

# Filtre de Kalman à base de matrices de covariance empiriques : application à l'imagerie dynamique en radioastronomie.

Nawel ARAB<sup>1</sup> Cyril CANO<sup>2</sup> Isabelle VIN<sup>1</sup> Mohammed Nabil EL KORSO<sup>3</sup> Eric CHAUMETTE<sup>2</sup> Pascal LARZABAL<sup>1</sup>

<sup>1</sup>SATIE, ENS Paris-Saclay, Université Paris-Saclay, 91190 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup>ISAE-SUPAERO, Université de Toulouse, 31000 Toulouse, France

<sup>3</sup>L2S, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, 91190 Gif-sur-Yvette, France

**Résumé** – Dans certaines applications, les mesures sont des matrices de covariances empiriques ("sample covariance matrices", SCMs). Or, les SCMs ne peuvent pas être formulées analytiquement en fonction de paramètres d'états à estimer; elles sont a priori impropres à leur utilisation dans un filtre de Kalman ("Kalman Filter", KF). L'originalité de cette communication est de proposer une régularisation statistique du modèle de mesure compatible avec le KF, dans le cadre du modèle d'observation stochastique. Les performances de la régularisation proposée sont évaluées sur des données de simulations dans un cadre d'imagerie radio astronomique dynamique. Les résultats montrent que cette régularisation permet de suivre efficacement des sources en mouvement dans des scènes complexes avec une précision supérieure à celle d'un KF régularisé de façon standard.

**Abstract** – In some applications, the measures are sample covariance matrices (SCMs). However, SCMs cannot be formulated analytically as a function of state parameters to be estimated; they are a priori unsuitable for their use in a Kalman filter (KF). The originality of this communication is to propose a statistical regularization of the measurement model compatible with KF, under the framework of the unconditional signal model. The performances of the proposed regularization are evaluated on simulation data in a dynamic radio astronomical imaging framework. The results show that this regularization is able to effectively track moving sources in complex scenes with higher accuracy than a KF regularized in a standard way.

## 1 Introduction

La conception et l'utilisation de techniques d'estimation d'un état dynamique à partir d'observations/mesures multiples sont fondamentales dans une pléthore d'applications, telles que la robotique, les systèmes de suivi, de guidage et de navigation [3][4][12][1]. Pour un système état/mesure dynamique linéaire, le filtre de Kalman ("Kalman Filter", KF) fournit le meilleur estimateur linéaire au sens de l'erreur quadratique moyenne sous une forme récursive (c'est d'ailleurs le meilleur estimateur dans le cas d'un système gaussien), sous certaines conditions de non corrélation pour les bruits d'état et de mesure. La solution la plus répandue pour les systèmes état/mesure non linéaires est de recourir à une linéarisation du système, conduisant à ce que l'on appelle le filtre de Kalman linéarisé ou étendu ("Extended Kalman Filter", EKF). En présence de fortes non-linéarités, l'EKF perd son optimalité et d'autres solutions plus robustes (les filtres sigma-point [7][2]) ont été introduites dernièrement. Dans tous les cas, l'hypothèse principale est une parfaite connaissance du système : (i) modèles d'état et de mesure connues, ainsi que leurs paramètres, (ii) entrées connues, et (iii) statistiques de bruit connues (c'est-à-dire, moments du premier et deuxième ordre pour le KF/EKF).

L'originalité de cette communication est de se placer dans un cas où le modèle de mesure n'est pas connu, par exemple lorsque la mesure est une matrice de covariance empirique ("sample covariance matrices", SCMs) basée sur un nombre fini d'échantillons. En effet, dans ce cas, même si le modèle de mesure instantané associé à chaque échantillon est un modèle paramétrique linéaire, la SCM à horizon fini ne peut être ex-

mée analytiquement en fonction des paramètres de ce modèle linéaire, ce qui la rend a priori impropre à une incorporation dans un modèle état/mesure. En fait, cette absence de formulation analytique peut être contournée dans le cas d'observations instantanées linéaires de sources multiples en présence d'un bruit additif (modèle d'observation stochastique), lorsque les sources sont non corrélées et que l'état à estimer est la puissance des sources.

En effet, sous l'hypothèse d'un modèle d'état dynamique déterministe (pas de bruit d'état), et d'observations instantanées i.i.d., nous proposons une méthode de régularisation du modèle de mesure permettant de l'exprimer en fonction de l'état. Cette régularisation repose sur une linéarisation exacte, laquelle introduit un bruit additif dont la matrice de covariance dépend de l'état courant, cas non-standard pour un modèle état/mesure. Nous explicitons cette dépendance dans le cas de mesures Gaussiennes (modèle d'observation stochastique gaussien).

Une version implémentable de ce système régularisé, basée sur une estimation de l'état initial à partir de la première observation, exhibe le gain du KF attendu, et permet d'obtenir des estimations plus précises de l'état dynamique du système, si l'estimateur de l'état initial est suffisamment précis.

Cette nouvelle méthode de régularisation des SCMs par linéarisation est appliquée à l'imagerie dynamique pour la radioastronomie. Nous nous intéresserons notamment à l'estimation des pixels d'une image qui évolue au cours du temps. Cette image est constituée de sources célestes dynamiques qui émettent des signaux incohérents et monochromatiques. On se basera pour cela sur une série d'observations acquises au fil du temps. Ces observations sont les SCMs des signaux reçus

par le réseau d'antennes.

Dans la deuxième section de ce papier le modèle d'observation est introduit. La section 3 est dédiée à la régularisation du modèle, passant notamment par le calcul de la valeur moyenne et de la matrice de covariance du bruit de linéarisation introduit. Dans la section 4 une application à la radio astronomie sera présentée afin de mettre en évidence les attentes attendues par rapport à un KF régularisé de façon standard.

## 2 Modèle de mesure

À chaque instant  $t_k$ , on considère l'observation du mélange linéaire de  $Q$  sources,  $\mathbf{s}_k \in \mathbb{C}^{Q \times 1}$ , en présence d'un bruit additif,  $c$ -à- $d$  de signaux complexes circulaires centrés,

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k, \quad (1)$$

où  $\mathbf{A}_k$  est la matrice de réponse du système,  $\mathbf{n}_k$  le bruit de mesure et  $\mathbf{z}_k$  le vecteur d'observations. On note  $\mathbf{C}_{\mathbf{z}_k}$  la matrice de covariance des observations

$$\mathbf{C}_{\mathbf{z}_k} = \mathbb{E} [\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H] = \mathbf{A}_k \mathbb{E} [\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^H] \mathbf{A}_k^H + \mathbf{C}_{\mathbf{n}_k}. \quad (2)$$

Toutefois, en raisons de contraintes liées à la capacité de traitement, on ne dispose que de la SCM de ces observations. À chaque instant  $t_k$ , l'observation  $\mathbf{z}_k$  est échantillonnée  $N$  fois  $\{\mathbf{z}_k(1), \dots, \mathbf{z}_k(N)\}$ ,  $N$  échantillons i.i.d à partir desquels la SCM est calculée

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{z}_k(n) \mathbf{z}_k(n)^H, \quad (3)$$

et qui converge en probabilité vers  $\mathbf{C}_{\mathbf{z}_k}$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Nous désirons estimer les intensités instantanées  $\mathbf{x}_k$  des signaux  $\mathbf{s}_k$  aux instants  $\{t_1, \dots, t_k\}$  à partir de la SCM vectorisée  $\mathbf{y}_k$ ,

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} \text{vec} \left( \Re \left( \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k} \right) \right) \\ \text{vec} \left( \Im \left( \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k} \right) \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re \left( \text{vec} \left( \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k} \right) \right) \\ \Im \left( \text{vec} \left( \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k} \right) \right) \end{pmatrix} \quad (4)$$

lorsque les intensités  $\mathbf{x}_k$  sont régies par un modèle dynamique (elles varient en fonction du temps). Les  $N$  échantillons d'observations sont obtenus conditionnellement à une réalisation particulière, potentiellement aléatoire, de l'état  $\mathbf{x}_k$ . Nous nous limitons cependant au cas où l'état  $\mathbf{x}_k$  est déterministe.

## 3 Régularisation des mesures

Pour implémenter un KF, il faut disposer d'un système linéaire dynamique décrit par des équations état/mesure de la forme

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} \quad (5)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (6)$$

où  $\mathbf{y}_k$  est le vecteur d'observations. Les matrices d'évolution  $\mathbf{F}_k$  et de mesure  $\mathbf{H}_k$  sont supposées connues, tout comme la moyenne et la covariance du bruit de mesure  $\mathbf{v}_k$ .

La relation asymptotique linéaire ( $N \rightarrow \infty$ ) qui lie  $\mathbb{E} [\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k}]$  et  $\mathbf{x}_k$ , suggère de régulariser la SCM (2) en prenant  $\mathbf{H}_k$  dans (6) sous la forme

$$\mathbf{H}_k = \left[ \begin{pmatrix} \Re(\mathbf{a}_{k,1}^* \otimes \mathbf{a}_{k,1}) \\ \Im(\mathbf{a}_{k,1}^* \otimes \mathbf{a}_{k,1}) \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \Re(\mathbf{a}_{k,Q}^* \otimes \mathbf{a}_{k,Q}) \\ \Im(\mathbf{a}_{k,Q}^* \otimes \mathbf{a}_{k,Q}) \end{pmatrix} \right], \quad (7)$$

où les  $\mathbf{a}_{k,q}$  sont les vecteurs colonnes de la matrice  $\mathbf{A}_k$ . Il est maintenant nécessaire de déterminer la valeur moyenne et la matrice de covariance du bruit de linéarisation  $\mathbf{v}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k$ . En effet, la matrice de covariance du bruit de mesure est un élément clé du KF. Elle caractérise la précision des mesures et intervient dans la quantification de la qualité de l'estimation de l'état du système à chaque itération. En particulier, elle intervient dans le calcul de la matrice de gain de Kalman qui permet de combiner la prédiction de l'état du système avec les observations, afin d'obtenir une estimation plus précise de l'état du système.

### 3.1 Moyenne du bruit de linéarisation

Puisque  $\mathbf{x}_k$  est déterministe, le modèle linéaire (6) est caractérisé par les identités

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}_k] = \mathbb{E}[\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k] = \mathbb{E}[\mathbf{y}_k] - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k \quad (8)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}_k} = \mathbf{C}_{\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k} = \mathbf{C}_{\mathbf{y}_k} \quad (9)$$

et

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}_k] = \left[ \Re \left( \mathbb{E} [\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k}] \right), \Im \left( \mathbb{E} [\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k}] \right) \right]^T.$$

Or, puisque  $\{\mathbf{z}_k(1), \dots, \mathbf{z}_k(N)\}$  sont i.i.d,

$$\mathbb{E}[\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k}] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{z}_k(n) \mathbf{z}_k(n)^H \right] = \mathbb{E} [\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H] = \mathbf{C}_{\mathbf{z}_k},$$

et

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}_k] = \left[ \Re(\mathbf{C}_{\mathbf{z}_k}), \Im(\mathbf{C}_{\mathbf{z}_k}) \right]^T = \mathbf{y}_k^a = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^a,$$

ce qui conduit à

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}_k] = \mathbf{v}_k^a = \begin{pmatrix} \Re(\text{vec}(\mathbf{C}_{\mathbf{n}_k})) \\ \Im(\text{vec}(\mathbf{C}_{\mathbf{n}_k})) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

### 3.2 Covariance du bruit de linéarisation

Il reste à évaluer la matrice de covariance du bruit de linéarisation  $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_k} = \mathbf{C}_{\mathbf{y}_k}$ . Soit  $\mathbf{z}_k$  un vecteur aléatoire complexe tel que  $\mathbf{z}_k(n) = \alpha_n + j\beta_n$ , alors

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} \text{vec} \left( \Re \left( \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k} \right) \right) \\ \text{vec} \left( \Im \left( \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k} \right) \right) \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} \alpha_n \otimes \alpha_n + \beta_n \otimes \beta_n \\ \alpha_n \otimes \beta_n - \beta_n \otimes \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Puisque les réalisations  $\{\mathbf{z}_k(1), \dots, \mathbf{z}_k(N)\}$  sont i.i.d

$$\mathbf{C}_{\mathbf{y}_k} = \frac{1}{N} \mathbf{C} \begin{pmatrix} \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \beta \\ \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \mathbf{C} \begin{pmatrix} \Re(\mathbf{z}_k^* \otimes \mathbf{z}_k) \\ \Im(\mathbf{z}_k^* \otimes \mathbf{z}_k) \end{pmatrix}.$$

Finalement,  $\mathbf{C}_{\mathbf{y}_k}$  est de la forme

$$\mathbf{C}_{\mathbf{y}_k} = \frac{1}{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1,1}(t_k) & \mathbf{C}_{2,1}^T(t_k) \\ \mathbf{C}_{2,1}(t_k) & \mathbf{C}_{2,2}(t_k) \end{bmatrix} - \mathbf{y}_k^a (\mathbf{y}_k^a)^T \right), \quad (11)$$

où  $\mathbf{y}_k^a = \mathbb{E}[\mathbf{y}_k]$  et  $\mathbf{C}_{1,1}(t_k)$ ,  $\mathbf{C}_{2,2}(t_k)$  et  $\mathbf{C}_{2,1}(t_k) \in \mathbb{R}^{M^2 \times M^2}$  sont à déterminer. Par exemple,

$$\mathbf{C}_{1,1}(t_k) = \mathbb{E}[(\alpha \otimes \alpha)(\alpha \otimes \alpha)^T] + \mathbb{E}[(\alpha \otimes \alpha)(\beta \otimes \beta)^T] + \mathbb{E}[(\beta \otimes \beta)(\alpha \otimes \alpha)^T] + \mathbb{E}[(\beta \otimes \beta)(\beta \otimes \beta)^T].$$

Posons  $\mathbf{I}_{M^2} = [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_M \dots \mathbf{e}_{m+M(m'-1)} \dots \mathbf{e}_{M^2}]$ ; alors

$$(\mathbf{C}_{1,1})_{m+M(m'-1), l+M(l'-1)} = \mathbf{e}_{m+M(m'-1)}^T \mathbf{C}_{1,1} \mathbf{e}_{m+M(m'-1)},$$

$$(\mathbf{C}_{1,1})_{m+M(m'-1),l+M(l'-1)} = \mathbb{E}[\alpha_m \alpha_{m'} \alpha_l \alpha_{l'}] + \mathbb{E}[\alpha_m \alpha_{m'} \beta_l \beta_{l'}] + \mathbb{E}[\beta_m \beta_{m'} \alpha_l \alpha_{l'}] + \mathbb{E}[\beta_m \beta_{m'} \beta_l \beta_{l'}]. \quad (12)$$

Il suffit alors de calculer les termes d'espérance pour déterminer la matrice de covariance du bruit de linéarisation  $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_k}$ .

#### Vecteur aléatoire gaussien

Si  $\mathbf{s}_k$  est un signal complexe circulaire centré gaussien,  $\mathbf{s}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_k) \in \mathbb{C}^{Q \times 1}$ , que l'on observe à travers l'équation (1), alors  $\mathbf{z}_k$  est également un vecteur complexe centré circulaire gaussien,  $\mathbf{z}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{\mathbf{z}_k})$ . Dans ce cas, la SCM de  $\mathbf{z}_k$  suit une loi de Wishart complexe à  $N$  degrés de liberté,  $\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k} \sim \mathcal{CW}(\mathbf{C}_{\mathbf{z}_k}, N)$ , dont les moments d'ordre 2 sont bien connus. Nous pouvons aussi considérer  $\mathbf{z}_k$  à travers ses parties réelle  $\alpha$  et imaginaire  $\beta$ , lesquelles sont chacune des variables aléatoires gaussiennes. En effet, si  $\mathbf{w} = (\alpha, \beta)^T \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{\mathbf{w}})$ , alors

$$\mathbb{E}[(\mathbf{w}^T \mathbf{B} \mathbf{w})(\mathbf{w}^T \mathbf{D} \mathbf{w})] = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{C}_{\mathbf{w}} (\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) \mathbf{C}_{\mathbf{w}}) + \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{C}_{\mathbf{w}}) \text{tr}(\mathbf{D} \mathbf{C}_{\mathbf{w}}).$$

En particulier, en posant  $\mathbf{B} = \mathbf{e}_m \mathbf{e}_{m'}^T$  et  $\mathbf{D} = \mathbf{e}_l \mathbf{e}_{l'}^T$ , alors

$$\mathbb{E}[w_m w_{m'} w_l w_{l'}] = (\mathbf{C}_{\mathbf{w}})_{m,m'} (\mathbf{C}_{\mathbf{w}})_{l,l'} + (\mathbf{C}_{\mathbf{w}})_{m,l} (\mathbf{C}_{\mathbf{w}})_{m',l'} + (\mathbf{C}_{\mathbf{w}})_{m,l'} (\mathbf{C}_{\mathbf{w}})_{m',l}$$

Dans notre cas,  $\mathbf{w}^T = (\Re(\mathbf{z}_k)^T, \Im(\mathbf{z}_k)^T)^T$ ;  $\mathbf{z}_k$  étant circulaire,  $\mathbf{C}_{\mathbf{w}}$  est de la forme

$$\mathbf{C}_{\mathbf{w}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{C}_{\mathbf{z}_k}) & -\Im(\mathbf{C}_{\mathbf{z}_k}) \\ \Im(\mathbf{C}_{\mathbf{z}_k}) & \Re(\mathbf{C}_{\mathbf{z}_k}) \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $\mathbf{C}_{2,2}$  et  $\mathbf{C}_{2,1}$  s'obtiennent de manière similaire.

Le Filtre de Kalman exactement linéarisé, noté KF, découle alors de l'algorithme du filtre de Kalman classique dans lequel on introduit la valeur moyenne et la matrice de covariance du bruit de linéarisation calculés en (10) et (11).

---

#### Algorithme 1 : Kalman Filter

---

- 1 Entrées :  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ ,  $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ ,  $\mathbf{y}_k$
  - 2 Sorties :  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ ,  $\mathbf{P}_{k|k}$
  - 3
  - 4 Prédiction :
  - 5  $\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^H$
  - 6  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$
  - 7 Mise à jour :
  - 8  $\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{m}_{\mathbf{v}_k}$ , où  $\mathbf{m}_{\mathbf{v}_k}$  est donnée par (10)
  - 9  $\mathbf{S}_{k|k} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^H + \mathbf{C}_{\mathbf{v}_k}$ , où  $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_k}$  est donnée par (11)
  - 10  $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^H \mathbf{S}_{k|k}^{-1}$
  - 11  $\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$
  - 12  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})$
- 

## 4 Application à la radioastronomie

### 4.1 Contexte et scénario radioastronomiques

Nous nous plaçons dans le contexte du réseau VLA (Very Large Array) implanté au nouveau Mexique [11]. Il s'agit d'un réseau interférométrique à trois branches représenté en Figure 1a, constitué de  $p = 3 \times 9$  antennes. L'instrument acquiert des signaux provenant de la voute céleste. Cette dernière

correspondant à la superposition de plusieurs sources astrophysiques. L'image considérée est de taille  $Q = 64 \times 64$  pixels. Elle correspond à une discrétisation du ciel où chaque pixel correspond à une direction d'arrivée pour laquelle l'intensité du signal est à estimer. On note  $s_q(t_k)$  le signal émis par le  $q$ -ième pixel à l'instant  $t_k$ . Les  $\{s_q(t_k)\}_{1 \leq q \leq Q}$  sont des signaux circulaires complexes Gaussiens mutuellement indépendants, i.i.d, et sont vectorisés. Ils forment un vecteur de dimension  $Q \times 1$  noté  $\mathbf{s}(t_k)$  tel que  $s_q(t_k) \sim \mathcal{CN}(0, (\mathbf{x}_k)_q)$  où  $(\mathbf{x}_k)_q$  est l'intensité de le  $q$ -ième pixel à l'instant  $t_k$ . Le bruit de mesure de l'interféromètre est un signal complexe gaussien centré i.i.d. Il est vectorisé pour former un vecteur  $\mathbf{n}(t_k)$  de taille  $p \times 1$ . Lorsque la condition de bande étroite est respectée, le signal reçu par la  $j$ -ième antenne peut être représenté par [10]

$$\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{A} \mathbf{s}(t_k) + \mathbf{n}(t_k) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}_q(t_k) s_q(t_k) + \mathbf{n}(t_k), \quad (13)$$

où  $\mathbf{A} = \exp(-j2\pi/\lambda \mathbf{R} \mathcal{L}^T)$  est la matrice des vecteurs directeurs,  $\mathbf{R}$  est la matrice  $p \times 2$  des positions des antennes et  $\mathcal{L}$  est la matrice  $64^2 \times 2$  des vecteurs de direction des sources. À chaque instant  $t_k$  le signal reçu est composé de  $N$  échantillons  $\{\mathbf{z}_n(t_k)\}_{1 \leq n \leq N}$  i.i.d à partir desquels la matrice de covariance empirique  $\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_k}$  (visibilités astronomiques) est calculée [9].

L'objectif est d'estimer le vecteur d'intensités  $\mathbf{x}_k$  des pixels à partir des visibilités mesurées à chaque instant  $t_k$ . Pour ce faire, nous utilisons le filtre de Kalman exactement linéarisé (KF) introduit dans la section précédente.

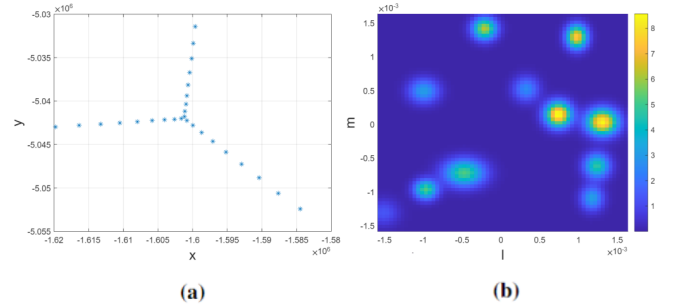
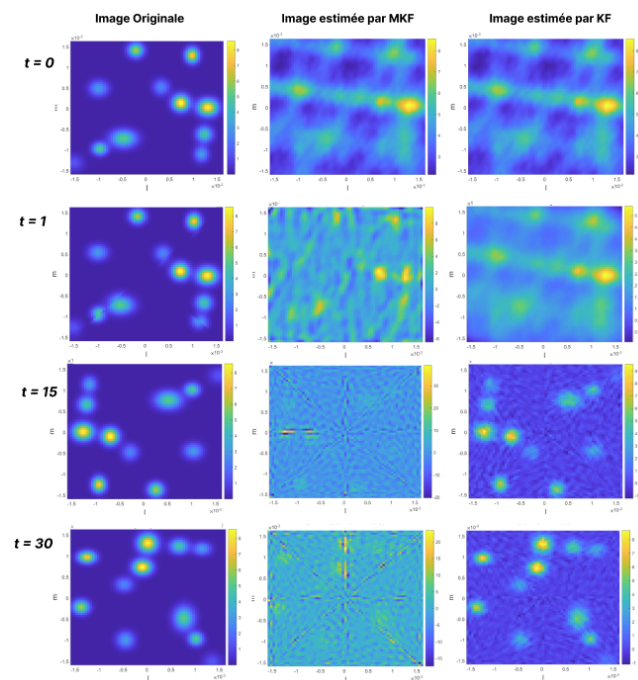


FIGURE 1 : (a) Positions des antennes du réseau VLA, en coordonnées terrestres (chaque branche mesure 21km), et (b) image représentant le ciel à l'instant initial  $t = 0$

### 4.2 Simulations

Les images considérées sont de taille  $64 \times 64$  pixels et contiennent dix sources astrophysiques modélisées par des gaussiennes bivariées Figure 1b. À chaque instant  $t_k$ , une rotation d'angle  $\theta_k$  est appliquée à l'image précédente, simulant un modèle dynamique. Nous souhaitons estimer l'ensemble des  $64 \times 64$  pixels/intensités  $\mathbf{x}_k$  aux différents instants  $t_k$ . Rappelons que la contribution essentielle de cette communication est d'avoir caractérisé statistiquement une linéarisation exacte de la SCM. Si l'obtention de de la moyenne (10) du bruit de linéarisation est triviale, le calcul de sa matrice de covariance (11) est essentiel et n'était pas connue, à notre connaissance, notamment dans le cas où l'observation suit une loi de Wishart complexe. La méthode proposée est donc comparée à un KF dans lequel la matrice de covariance du bruit de mesure est régularisée de façon standard dans ce contexte. En effet, quand la matrice de covariance d'un bruit est inconnue

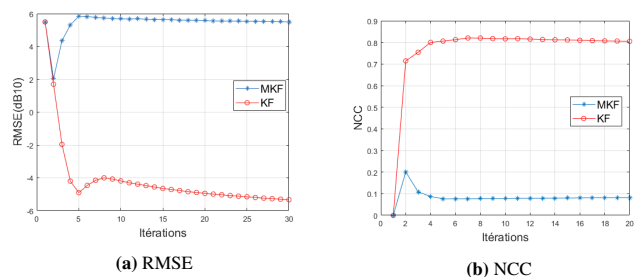
ou mal connue, étant donné que la matrice est définie positive,  $C_{v_k}$  est souvent paramétrée comme une matrice diagonale [6]. Plus précisément, sous l'hypothèse d'un bruit de mesure i.i.d., cette matrice est de la forme  $rI_d$ , où le coefficient  $r$  est ajusté empiriquement. Dans ce cas le modèle de mesure est mal spécifié et nous parlerons de KF mal spécifié ("misspecified Kalman filter", MKF).



**FIGURE 2 :** Images estimées à différents instants. Chaque ligne correspond à un instant, on retrouve sur la colonne de gauche l'image source, au milieu l'image estimée par le MKF et à droite l'image estimée par le KF.

L'initialisation d'un KF nécessite l'estimation de l'état initial  $\hat{x}_1$  qui ici est donnée par un filtrage spatial (beamforming) [13] pour le MKF et le KF.

Les estimations fournies par les deux méthodes sont affichées en Figure 2. Il apparaît que l'utilisation du KF permet visuellement d'améliorer l'estimation du filtrage spatial, ce qui n'est pas le cas pour le MKF. Ces résultats sont confirmés numériquement par le calcul de deux mesures d'erreur de reconstruction, la racine de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) [8] et la mesure de cross-corrélation normalisée (NCC) [5], pour lesquels le KF exhibe de meilleurs résultats. La première mesure est sensible à une erreur d'estimation de l'intensité pixel par pixel alors que la seconde est sensible à une erreur d'estimation de la structure de l'image. Les résultats sont affichés en Figure 3.



**FIGURE 3 :** Évolution du RMSE et de la NCC au fil des itérations

## 5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons proposé une régularisation statistique du modèle de mesure pour un KF lorsque les observations sont du second ordre. Pour cela, nous avons développé les calculs nécessaires pour la caractérisation du bruit de linéarisation dans le cas gaussien. Les performances de l'algorithme proposé ont été évaluées dans un contexte d'imagerie dynamique en radioastronomie. Les résultats montrent que les performances de notre approche sont supérieures à celles d'un filtre de Kalman dont la matrice de covariance du bruit de mesure est régularisée de façon standard.

## Références

- [1] P.D. *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*. J. Navig, 2014.
- [2] I. ARASARATNAM et S. HAUKEIN : *Cubature Kalman Filters*. IEEE Trans. Autom. Control, 2009.
- [3] J.L. CRASSIDIS et J.L. JUNKINS : *Optimal Estimation of Dynamic Systems, 2nd ed.* CRC Press : Boca Raton, FL, USA ; Taylor & Francis Group : Abingdon, UK, 2012.
- [4] P.S.R. DINIZ : *Adaptive Filtering : Algorithms and Practical Implementation, 4th ed.* Springer : Cham, Switzerland, 2013.
- [5] J. FARAH : *Selective Dynamical Imaging of Interferometric Data*. The American Astronomical Society., 2022.
- [6] S. FORMENTIN et S. BITTANTI : *An insight into noise covariance estimation for Kalman filter design*. IFAC Proceedings Volumes, 2014.
- [7] S. JULIER et J. UHLMANN : *A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators*. IEEE Trans. Autom. Control, 2000.
- [8] K. KURAMOCHI et K. AKIYAMA : *Superresolution Interferometric Imaging with Sparse Modeling Using Total Squared Variation : Application to Imaging the Black Hole Shadow*. The American Astronomical Society, 2018.
- [9] M. Pesavento R. Boyer P. Larzabal M. BROSSARD, M. N. El Korso et S. WIJNHOLDS : *Parallel Multi-Wavelength Calibration Algorithm for Radio Astronomical Arrays*. Sig. Process. Journal, 2018.
- [10] F. Roemer M. HAARDT, M. Pesavento et M. N. El KORSO : *Subspace methods and exploitation of special array structures*. Academic Press Library in Signal Processing, 2014.
- [11] P.J. NAPIER et A.R. THOMSON : *The Very large Array : Design and Performance of a Modern Synthesis Radio Telescope*. 1983.
- [12] D. SIMON : *Optimal State Estimation : Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches*. John Wiley & Sons : Hoboken, NJ, USA, 2013.
- [13] S.J. WIJNHOLDS : *Fundamental Imaging Limits of Radio Telescope Arrays*. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, vol. 2, no. 5, 2008.