

Exploitation du *screening* pour une reconstruction accélérée en imagerie ultrasonore pour le CND

Ralph ABI-RIZK^{1,2} Sébastien BOURGUIGNON¹ Nans LAROCHE² Clément HUNEAU¹ Ewen CARCREFF² Jérôme IDIER¹

¹Nantes Université, École Centrale Nantes, CNRS, LS2N, UMR 6004, F-44000 Nantes, France

²The Phased Array Company / DB-SAS, 13 rue du Bois Briand, Impasse de la Turquoise, 44300 Nantes, France

Résumé – Dans le contexte du Contrôle Non Destructif (CND), nous proposons d'utiliser une méthode de *screening* dynamique dans un algorithme d'optimisation en norme ℓ_1 pour accélérer la déconvolution des images ultrasonores formées par faisceaux. Les images étant parcimonieuses, cette technique permet d'éliminer, au cours de l'optimisation, une partie des variables d'optimisation (i.e. des pixels) qui seront de valeur nulle dans la solution finale. Nous testons la méthode proposée pour l'inspection d'un échantillon d'acier qui contient des trous étroitement espacés et de petite taille. Les résultats montrent que le *screening* élimine jusqu'à 97% des pixels et que l'algorithme de reconstruction gagne jusqu'à un facteur 4 en temps de calcul, sans altérer la reconstruction.

Abstract – In the context of non-destructive testing (NDT), we propose to apply a dynamical screening technique in an ℓ_1 -norm optimization algorithm to accelerate the deconvolution of ultrasonic beamformed images. Since the images are sparse, this technique eliminates, along the optimization procedure, the optimization variables (i.e., pixels) that will be zero in the final solution. The proposed method is tested to inspect a steel sample containing small, closely spaced side-drilled holes. Results show that the screening eliminates up to 97% of pixels and that the reconstruction algorithm can run up to 4 times faster while maintaining the same reconstructed image quality.

1 Introduction

Le Contrôle Non Destructif (CND) par ultrasons consiste à propager des ondes non invasives à l'intérieur d'une pièce industrielle afin d'estimer des caractéristiques liées à sa géométrie et de détecter d'éventuels défauts.

Dans ce domaine, les progrès réalisés sur l'électronique d'acquisition ainsi que les capacités croissantes de calcul numérique ont permis le développement de nouvelles techniques d'imagerie. Ces méthodes s'appuient sur le principe du DAS (*Delay-and-sum*) [1] pour reconstruire une cartographie spatiale qui représente l'objet inspecté à partir d'un grand nombre de signaux temporels ultrasonores (*A-scan*). Cependant, l'étalement de la forme d'onde correspondant à la réponse impulsionnelle des capteurs limite la résolution des images formées. Les approches basées sur les problèmes inverses ont été récemment appliquées au CND afin d'améliorer la qualité (résolution, contraste) des images reconstruites. Dans [2], une méthode d'imagerie reposant sur l'inversion des données FMC (*Full Matrix Capture* : collection des signaux temporels reçus par chaque couple émetteur-récepteur) est proposée. Cette reconstruction repose sur un modèle direct des signaux temporels qui prend en compte la forme d'onde et sur la minimisation d'un critère des moindres carrés pénalisé par une norme ℓ_1 favorisant la parcimonie et un terme quadratique favorisant la continuité spatiale. En effet, en CND, on cherche souvent à reconstruire une image parcimonieuse qui représente un milieu homogène présentant quelques défauts non ponctuels. La résolution de l'image reconstruite est nettement améliorée par rapport à l'image DAS obtenue de ces données, au prix d'un temps de calcul important dû au grand nombre de données acquises.

Une accélération est proposée dans [3], où le modèle de données temporelles est reporté sur l'image DAS. La recons-

truction de l'image à haute résolution s'apparente alors à un problème de déconvolution 2D de l'image DAS, avec un modèle à PSF (*Point Spread Function*) spatialement variable et à bruit gaussien coloré. L'image reconstruite est alors de qualité similaire à celle de [2], tout en étant beaucoup plus rapide à calculer.

Notre objectif est ici d'accélérer encore la déconvolution de l'image DAS sans altérer l'image reconstruite. L'image recherchée étant parcimonieuse, nous proposons pour cela d'appliquer une méthode de *screening* [4]. Le *screening* va exploiter des propriétés liées à la parcimonie du problème pour localiser des pixels qui ne contribueront pas à la solution finale, et les écarter lors de l'optimisation. Cette technique permet de réduire le nombre de variables à estimer, et donc le temps de calcul. Nous nous appuyons particulièrement sur la règle SAFE statique [5] qui s'effectue avant l'exécution de l'algorithme et sur la règle SAFE dynamique [6] qui s'effectue itérativement dans l'algorithme.

La section 2 rappelle le principe de l'imagerie DAS et le formalisme de la reconstruction par déconvolution de l'image DAS. La section 3 décrit les règles SAFE de *screening* statique et dynamique. La section 4 explique la mise en œuvre du *screening* dans le cadre de la méthode de déconvolution d'images DAS. Enfin, la section 5 présente des résultats de reconstruction et de temps de calcul sur des données ultrasonores acquises dans un échantillon d'acier austénitique.

2 Techniques d'imagerie ultrasonore

Nous considérons ici une acquisition de données de type FMC où tous les éléments de la sonde ultrasonore émettent successivement des ondes dans le milieu inspecté. À chaque émission, la totalité des éléments reçoit les ondes réfléchies. Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_t N_s}$ le vecteur colonne collectant l'ensemble des N_s

signaux (*A-scans*) de taille N_t chacun.

2.1 Reconstruction par DAS

L'imagerie DAS reconstruit, à partir des données FMC, la carte d'intensité représentée sur une grille spatiale contenant $N_x N_z$ pixels. Cette méthode consiste à sommer la contribution des signaux acquis sur chaque pixel et peut être exprimée sous forme matricielle :

$$\mathbf{o}_{\text{DAS}} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \quad (1)$$

où \mathbf{o}_{DAS} est la forme vectorisée de l'image et la matrice binaire $\mathbf{B} \in \{0, 1\}^{N_x N_z \times N_t N_s}$ permet de sélectionner dans chaque signal le temps de vol le plus proche correspondant au trajet de l'émetteur au récepteur, en passant par chaque pixel de la grille spatiale [7]. Cependant, cette technique ne tient pas compte de la réponse impulsionnelle des transducteurs qui émettent et reçoivent des ondes ultrasonores dans une bande fréquentielle limitée. En conséquence, les images reconstruites souffrent d'un étalement spatial et d'une résolution limitée.

2.2 Reconstruction par déconvolution de l'image DAS

Nous décrivons ici le cadre d'inversion proposé dans [3], lequel s'appuie sur une modélisation linéaire des données FMC [2] :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_t \mathbf{o} + \mathbf{n}_t. \quad (2)$$

où $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^{N_x N_z}$ contient la valeur de réflectivité en chaque pixel et l'opérateur $\mathbf{H}_t \in \mathbb{R}^{N_s N_t \times N_x N_z}$ contient les formes d'ondes calculées au bon temps de vol : une colonne de \mathbf{H}_t contient la signature d'un réflecteur localisé au pixel correspondant sur l'ensemble des données temporelles, et se calcule en appliquant un retard (calcul géométrique) à l'impulsion se propageant entre émetteur et récepteur. Les erreurs de modèle et de mesure sont représentées ici par un terme de bruit $\mathbf{n}_t \in \mathbb{R}^{N_s N_t}$, que nous supposons blanc gaussien. Notons que ce modèle peut également décrire d'autres modalités d'acquisition ultrasonore, comme PWI (*Plane Wave Imaging*) [8], en adaptant l'opérateur \mathbf{H}_t .

Combinant (1) et (2), un nouveau modèle est proposé dans [3] :

$$\mathbf{o}_{\text{DAS}} = \mathbf{B}\mathbf{H}_t \mathbf{o} + \mathbf{B}\mathbf{n}_t = \mathbf{H}\mathbf{o} + \mathbf{n}_s, \quad (3)$$

où $\mathbf{H} = \mathbf{B}\mathbf{H}_t \in \mathbb{R}^{N_x N_z \times N_x N_z}$ est un opérateur de convolution non-stationnaire : la PSF résultante varie en tout point en raison de la géométrie du problème. Dans [3], un modèle d'interpolation est alors proposé afin de rendre les calculs plus efficaces. Soient $h_i^{\text{ref}}, i \in \{1, \dots, N_{\text{ref}}\}$ une collection de PSF de référence calculées en les pixels p_i . La PSF h_n en chaque pixel $p_n, n \in \{1, \dots, N_x N_z\}$ est alors approchée par :

$$h_n(\mathbf{p}) \simeq \sum_{i=1}^{N_{\text{ref}}} \alpha_i(\mathbf{p}_n) h_i^{\text{ref}}(\mathbf{p}), \quad (4)$$

où α_i pondère la contribution de la PSF h_i^{ref} au pixel p_n . Enfin, le bruit $\mathbf{n}_s = \mathbf{B}\mathbf{n}_t \in \mathbb{R}^{N_x N_z}$ est désormais coloré. Un opérateur de pré-blanchiment est alors appliqué au modèle (3) – voir les détails dans [3]. La déconvolution de l'image \mathbf{o}_{DAS} s'appuie sur l'optimisation d'un critère composé d'un terme d'attache aux données et d'un terme de régularisation :

$$\hat{\mathbf{o}} = \arg \min_{\mathbf{o}} \frac{1}{2} \|\mathbf{o}_{\text{DAS}}^w - \mathbf{H}^w \mathbf{o}\|_2^2 + \mu_1 \|\mathbf{o}\|_1 + \mu_2 \|\mathbf{D}\mathbf{o}\|_2^2, \quad (5)$$

où $\hat{\mathbf{o}}$ est l'image de réflectivité recherchée, à valeurs réelles, $\mathbf{o}_{\text{DAS}}^w$ est l'image DAS blanchie et \mathbf{H}^w l'opérateur de convolution blanchi. La régularisation ℓ_1 est utilisée pour favoriser la parcimonie alors que le terme ℓ_2 renforce le lissage de la solution, avec \mathbf{D} un opérateur de différence entre les pixels en ligne et en colonne. La minimisation de (5) est réalisée avec l'algorithme d'optimisation FISTA (*Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm* [9]) en assimilant ce problème à un problème LASSO standard :

$$\hat{\mathbf{o}} = \arg \min_{\mathbf{o}} \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{A}\mathbf{o}\|_2^2 + \mu_1 \|\mathbf{o}\|_1, \quad (6)$$

avec :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_{\text{DAS}}^w \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^w \\ \sqrt{\mu_2} \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Ainsi, à chaque itération k , l'itéré \mathbf{o}_k est mis à jour en calculant :

$$\mathbf{o}_k \leftarrow \tau_{\mu/L} \left(\mathbf{o}_{k-1} - \frac{1}{L} \mathbf{A}^t (\mathbf{A}\mathbf{u}_k - \mathbf{z}) \right), \quad (8)$$

où \mathbf{u}_k est une combinaison linéaire spécifique de \mathbf{o}_{k-2} et \mathbf{o}_{k-1} , τ l'opérateur de seuillage doux, et L la constante de Lipschitz qui doit être supérieure au rayon spectral de l'opérateur l'opérateur $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ (qui est celui de $\mathbf{H}^{w^t} \mathbf{H}^w$ d'après (7)). Dans le cas d'une matrice de convolution circulaire, ce dernier correspondrait au module carré de la plus grande valeur de la réponse en fréquence du filtre [10]. La matrice \mathbf{A} s'apparentant à une matrice de convolution à PSF variable, nous choisissons $L = \max |\mathcal{F}h_c|^2$, où h_c correspond à la PSF calculée au pixel central (notation de l'équation (4)) et \mathcal{F} représente la transformée de Fourier (2D). Bien qu'empirique, ce choix a été validé par une règle de *backtracking* qui a montré qu'aucune mise à jour de L n'était nécessaire au fil des itérations. L'opérateur \mathbf{A} est difficilement stockable. Les multiplications matrice-vecteur qui impliquent \mathbf{A} et \mathbf{A}^t dans (8) se font donc "à la volée" à partir des PSF de référence et des poids associés à chaque pixel, qui sont pré-calculés (voir équation (4)). Afin d'optimiser le calcul des opérations matrice-vecteur, celles-ci sont effectuées en parallèle, sur carte graphique, pour chaque pixel de l'image.

Pour accélérer l'optimisation de (5) sans compromettre la qualité de l'image reconstruite, nous proposons par la suite d'appliquer la technique du *screening* [4, 5] à l'algorithme de reconstruction.

3 Principe du screening

Dans le domaine de la statistique ou du traitement de signal, le *screening* est le plus souvent appliqué pour accélérer l'optimisation du problème LASSO (6). Cette méthode consiste à éliminer des variables d'optimisation qui ne contribuent pas à la solution $\hat{\mathbf{o}}$ du problème. Soit le problème dual (voir [11, sect. 15.2]) associé à (6) :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \frac{1}{2} \|\theta\|_2^2 - \frac{\mu^2}{2} \left\| \theta - \frac{\mathbf{z}}{\mu} \right\|_2^2 \quad (9a)$$

$$\text{tel que } |\theta^t \mathbf{a}_m| \leq 1 \quad \forall m \in \{1, \dots, M\} \quad (9b)$$

où \mathbf{a}_m est la $m^{\text{ème}}$ colonne de \mathbf{A} et θ désigne la variable duale. Le *screening* est basé sur la relation entre les solutions des

problèmes primal et dual :

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{o}} + \mu\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (10a)$$

$$\text{tel que } \forall m \in \mathbb{R}^M \begin{cases} |\hat{\boldsymbol{\theta}}^t \mathbf{a}_m| \leq 1, & \text{si } \hat{o}_m = 0 \\ |\hat{\boldsymbol{\theta}}^t \mathbf{a}_m| = 1, & \text{si } \hat{o}_m \neq 0 \end{cases}, \quad (10b)$$

faisant apparaître des conditions de (non-)nullité des pixels de $\hat{\mathbf{o}}$. Cependant, $\hat{\mathbf{o}}$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sont inconnus avant convergence de l'algorithme. Ainsi, à partir d'une variable duale initiale $\boldsymbol{\theta}_0$ qui satisfait la condition (9b), le test du *screening* se définit en construisant une région \mathcal{R} qui contient $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Le pixel \hat{o}_m dans (10b) est alors nul lorsque $\max_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{R}} |\boldsymbol{\theta}^t \mathbf{a}_m| < 1$. En choisissant \mathcal{R} une sphère de centre \mathbf{c} et rayon r , le test se définit comme

$$\hat{o}_m = 0 \text{ si } |\mathbf{c}^t \mathbf{a}_m| < 1 - r. \quad (11)$$

La règle SAFE peut être définie en construisant la sphère \mathcal{R} de centre $\mathbf{c} = \mathbf{z}/\mu$ et rayon $r = \|\mathbf{z}\|_2^2(1/\mu - 1/\mu_{\max})$ où $\mu_{\max} = \|\mathbf{A}^t \mathbf{z}\|_\infty$ [4]. Dans [6], un *screening* dynamique est proposé, implémenté itérativement avec l'algorithme d'optimisation en raffinant la région de contrôle : pour un itéré donné \mathbf{o}_k et un point dual $\boldsymbol{\theta}_k = \mathbf{H}\mathbf{o}_k - \mathbf{z}$, il s'agit de choisir la sphère de centre $\mathbf{c} = \mathbf{z}/\mu$ et rayon $r = \|(\boldsymbol{\theta}_k - \mathbf{z}/\mu_{\max})\|_2^2$. Cette technique permet d'éliminer plus de pixels au cours des itérations puisque le rayon de la sphère va alors diminuer.

4 Mise en œuvre dans l'algorithme d'optimisation

Le principe de *screening* peut être intégré à l'algorithme FISTA pour l'optimisation du problème (5) : en réduisant le nombre de pixels à mettre à jour (itérativement pour le *screening* dynamique), chaque itération de FISTA sera moins coûteuse. Le *screening* statique basé sur la règle SAFE s'effectue préalablement à l'optimisation et son calcul numérique nécessite essentiellement l'évaluation du produit $\mathbf{A}^t \mathbf{z}$. L'impact du *screening* sur le temps de calcul se produit principalement à deux étapes. Premièrement, le calcul du modèle direct $\mathbf{A}\mathbf{u}_k$ est effectué en parallélisant uniquement sur les pixels \mathbf{p}_n non écartés de \mathbf{u}_k et aussi sur les PSF h_n associées (voir (4)). Certes, étant donné la nature parcimonieuse des itérés \mathbf{u}_k , le calcul de $\mathbf{A}\mathbf{u}_k(\mathbf{p}_n \neq 0)$ est possible et permet de réduire le temps de calcul même sans l'intervention du *screening*. Cependant, l'ajout de ce dernier permet également de réduire le temps de transfert de ces variables de la mémoire du CPU vers celle du GPU. Deuxièmement, le *screening* impacte directement le temps de calcul du modèle adjoint puisque dans ce cas les produits de type $\mathbf{A}^t \mathbf{v}_k$, où $\mathbf{v}_k = \mathbf{A}\mathbf{u}_k$, ne sont réalisés que pour les pixels non écartés : la mise à jour des pixels "screenés" est inutile.

Pour réduire davantage le nombre d'inconnues, on considère également le test du *screening* dynamique. Dans ce cas, la mise à jour du point dual $\boldsymbol{\theta}_k$ (voir en fin de Section 3) requiert essentiellement des calculs déjà réalisés pour les itérés de FISTA. Afin de limiter le surcoût calculatoire, nous proposons de ne réaliser le *screening* dynamique que périodiquement.

5 Résultats expérimentaux

La méthode proposée est testée et validée pour l'inspection d'un échantillon d'acier inoxydable fourni par l'*Electric Power*

Research Institute (Charlotte, North Carolina, USA). Le milieu a une vitesse du son $c = 5650$ m/s et comporte 41 trous alignés à une profondeur $z = 51,6$ mm et séparés par une distance qui varie entre 2,55 et 0,4 mm. Les données FMC sont acquises à l'aide d'un système PIONEER de TPAC (West Chester, Ohio, USA) et d'une sonde de 128 éléments séparés par une distance $d = 0,8$ mm et une fréquence centrale de 3 MHz. Le critère de Rayleigh $R = 0.61\lambda/\sin(\theta)$, où λ est la longueur d'onde dans le matériau et θ dépend de z et de l'ouverture de la sonde, est de 1,6 mm, soit quatre fois la distance minimale entre les trous. Les algorithmes sont implémentés avec Matlab et évalués sur un ordinateur portable avec 16 GB de mémoire, équipé d'un Intel Core i7-9750 HK @ 2.90 GHz avec un processeur de 6 cœurs et d'une carte graphique NVIDIA GeForce RTX 2080.



FIGURE 1 : Image de l'objet inspecté.

La Figure 1 montre l'image de l'échantillon d'acier inoxydable inspecté. On s'intéresse à reconstruire le champ de vision contenant les trous de l'échantillon (voir le cadre rouge dans la Figure 2(a)), de dimension $N_x \times N_z = 1373 \times 273$ pixels avec un pas d'échantillonnage de $d_x \times d_z = 0,05 \times 0,05$ mm². La Figure 2 montre l'image DAS associée (en échelle logarith-

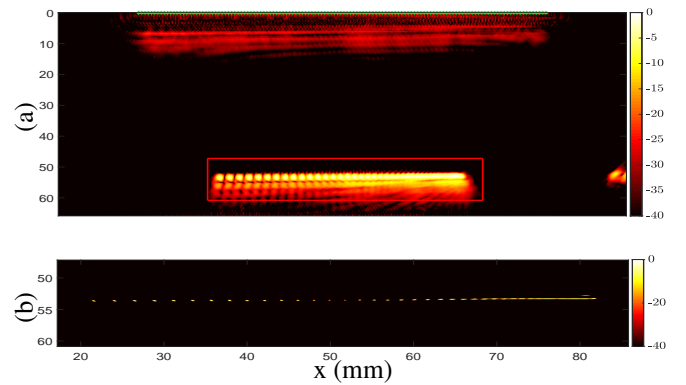


FIGURE 2 : Image reconstruite de l'échantillon d'acier. (a) Reconstruction DAS. La position des éléments de la sonde est marquée en vert et la zone d'intérêt est marquée par le cadre rouge. (b) Reconstruction par déconvolution.

mique d'intensité) en haut et l'image déconvoluée en bas. Une procédure de blanchiment de bruit a été appliquée à toutes les méthodes de reconstruction.

L'image DAS reconstruite présentée en Figure 2(a) est limitée en résolution, en particulier pour $x \geq 65$ mm où les défauts espacés de moins de 1,6 mm sont difficilement séparables. Le temps de calcul de cette méthode est de 0.25 s.

La déconvolution de l'image DAS présentée en Figure 2(b) est obtenue avec $\mu_1 = 0,5\|\mathbf{H}^t \mathbf{o}_{\text{DAS}}\|_\infty$ et $\mu_2 = 5.10^{-6}\|\mathbf{H}^t \mathbf{o}_{\text{DAS}}\|_2$. Cette méthode permet une meilleure localisation et séparation des défauts, en particulier pour $x \leq 70$ mm. Une analyse détaillée sur la résolution des images reconstruites est fournie dans [3]. Le temps de calcul de l'algorithme

sans *screening* est de 11s. L'intégration du *screening* statique permet une accélération d'un facteur d'environ 2.5, avec un temps de calcul de 4.5s, sans compromettre la résolution de la solution à l'optimum.

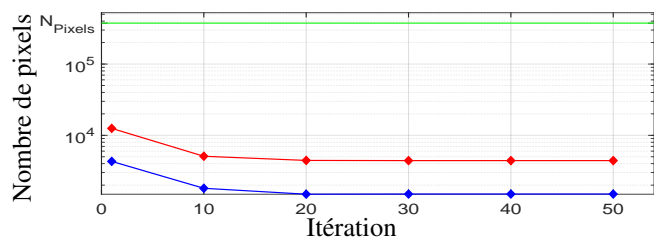


FIGURE 3 : Nombre total de pixels et Nombre de pixels conservés par le *screening* dynamique et nombre de pixels non-nuls dans \mathbf{o}_k en fonction des itérations k .

Nous étudions également la performance du *screening* dynamique appliqué au FISTA toutes les 10 itérations. La courbe bleue dans la Figure 3 indique le nombre de pixels non nul de l'itéré \mathbf{o}_k en fonction des itérations k . Nos tests confirment que cette courbe reste la même, que le test de *screening* soit inclus ou non dans l'algorithme FISTA. La courbe rouge montre le nombre de pixels conservés par le test du *screening* en fonction des itérations k . Le *screening* à l'itération 1 correspond à un test statique qui permet d'éliminer environ 94,5% du nombre total des pixels. Grâce au test dynamique, le nombre de pixels conservés par le *screening* diminue au cours des itérations. Cependant, le test choisi ne permet pas d'éliminer tous les pixels nuls de la solution optimale.

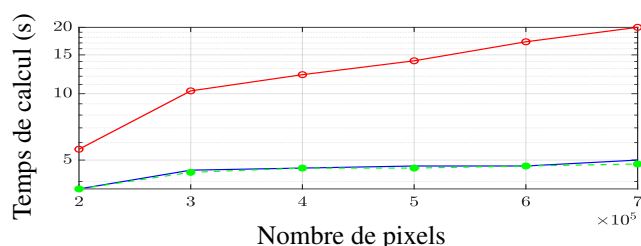


FIGURE 4 : Temps de calcul pour la reconstruction par déconvolution sans *screening*, avec *screening* statique, avec *screening* dynamique chaque 20 itérations

Finalement, Figure 4 montre le temps de calcul de la déconvolution DAS sans et avec *screening* statique et dynamique en variant le nombre de pixels. Cette variation est réalisée en augmentant le champ de vue à reconstruire (cadre rouge) dans la Figure 2(a) suivant l'axe x et z . Le temps de calcul de l'algorithme sans *screening* augmente d'environ un facteur de 3 entre $2 \cdot 10^5$ et $6 \cdot 10^5$ pixels. En revanche, le temps de calcul de l'algorithme avec *screening* statique et dynamique reste approximativement identique puisque dans notre cas, même si N_{pts} augmente, le nombre de pixels conservés dans notre cas reste approximativement le même grâce à la parcimonie de la solution.

6 Conclusion

Dans le contexte du CND, notre contribution permet d'accélérer l'algorithme de déconvolution de l'image DAS sans

compromettre la qualité de la solution en appliquant la technique du *SAFE screening*.

En inspectant un échantillon d'acier, la méthode a permis d'éliminer environ 94% des pixels nuls à l'optimum. Finalement, en considérant le *screening*, nous réduisons le temps de calcul d'un facteur 4 pour un grand nombre de points à estimer. Nous envisageons d'évaluer d'autres tests de *screening*, comme un test *gap-SAFE* de type *Sphere Test* à centre variable [4], qui permettrait d'éliminer plus de variables, voire des tests plus agressifs [12], au risque d'écarter des variables utiles à la reconstruction à l'optimum.

Références

- [1] V. Perrot, M. Polichetti, F. Varray et D. Garcia, « So you think you can das? A viewpoint on delay-and-sum beamforming », *Ultrasonics*, vol. 111, pp. 106309, 2021.
- [2] N. Laroche, S. Bourguignon, E. Carcreff, J. Idier et A. Duclos, « An inverse approach for ultrasonic imaging from full matrix capture data : Application to resolution enhancement in NDT », *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 67, 9, pp. 1877–1887, 2020.
- [3] N. Laroche, S. Bourguignon, J. Idier, E. Carcreff et A. Duclos, « Fast non-stationary deconvolution of ultrasonic beamformed images for nondestructive testing », *IEEE Trans. Comput. Imaging*, vol. 7, pp. 935–947, 2021.
- [4] Z. Xiang, H. Xu et P. J. Ramadge, « Learning sparse representations of high dimensional data on large scale dictionaries », in *NeurIPS*, 2011, vol. 24.
- [5] L. El Ghaoui, V. Viallon et T. Rabbani, « Safe feature elimination in sparse supervised learning », Tech. Rep. UCB/Eecs-2010-126, Eecs Dept., Univ. California, Berkeley, Sep 2010.
- [6] A. Bonnefoy, V. Emiya, L. Ralaivola et R. Gribonval, « A dynamic screening principle for the LASSO », in *EUSIPCO*, 2014, pp. 6–10.
- [7] C. Holmes, B. W. Drinkwater et P. D. Wilcox, « Post-processing of the full matrix of ultrasonic transmit–receive array data for non-destructive evaluation », *NDT E Int.*, vol. 38, 8, pp. 701–711, 2005.
- [8] G. Montaldo, M. Tanter, J. Bercoff, N. Benech et M. Fink, « Coherent plane-wave compounding for very high frame rate ultrasonography and transient elastography », *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectrics. Frequency Control*, vol. 56, 3, pp. 489–506, 2009.
- [9] A. Beck et M. Teboulle, « A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems », *SIAM J. Imaging Sciences*, vol. 2, 1, pp. 183–202, 2009.
- [10] G. H. Golub et C. F. Van Loan, *Matrix computations*, JHU press, 2013.
- [11] H. H. Bauschke, P. L. Combettes *et al.*, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, vol. 408, Springer, 2011.
- [12] R. Tibshirani, J. Bien, J. Friedman, T. Hastie, N. Simon, J. Taylor et R. J. Tibshirani, « Strong rules for discarding predictors in LASSO-type problems », *J. R. Statist. Soc. B*, vol. 74, 2, pp. 245–266, 2012.