  $b := P_2/P_b$ ,  $\alpha_1 := |\tilde{h}_1|^2$ ,  $\alpha_2 := |\tilde{h}_2|^2$ ,  $\mathcal{S}$  peut être ré-exprimé comme :

$$\mathcal{S} = \frac{a\gamma_1\alpha_1}{1 + b\gamma_2\alpha_2}. \quad (2)$$

Le terme  $a\gamma_1\alpha_1$  intervenant dans (2) s'interprète comme le rapport signal à bruit (RSB) instantané que l'on note  $\text{RSB}_{\text{inst}}$ , et le terme  $b\gamma_2\alpha_2$  comme le rapport interférence à bruit (RIB) instantané que l'on note  $\text{RIB}_{\text{inst}}$ . Dans le reste de l'article les termes "RSB" et "RIB" désigneront respectivement les espérances mathématiques de  $\text{RSB}_{\text{inst}}$  et de  $\text{RIB}_{\text{inst}}$ , qui sont égales à  $a\gamma_1$  et  $b\gamma_2$ .

L'expression de la dp de  $\mathcal{S}$  est fournie dans [7] et s'écrit :

$$p_{\mathcal{S}}(x; \gamma) = \exp\left(-\frac{x}{a\gamma_1}\right) \frac{a\gamma_1 + b\gamma_2 x + a\gamma_1 b\gamma_2}{(a\gamma_1 + b\gamma_2 x)^2}, \quad (3)$$

avec  $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2)$ .

Dans la suite de cet article, on suppose qu'on dispose de  $N$  échantillons de RSIB indépendants et identiquement distribués (i.i.d) désignés par  $\mathbf{S} := (\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N)$ , et notre objectif est d'estimer  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  à partir de  $\mathbf{S}$ .

## 3 Estimateurs proposés

Dans cette section, nous proposons deux estimateurs de  $\gamma$  à partir de  $\mathbf{S}$  : l'un basé sur la maximisation de la vraisemblance,

et l'autre basé sur la MdM à l'ordre deux.

### 3.1 Estimateur du maximum de vraisemblance

L'estimateur du MV de  $\gamma$  est obtenu en maximisant la fonction de log-vraisemblance de  $\mathbf{S}$  que l'on note  $\ell_{\mathbf{S}}(\gamma)$  et qui peut facilement s'exprimer à partir de (3) comme  $\ell_{\mathbf{S}}(\gamma) := \sum_{n=1}^N \log(p_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}_n; \gamma))$  étant donné le fait que les échantillons de  $\mathbf{S}$  sont i.i.d.

Maximiser  $\ell_{\mathbf{S}}(\gamma)$  par rapport à  $\gamma$  revient à chercher ses points stationnaires, c'est-à-dire les couples  $\gamma^V = (\gamma_1^V, \gamma_2^V)$  tels que  $\mathbf{g}_{\ell}(\gamma^V) = [0, 0]^T$  où  $\mathbf{g}_{\ell}(\gamma) := [\frac{\partial}{\partial \gamma_1} \ell_{\mathbf{S}}(\gamma), \frac{\partial}{\partial \gamma_2} \ell_{\mathbf{S}}(\gamma)]^T$  est le vecteur gradient de  $\ell_{\mathbf{S}}(\gamma)$  dont l'expression analytique est omise par manque de place.

Sans pouvoir le démontrer de manière formelle, nous conjecturons après une étude numérique de  $\ell_{\mathbf{S}}(\gamma)$  que cette fonction possède les propriétés suivantes : 1) elle possède un point stationnaire unique, et 2) elle est quasi-concave et tend vers une constante quand  $\gamma_2 \rightarrow +\infty$ . On déduit de 1) que l'identification d'un point stationnaire par toute méthode d'optimisation sera le point optimal, tandis que la propriété 2) indique que l'initialisation de la méthode d'optimisation doit être faite avec précaution afin de garantir la convergence de l'algorithme employé.

Nous proposons d'utiliser une méthode de descente basée sur l'algorithme de Newton [8]. Le vecteur de descente est donné par  $-\mathbf{H}_{\ell}^{-1} \mathbf{g}_{\ell}$  où  $\mathbf{H}_{\ell}$  est la matrice hessienne de  $\ell_{\mathbf{S}}(\gamma)$  dont l'expression est omise dans cet article. Pour l'initialisation, nous proposons de chercher par essais-erreurs aléatoires un point initial tel que  $\mathbf{H}_{\ell}$  soit définie négative. Compte tenu de l'existence d'un maximum unique de  $\ell_{\mathbf{S}}(\gamma)$ , cette condition permet de garantir la convergence de l'algorithme de Newton avec un pas contrôlé. Le pas est initialisé à 1 et contrôlé par division successive par 2 de manière à assurer l'accroissement de la fonction à maximiser ainsi que la négativité de  $\mathbf{H}_{\ell}$  à chaque itération. On peut noter que le nombre de variables étant égal à deux, l'inverse de la hessienne et le calcul des valeurs propres se calculent de manière analytique, réduisant ainsi la complexité de l'implémentation.

### 3.2 Estimateur par la méthode des moments

#### 3.2.1 Expression de l'estimateur

La MdM à l'ordre deux consiste à évaluer les deux premiers moments théoriques des échantillons à leurs équivalents empiriques. Cet estimateur a l'avantage d'être moins complexe et plus simple à initialiser que l'algorithme du MV, au détriment d'une variance d'estimation plus élevée. Les moments empiriques du premier et second ordre des échantillons reçus sont définis par  $M_1 := (1/N) \sum_{n=1}^N \mathcal{S}_n$  et  $M_2 := (1/N) \sum_{n=1}^N \mathcal{S}_n^2$ . Les moments théoriques du premier et second ordre  $\phi_1(\gamma) := \mathbb{E}[\mathcal{S}]$ ,  $\phi_2(\gamma) := \mathbb{E}[\mathcal{S}^2]$  ont été calculés dans [9] et s'écrivent, en posant  $\omega := \frac{1}{b\gamma_2}$  :  $\phi_1(\gamma) = a\gamma_1 \omega e^{\omega} E_1(\omega)$  et  $\phi_2(\gamma) = 2(a\gamma_1)^2 \omega (1 - x e^{\omega} E_1(\omega))$  avec  $E_1(z) := \int_z^{+\infty} (e^{-t}/t) dt$  la fonction exponentielle intégrale. Les valeurs estimées par l'esti-

mateur de la MdM sont données par la résolution du système  $\phi_1(\gamma^M) = M_1, \phi_2(\gamma^M) = M_2$ . En posant  $r := \frac{M_2}{(M_1)^2}$ , on peut démontrer le résultat suivant (les calculs sont omis par manque de place) :

**Résultat 1** Les estimées  $\gamma^M$  de l'estimateur de la MdM sont la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \gamma_1^M = \frac{M_1}{2a} \left( 1 + \sqrt{1 + 2br\gamma_2^M} \right) \\ f(\gamma_2^M) = 0, \end{cases} \quad (4a) \quad (4b)$$

où  $f(z)$  est définie par

$$f(z) := \frac{1 + \sqrt{1 + 2brz}}{2bz} e^{1/bz} E_1(1/bz) - 1. \quad (5)$$

La résolution du système fournit dans (4) s'opère en commençant par calculer  $\gamma_2^M$  en résolvant (4b), puis en insérant cette valeur dans (4a) pour en déduire  $\gamma_1^M$ . Afin de caractériser les solutions de (4b), il convient d'étudier les propriétés de la fonction  $f(z)$ , ce qui n'est pas triviale. Nous avons toutefois pu démontrer (démonstrations omises) :  $p_1) f(0) = 0$ ,  $p_2) \lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = -1$  et  $p_3) f'(0^+) := \lim_{z \rightarrow 0^+} f'(z) = b(r/2 - 1)$ .

D'après  $p_3$ , on en déduit que le signe de  $f'(0^+)$  ne dépend que du rapport  $r$ , et on a ainsi :  $\forall r > 2, f'(0^+) > 0$  et  $\forall r \leq 2, f'(0^+) \leq 0$ . Nous avons de plus observé numériquement que la fonction (5) possède les propriétés suivantes (que nous conjecturons) :  $p_4) f'(0^+) \leq 0 \Rightarrow \forall z > 0, f(z) < 0$ ,  $p_5) f'(0^+) > 0 \Rightarrow \exists! z_1 > 0$  tel que  $f(z_1) = 0$ .

Dans le cas où  $f'(0^+) \leq 0$ , la solution de (4b) est  $\gamma_2^M = 0$  et on obtient directement  $\gamma_1^M = M_1/a$ . Dans le cas où  $f'(0^+) > 0$ , (5) possède une unique racine non nulle  $z_1$  d'après la propriété  $p_5$ . Dans ce cas on gardera comme solution de (4b) la racine  $z_1$  ce qui correspond au cas avec une interférence. Une procédure numérique est proposée dans la section suivante afin de déterminer cette racine.

### 3.2.2 Recherche du zéro non-nul de $f(z)$

Nous sommes ici dans le cas  $f'(0^+) > 0$ . Puisqu'il n'existe pas de solution sous forme analytique pour (4b), nous proposons d'utiliser la procédure numérique de Newton. On déduit des propriétés  $p_2$  et  $p_5$  que la fonction  $f(z)$  se comporte de la manière suivante, comme illustré dans la Figure 1 lorsque  $\text{RIB} = 10$  dB : elle est tout d'abord positive et croissante, passe par un maximum et décroît ensuite. Elle coupe l'axe des  $z$  en  $z = z_1$  puis devient négative avec comme limite  $-1$  quand  $z \rightarrow +\infty$ . L'initialisation de l'algorithme de Newton doit être faite de manière précautionneuse et assez proche de la racine  $z = z_1$  afin d'éviter que l'algorithme ne diverge.

Nous proposons donc une première phase de recherche d'un encadrement de la racine par dichotomie, la valeur inférieure à la racine  $z_g < z_1$  vérifiant  $f(z_g) > 0$  et la valeur supérieure à la racine  $z_d > z_1$  vérifiant  $f(z_d) < 0$ . Une manière de déterminer la première valeur d'une des bornes de la dichotomie est de se fixer une valeur  $z_0 = 1$  puis d'appliquer la règle

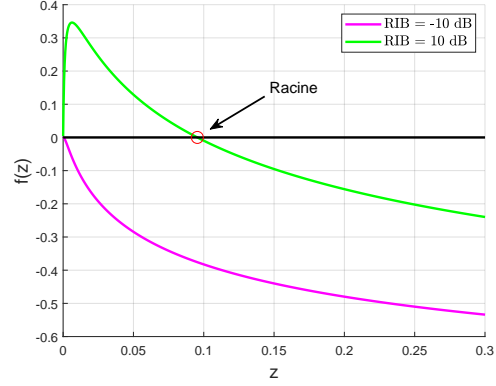


Figure 1: Graphes de  $f(z)$  pour  $\text{RIB}=10$  dB et  $\text{RIB}=-10$  dB.

suivante : si  $f(z_0) < 0$ , alors on pose  $z_d = z_0$  et l'on détermine  $z_g$  en divisant successivement  $z_g$  par deux jusqu'à trouver  $f(z_g) > 0$  ; si  $f(z_0) > 0$ , alors on pose  $z_g = z_0$  et l'on détermine  $z_d$  en multipliant successivement  $z_d$  par deux jusqu'à trouver  $f(z_d) < 0$ . Une fois les valeurs initiales trouvées, on applique la dichotomie de manière itérative jusqu'à ce que l'encadrement de la racine soit suffisamment précis pour démarrer l'algorithme de Newton. Nous proposons comme critère d'arrêt de la dichotomie les deux conditions suivantes : 1)  $f'(z_g) < 0$  et  $f'(z_d) < 0$  et 2) la différence absolue entre les premières itérées de Newton initialisées par  $z_g$  et  $z_d$  est inférieure à un seuil donné :  $|z_g - f(z_g)/f'(z_g) - z_d + f(z_d)/f'(z_d)| < \varepsilon$ . Lorsque ces deux conditions sont vérifiées, alors l'algorithme de Newton est initialisé à la valeur  $(z_g + z_d)/2$ .

## 4 Résultats numériques

Dans cette section, nous étudions numériquement les performances des estimateurs proposés en termes d'erreur quadratique moyenne (EQM), définie pour un estimateur donné  $\hat{\gamma}_j$  par :  $\text{EQM} = \mathbb{E}[(\hat{\gamma}_j - \gamma_j)^2], j = 1, 2$ . Nous comparons les EQMs avec la BCR du problème d'estimation associé, dont l'expression analytique a été calculée mais est omise dans cet article par manque de place. Puisque nous disposons de l'expression analytique de la dp de  $\mathcal{S}$  donnée par (3), nous proposons d'étudier les performances des estimateurs en mesurant l'écart entre la dp théorique calculée avec le vrai  $\gamma$  ayant servi à générer les données et la dp calculée avec la valeur estimée  $\hat{\gamma}$  ( $\gamma^V$  ou  $\gamma^M$ ). Nous utilisons pour ce faire l'erreur quadratique intégrale moyenne (EQIM) définie par  $\text{EQIM} := \mathbb{E} \int |p(t) - \hat{p}(t)|^2 dt$ , avec  $p := t \mapsto p_S(t; \gamma)$  et  $\hat{p} := t \mapsto p_S(t; \hat{\gamma})$ . Nous étudions l'influence du nombre d'échantillons  $N$  et chaque résultat est moyenné sur  $10^6$  réalisations de Monte-Carlo. Les EQM et la BCR ont été normalisées par  $(\gamma_j)^2$ .

Les paramètres des simulations sont fixés comme suit :  $P_1 = P_2 = P_b = 1$  W, ce qui conduit à  $a = b = 1$ . Nous posons  $\gamma_1 = 100$  pour obtenir  $\text{RSB} = 20$  dB et  $\gamma_2 = 10$  pour avoir  $\text{RIB} = 10$  dB. Lors de l'initialisation de la méthode de Newton pour l'estimateur du MV, les essais-erreurs aléatoires se font

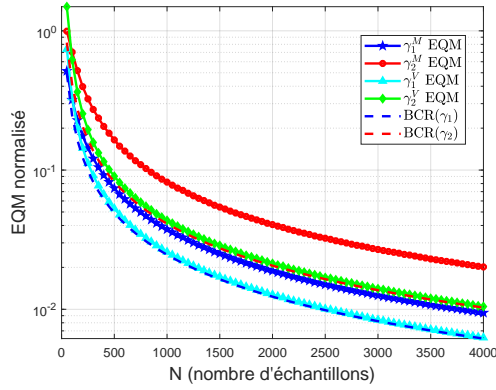


Figure 2: EQM de  $\gamma_1^M$ ,  $\gamma_2^M$ ,  $\gamma_1^V$ ,  $\gamma_2^V$  et BCR en fonction de  $N$  pour RSB = 20 dB et RIB = 10 dB.

dans un intervalle qui correspond à un RSB compris entre -10 et 30 dB, et un RIB compris entre -20 et 20 dB.

La Figure 2 représente l'EQM des estimateurs proposés et la BCR associée en fonction du nombre d'échantillons  $N$ . Nous pouvons effectuer les observations suivantes : i) l'EQM des estimateurs proposés diminue lorsque  $N$  augmente, ii) comme attendu, l'estimateur du MV est optimal en terme d'EQM puisqu'il atteint la BCR, tandis que l'EQM du MdM est plus élevée.

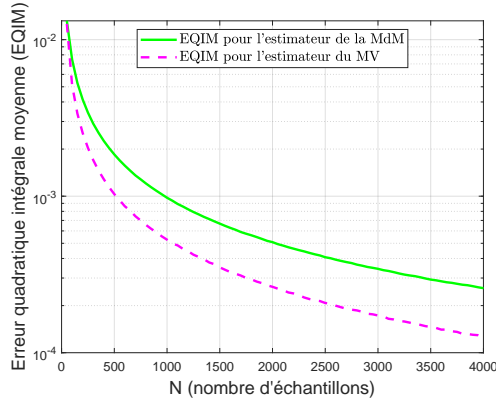


Figure 3: EQIM en fonction de  $N$  pour les estimateurs du MV et de la MdM pour RSB = 20 dB et RIB = 10 dB.

La Figure 3 représente l'EQIM pour les estimateurs du MV et de la MdM. On constate que l'EQIM des estimateurs diminue lorsque  $N$  augmente et que l'estimateur du MV a une EQIM plus petite que celle de la MdM démontrant de meilleures performances pour l'estimateur du MV. Ce constat corrobore ce que l'on avait observé à la Figure 2 en terme d'optimalité de l'estimateur du MV vis à vis de l'EQM.

Enfin, nous avons étudié la complexité des estimateurs proposés. La complexité de la MdM est de l'ordre de  $3N$ , tandis que celle du MV est de l'ordre de  $835N$ . La différence de complexité s'explique par le fait que la méthode de Newton utilisée pour la MdM est unidimensionnelle tandis que celle utilisée dans le MV est bidimensionnelle.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé deux nouveaux estimateurs basés sur la méthode du MV et la MdM pour estimer les paramètres statistiques du RSIB dans un canal de Rayleigh plat en fréquence en présence d'un seul interférent à partir d'échantillons de RSIB. Les deux estimateurs ont été implémentés à l'aide de la méthode de Newton pour lesquels nous avons proposé des procédures d'initialisations garantissant la convergence des algorithmes. Les performances des estimateurs ont été étudiées par simulations et ont montré que la variance de l'estimateur du MV est proche de la BCR, alors que la variance de la MdM est légèrement plus élevée. Toutefois, l'estimateur MdM présente l'avantage d'être moins complexe que celui du MV. Comme perspective, il serait intéressant de compléter l'étude en étudiant la robustesse des algorithmes au bruit d'estimation du RSIB.

## Références

- [1] L. Liang, S. Xie, G. Y. Li, Z. Ding, and X. Yu, "Graph-based resource sharing in vehicular communication," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 17, no. 7, pp. 4579–4592, 2018.
- [2] L. Wang, H. Tang, H. Wu, and G. L. Stüber, "Resource allocation for D2D communications underlay in Rayleigh fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 66, no. 2, pp. 1159–1170, 2017.
- [3] D. Feng, L. Lu, Y.-W. Yi, G. Y. Li, G. Feng, and S. Li, "QoS-aware resource allocation for device-to-device communications with channel uncertainty," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 65, no. 8, pp. 6051–6062, August 2016.
- [4] Q. Sun, S. Han, C.-L. I, and Z. Pan, "On the ergodic capacity of MIMO NOMA systems," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 4, no. 4, pp. 405–408, August 2015.
- [5] K. K. Mohan and S. S. Das, "Parametric estimation of SINR distribution using quantized SINR samples for maximizing average spectral efficiency," in *National Conference on Communications (NCC)*, 2021, pp. 1–6.
- [6] J. Cao, T. Peng, X. Liu, W. Dong, R. Duan, Y. Yuan, W. Wang, and S. Cui, "Resource allocation for ultradense networks with machine-learning-based interference graph construction," *IEEE Internet Things J.*, vol. 7, no. 3, pp. 2137–2151, March 2020.
- [7] H. Gao, P. J. Smith, and M. V. Clark, "Theoretical reliability of MMSE linear diversity combining in Rayleigh-fading additive interference channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, no. 5, pp. 666–672, May 1998.
- [8] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [9] A. Shojaefard, K. A. Hamdi, E. Alsusa, D. K. C. So, and J. Tang, "Exact SINR statistics in the presence of heterogeneous interferers," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 61, no. 12, pp. 6759–6773, December 2015.