Analyse des effets du bruit de phase Gaussien sur un signal DFT-s-OFDM

Yaya BELLO David DEMMER Jean-Baptiste DORÉ CEA-Leti, 17 Avenue des Martyrs, 38054 Grenoble, France

Résumé – Dans cet article, nous présentons les effets du bruit de phase Gaussien sur un système DFT-s-OFDM. La présence de ce dernier induit l'apparition de deux termes d'interférence qui sont : (i) l'erreur de phase par porteuse (SPE) et (ii) l'interférence entre porteuse (ICI). De plus, nous montrons que le SPE peut être modélisé par un déphasage tel que la phase suit une distribution Gaussienne non corrélée. Par contre l'ICI ne suit pas une distribution Gaussienne complexe non corrélée. La nature non corrélée du bruit de phase rend impossible son estimation et donc sa compensation. Afin d'améliorer les performances du système, nous proposons un détecteur basé sur les propriétés stochastiques du SPE et de l'ICI. Les performances du détecteur proposé sont meilleures comparées à celles du récepteur basé sur la distance Euclidienne.

Abstract – In this paper, we present the effects of a Gaussian phase noise model on a DFT-s-OFDM system. We show that the presence of this phase noise induces two interference terms which are: (i) the subcarrier phase error (SPE) and (ii) the intercarrier interference (ICI). Additionally, we notice that the SPE can be modeled as a phase shift where the phase follows an uncorrelated Gaussian random process. Regarding the ICI, it cannot be considered as an uncorrelated complex gaussian random process. The uncorrelated nature of the phase noise makes difficult to estimate it. In order to improve the system performance, we propose a novel detection criterion based on stochastic properties of the SPE and ICI. We demonstrate that the proposed detector outperforms the conventional detector based on Euclidean distance.

1 Introduction

Le déploiement des technologies cellulaires dans des bandes de largeurs plus importantes et à des fréquences plus élevées est une solution envisagée pour augmenter la capacité des systèmes de transmission sans fils. Le spectre "sub-THz" ([100 – 300] GHz) est identifié comme un candidat potentiel pour la 6G [1]. Une largeur de bande agrégée de 58, 6 GHz a été identifiée [2]. La norme 5G New Radio (5G-NR) est aujourd'hui limitée à 52,6 GHz. Toutefois, le 3GPP (3rd Generation Partnership Project) envisage l'utilisation de nouveaux spectres pour les futures technologies de communication. Des recherches sont menées pour étudier l'adaptation de la couche PHY 5G-NR à ces fréquences [3] en vue d'utiliser des formes d'onde 5G-NR standard.

Le DFT-s-OFDM (*Discrete Fourier Transform* (DFT) spread Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)) est un candidat pour le spectre sub-THz [4]. Il consiste en un précodage par une DFT d'un signal OFDM. Ainsi, il émule partiellement un système de transmission mono-porteuse (MP) et présente l'avantage d'un PAPR (*Peak-to-Average Power Ratio*) faible comparé à l'OFDM [5]. Cela permet de faire fonctionner les amplificateurs de puissance avec une plus grande efficacité énergétique.

La transmission dans les bandes sub-THz présente certaines limitations telles que le bruit de phase (PN) essentiellement généré par les oscillateurs. Le modèle de PN Gaussien a déjà été exploité dans [6, 7] et dans ces contributions, un système MP est pris en compte. [8] présente les effets du PN Gaussien sur les formes d'onde multiporteuses telles que l'OFDM et le DFT-s-OFDM. Bien qu'il soit pris en compte dans [8], ses effets ne sont pas bien étudiés et compris dans le cas du DFTs-OFDM. C'est pourquoi nous étendons l'étude des effets du PN Gaussien dans un système DFT-s-OFDM dans ce travail.

Notations

Les lettres minuscules en gras et soulignées <u>a</u> représentent des vecteurs tels que a_k est k^{ieme} élément de ce dernier. Les symboles $a_{k_{\rho}}$ et $a_{k_{\theta}}$ représente le module et la phase de l'élément a_k . Les lettres majuscules en gras **A** représentent les matrices. Le symbole $\operatorname{diag}_k\{\cdot\}$ retourne le k^{ieme} élément de la diagonale de **A** et $E[\cdot]$ représente l'espérance mathématique. Les termes $\mathfrak{Re}\{\cdot\}$ et $\mathfrak{Im}\{\cdot\}$ sont les opérateurs qui retournent la partie réelle et la partie imaginaire.

2 Modèle du système

2.1 Modèle de canal et de bruit de phase

Pour une transmission dans le spectre sub-THz, il a été démontré que le trajet direct fournit la majeure partie de la contribution énergétique de la transmission radio fréquence [9, 10]. Cela se justifie notamment par l'utilisation d'antennes directionnelles à gain élevé qui filtrent spatialement le canal [10]. Pour simplifier le modèle de canal dans ce travail, nous supposons donc un canal de propagation direct et plat en fréquence. Nous supposons également un système de communication cohérent avec présence de bruit de phase et un récepteur synchronisé en temps et en fréquence.

En ce qui concerne le PN, [11] le modélise comme un processus aléatoire Gaussien. Ils donnent une relation entre la puissance du PN et la largeur de bande qui est $\sigma_{\phi}^2 = K_0 B$, où K_0 est la densité spectrale de puissance de la contribution Gaussienne du PN. La valeur de K_0 varie avec la fréquence porteuse F_c . Dans le cas des transmissions sub-THz et THz, F_c et B sont élevées toutes deux. Par conséquent, le modèle de PN choisi dans cet article est un processus aléatoire Gaussien non corrélé défini par :

$$\phi(\tau) \backsim \mathcal{N}(0, \sigma_{\phi}^2) \cdot \tag{2}$$

$$\beta(k, N_a, N, \phi) = \frac{1}{N_a} \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N_a - 1} \sum_{m=0}^{N_a - 1} \sum_{p=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(m-f)}{N_a} p} e^{-j2\pi \frac{(m-f)}{N_a} k} e^{j\phi(p)},$$

$$\gamma(k, N_a, N, \phi) = \frac{1}{N_a} \frac{1}{N} \sum_{n=0, n \neq k}^{N_a - 1} s_n \sum_{f=0}^{N_a - 1} \sum_{m=0}^{N_a - 1} \sum_{p=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(m-f)}{N} p} e^{j2\pi \frac{kf - nm}{N_a}} e^{j\phi(p)},$$

$$\eta(k, N_a, N) = \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N_a - 1} \sum_{p=0}^{N-1} n(p) e^{-j2\pi \frac{fp}{N_a}} e^{j2\pi \frac{kf}{N_a}}.$$
(1)

Nous considérons deux niveaux de PN : (i) le PN élevé pour une puissance de PN $\sigma_{\phi}^2 = 0.1$ et (ii) le PN faible pour une puissance de PN $\sigma_{\phi}^2 = 0.01$.

2.2 DFT-s-OFDM avec présence du bruit de phase

Soit s_k le signal transmis sur la k^{ieme} sous-porteuse DFT où $k = \{0, \dots, N_a - 1\}$ avec N_a le nombre de sous-porteuses DFT. Les symboles transmis $s_k \in C$, où C est l'ensemble des symboles QAM supportés. Compte tenu du modèle de canal présenté dans 2.2, le signal reçu¹ sur chaque porteuse k et pour chaque symbole DFT-s-OFDM, après la DFT inverse, peut être exprimé comme suit :

$$r_k = s_k \beta(k, N_a, N, \phi) + \gamma(k, N_a, N, \phi) + \eta(k, N_a, N),$$
(3)

avec β , γ et η définis respectivement dans (1). Le terme $\beta(k, N_a, N, \phi)$ est responsable de la rotation des symboles démodulés. $\gamma(k, N_a, N, \phi)$ représente l'ICI et le dernier terme $\eta(k, N_a, N) \sim \mathbb{CN}(0, \sigma_n^2)$ représente le bruit thermique. Le terme N représente la taille des blocs FFT (*Fast Fourier Trans*form). Dans la section suivante, nous étudierons les propriétés stochastiques des termes $\beta(k, N_a, N, \phi)$ et $\gamma(k, N_a, N, \phi)$.

2.3 Discussions

Afin d'observer les effets du PN sur les systèmes OFDM et DFT-s-OFDM, nous affichons les fonctions de vraisemblance du signal reçu dans la figure 1 en tenant compte d'un niveau de PN élevé et un rapport signal sur bruit (SNR) élevé. Sur la figure 1a, on peut observer que dans un système MP, la présence du PN entraîne une rotation des symboles transmis. Dans le cas d'un système OFDM (figure 1b), Les symboles reçus ne subissent par de rotation mais sont bruités par la présence d'ICI.

Dans le système DFT-s-OFDM, on peut noter un comportement dépendant de la sous-porteuse DFT. Pour un indice de sous-porteuse k = 1 (cf. figure 1c), on peut observer une plus grande rotation des symboles reçus et un effet ICI moindre. En revanche, pour un indice de sous-porteuse k = 10 (cf. figure 1d), on y observe moins de rotation et plus d'effet ICI par rapport à la figure 1c.

3 Analyse des termes d'interférence

Dans cette section, nous étudions les propriétés stochastiques des termes $\beta(k, N_a, N, \phi)$ et $\gamma(k, N_a, N, \phi)$. Par la suite, nous notons $\beta_k = \beta(k, N_a, N, \phi)$, $\gamma_k = \gamma(k, N_a, N, \phi)$ et $\eta_k = \eta(k, N_a, N)$.



FIGURE 1 : Effet du bruit de phase sur une 16-QAM avec un SNR = 50 dB (a) signal MP (b) signal OFDM (c) signal DFT-s-OFDM sur la porteuse k = 1 (d) signal DFT-s-OFDM sur la porteuse k = 10.

3.1 L'erreur de phase par porteuse

Exprimons le terme β_k sous la forme $\beta_k = \rho_k e^{j\Phi_k}$ où ρ_k et Φ_k sont respectivement l'amplitude et la phase de β_k . Étant donné l'expression complexe de β_k (1), nous étudions ses propriétés par Monte-Carlo. Nous considérons ensuite deux configurations présentées ci-dessous :

Première configuration : Afin d'observer l'effet de la variation de la taille du précodage DFT sur notre système, nous avons fixé le nombre totale de sous-porteuses OFDM (N = 64) et nous avons varié le nombre de sous-porteuse DFT-s-OFDM $(N_a = \{20, 30, 40, 50, 60\})$. Nous avons remarqué que $E[\rho_k]^2$ et la variance de Φ_k ($E[|\Phi_k|^2])^3$ présentent un comportement par sous-porteuse qui apparaît à partir de $N_a = 40$ (correspond à $\zeta \triangleq \frac{N_a}{N} = 0.625$) et qui s'accentue quand $N_a \to N$. Ce qui nous permet de comprendre le phénomène mis en évidence sur les figures 1c et 1d.

Deuxième configuration : Dans ce cas, nous modifions la taille des blocs de FFT et de DFT en maintenant le rapport ζ constant $((N_a, N) = \{(60, 64), (120, 128), (240, 256)\})$. Nous avons observé que $E[\rho_k]$ et $E[|\Phi_k|^2]$ ne varient pas. Nous en concluons donc que la variable aléatoire β_k dépend du rapport ζ . En ce qui concerne son amplitude ρ_k , son espérance est très proche de 1 et sa variance tend vers zéro. Par la suite, nous considérerons donc $\rho_k = 1$.

Pour mieux comprendre le phénomène susmentionné, nous examinons le cas particulier d'une variation importante de la sous-porteuse, *i.e.* $(N_a, N) = (60,64)$. Nous simulons tout d'abord la fonction de répartition de Φ_k et la comparons à la

¹Obtenu en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier.

²Appliquée dans le domaine temporel pour chaque sous-porteuse.

³Nous avons observé que la variable aléatoire Φ_k est de moyenne nulle.



FIGURE 2 : Fonction de répartition de $X = \Phi_k$ pour $k = \{2, 10\}$.

fonction de répartition d'un processus aléatoire gaussien avec une variance $\sigma_{\Phi_k}^2 = \operatorname{diag}_k \{ \mathbf{R}_{\underline{\Phi}} \}$ pour $k = \{2, 10\}$ où $\mathbf{R}_{\underline{\Phi}}$ représente la matrice de covariance de $\underline{\Phi} = [\Phi_0, \cdots, \Phi_{Na-1}]^T$. Nous observons la bonne correspondance entre la fonction de répartition de Φ_k et celle de la distribution aléatoire gaussienne équivalente sur la figure 2. Deuxièmement, nous effectuons un test de Kolmogorov-Smirnov [12], pour tester la normalité de Φ_k simulé avec un facteur de signification ⁴ $\alpha = 0.1$. Au vu de ces observations, nous pouvons caractériser Φ_k comme suit $\forall k$:

$$\Phi_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\Phi_k}^2) = \begin{cases} m_{\Phi_k} = E[\Phi_k] = 0 \\ \sigma_{\Phi_k}^2 = \operatorname{diag}_k \{ \mathbf{R}_{\underline{\Phi}} \} \end{cases}$$
(4)

où m_{Φ_k} et $\sigma_{\Phi_k}^2$ sont respectivement la moyenne et la variance de Φ_k . L'expression (4) est vraie pour toutes les configurations (N_a, N). Après cette analyse, Nous en déduisons que le coefficient sur le signal utile se résume à une rotation, *i.e.* $\beta_k \simeq e^{j\Phi_k}$. L'expression du signal reçu (3) devient :

$$r_k \simeq s_k e^{j\Phi_k} + \gamma_k + \eta_k \tag{5}$$

3.2 L'interférence entre porteuse

Tout comme le SPE, nous effectuons la même analyse stochastique pour l'ICI.

Première configuration : Nous fixons le nombre totale de sous-porteuses OFDM (N = 64) et nous varions le nombre de sous-porteuse DFT-s-OFDM ($N_a = \{20, 30, 40, 50, 60\}$). Lorsque l'on augmente N_a , nous avons remarqué que la variance de γ_k ($E[|\gamma_k|^2]$)⁵ présentent un comportement par sous-porteuse qui apparaît à partir de $N_a = 40$ (correspond à $\zeta \triangleq \frac{N_a}{N} = 0.625$) et qui s'accentue quand $N_a \to N$. Ce qui nous permet de comprendre davantage le phénomène mis en évidence sur les figures 1c et 1d.

Deuxième configuration : Comme pour le SPE, nous avons remarqué que la variance de l'ICI ne varie pas lorsque le rapport ζ est constant. Au vu de toutes ces observations, nous concluons que les propriétés stochastiques de l'ICI dépendent du rapport ζ .

Pour vérifier cette affirmation, nous simulons la fonction de répartition de $\Re\{\gamma_k\}$ pour $k = \{2, 10\}$ pour la configuration



FIGURE 3 : Fonction de répartition de X = γ_k pour k = {2,10}.

 $(N_a, N) = (60, 64)$. La figure 3 montre que la distribution de l'ICI pour k = 2 ne correspond pas à k = 10. Ce qui confirme notre hypothèse. Le résultat de la figure 3 est le même lorsque nous simulons la fonction de répartition de $\Im \{\gamma_k\}$. Une fois de plus, nous effectuons un test de Kolmogorov-Smirnov pour évaluer la normalité du terme ICI. Nous avons constaté que l'ICI ne suit pas un processus aléatoire Gaussien indépendant complexe.

4 Démodulation optimale en présence de bruit de phase

Dans cette section, nous dérivons un critère de détection précis afin d'améliorer les performances d'un système DFT-s-OFDM en présence de bruit de phase Gaussien. La probabilité d'erreur symbole (SEP) est minimisée par le critère de décision du maximum de vraisemblance (ML) pour des symboles équiprobables et indépendants [6]. La fonction de vraisemblance du canal peut être écrite comme suit [6] :

$$p(r|s) = p(r_{\rho}, r_{\theta} \mid s_{\rho}, s_{\theta})$$
 (6)

Supposons que l'ICI soit un processus aléatoire Gaussien non corrélé. Cela signifie que sa matrice de covariance $\mathbf{R}_{\underline{\gamma}}$ est une matrice diagonale et que nous pouvons le caractériser comme suit :

$$\gamma_{k} \sim \mathbb{C}\mathcal{N}(0, \sigma_{\gamma_{k}}^{2}) = \begin{cases} m_{\gamma_{k}} = E[\gamma_{k}] \leq 0 \\ \sigma_{\gamma_{k}}^{2} = \operatorname{diag}_{k}\{\mathbf{R}_{\underline{\gamma}}\} \end{cases}$$
(7)

Les termes m_{γ_k} et $\sigma_{\gamma_k}^2$ sont respectivement la moyenne et la variance de γ_k pour chaque sous-porteuse k. $\mathbf{R}_{\underline{\gamma}} = E[\underline{\gamma} \cdot \underline{\gamma}^H]$ représente la matrice de covariance de l'ICI $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_0, \cdots, \gamma_{N_a-1}]^T$. L'expression (5) devient :

$$r_k \simeq s_k \cdot e^{j\Phi_k} + w_k, \tag{8}$$

tel que $\Phi_k \backsim \mathcal{N}(0, \sigma_{\Phi_k}^2)$ et $w_k = \eta_k + \gamma_k$ est défini comme suit :

$$w_k \sim \mathbb{C}\mathcal{N}(0, \sigma_{w_k}^2) = \begin{cases} m_{w_k} = m_{\eta_k} + m_{\gamma_k} \leq 0 \\ \sigma_{w_k}^2 = \sigma_n^2 + \sigma_{\gamma_k}^2. \end{cases}$$
(9)

En prenant l'hypothèse haut rapport signal sur bruit (HSNR) [7], on obtient :

$$r_{k_{\rho}} = \left| \left(s_{k_{\rho}} + w'_{k} \right) \cdot e^{j(\Phi_{k} + s_{k_{\theta}})} \right|$$

$$\simeq s_{k_{\rho}} + \Re \mathfrak{e}\{w'_{k}\}$$
(10)

⁴Il représente le facteur de validité du test de normalité. Par défaut sur MATLAB, il est de 0,05 et le maximum est de 0,1 comme considéré dans cet article.

⁵Nous avons observé que la variable aléatoire γ_k est de moyenne nulle.



FIGURE 4 : TBLER (*Transport Block Error Rate*) en fonction du SNR pour une 64-QAM avec $N_a = 60$ et N = 64.

$$r_{k_{\theta}} = \arg\left(\left(s_{k_{\rho}} + w'_{k}\right) \cdot e^{j(\Phi_{k} + s_{k_{\rho}})}\right)$$
$$\simeq s_{k_{\theta}} + \Phi_{k} + \frac{\Im \mathfrak{m}\{w'_{k}\}}{s_{k_{\rho}}}$$
(11)

où $w'_k = w_k \cdot e^{-j(\Phi_k + s_{k_\theta})} \sim \mathbb{CN}(0, \sigma^2_{w_k})$. On obtient donc :

$$\begin{cases}
r_{k_{\rho}} - s_{k_{\rho}} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{w_{k}}^{2}/2) \\
r_{k_{\theta}} - s_{k_{\theta}} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\Phi_{k}}^{2} + \frac{\sigma_{w_{k}}^{2}}{2s_{k_{\rho}}^{2}}).
\end{cases}$$
(12)

La fonction de ML (6) s'exprime donc comme suit :

$$p(r \mid s) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(r_{k\rho} - s_{k\rho})^2}{\sigma_{w_k}^2/2} + \frac{(r_{k\rho} - s_{k\rho})^2}{\sigma_{\Phi_k}^2 + \sigma_{w_k}^2/2s_{k\rho}^2}\right)\right)}{2\pi\sqrt{\frac{\sigma_{w_k}^2}{2}(\sigma_{\Phi_k}^2 + \sigma_{w_k}^2/2s_{k\rho}^2)}}.$$
(13)

Par conséquent, le critère de décision utilisant l'expression de la vraisemblance du canal (13) peut être exprimé pour chaque symbole reçu sur une sous-porteuse k comme suit :

$$\hat{s}_{k} = \underset{s_{i} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmax}} P(r \mid s_{i})$$

$$= \underset{s_{i} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \frac{(r_{k_{\rho}} - s_{i_{\rho}})^{2}}{\sigma_{w_{k}}^{2}/2}$$

$$+ \frac{(r_{k_{\theta}} - s_{i_{\theta}})^{2}}{\sigma_{\Phi_{k}}^{2} + \frac{\sigma_{w_{k}}^{2}}{2s_{i_{\rho}}^{2}}} + \log\left(\sigma_{\Phi_{k}}^{2} + \frac{\sigma_{w_{k}}^{2}}{2s_{i_{\rho}}^{2}}\right) \cdot$$
(14)

Par la suite, nous denotons ce detecteur par *SUB-D* et le detecteur basé sur la distance Euclidienne par *EUC-D*.

5 Simulations

La figure 4 montre les performances du système pour une modulation 64-QAM ($\zeta = 60/64 = 0,9375$) en considérant un codage canal LDPC (*Low Density Parity Check*) avec différent rendement de codage (CR). Nous remarquons que pour le régime de PN élevé, le *SUB-D* surpasse le *EUC-D* pour CR = 0.4. Au-dessus de CR = 0.4, les deux détecteurs présentent un plancher d'erreur. Pour le régime de PN faible, nous observons que pour CR = 0.4, *SUB-D* et *EUC-D* donnent les mêmes performances. Cependant, pour un CR = 0.9, *SUB-D* surpasse *EUC-D*. Nous pouvons conclure que notre détecteur proposé *SUB-D* fonctionne beaucoup mieux que le *EUC-D*, en particulier dans le régime de PN et de rendement de codage élevés.

6 Conclusion

Nous avons montré que la présence d'un bruit de phase Gaussien sur un système DFT-s-OFDM cause l'apparition du SPE qui est responsable de la rotation des symboles transmis et de l'ICI qui est un bruit additif. Les deux termes sont dépendants de l'indice de la sous-porteuse DFT. Nous avons proposé un détecteur polaire par sous-porteuse basé sur la connaissance statistiques du SPE et de l'ICI pour améliorer les performances du système. Malgré l'hypothèse que l'ICI suit une distribution normale, nous avons montré que ce détecteur surpasse le détecteur basé sur la distance Euclidienne dans le cas de régime de PN élevé et moyen. En perspective à ce travail, il semble intéressant d'investiguer les méthodes d'estimation des propriétés stochastiques du SPE et de l'ICI en vue d'une implémentation du détecteur proposé.

Références

- [1] Vitaly Petrov and *al.* "IEEE 802.15.3d : First Standardization Efforts for Sub-Terahertz Band Communications toward 6G". *IEEE Commun. Mag.*, 2020.
- [2] Jean-Baptiste Doré and *al*. "Above-90GHz Spectrum and Single-Carrier Waveform as Enablers for Efficient Tbit/s Wireless Communications". In *Proc. Int. Conf. on Telecommun. (ICT)*, France, June 2018.
- [3] Oskari Tervo and al. "5G New Radio Evolution Towards Sub-THz Communications". In Proc. 2nd 6G Wireless Summit (6G SUMMIT), 2020.
- [4] Oskari Tervo and al. "On the Potential of Using Sub-THz Frequencies for Beyond 5G". In Proc. Joint Eur. Conf. on Netw. and Commun. & 6G Summit (EuCNC/6G Summit), 2022.
- [5] Gilberto Berardinelli and *al.* "Generalized DFT-Spread-OFDM as 5G Waveform". *IEEE Commun. Mag.*, 2016.
- [6] R. Krishnan and *al.* "Soft Metrics and Their Performance Analysis for Optimal Data Detection in the Presence of Strong Oscillator Phase Noise". *IEEE Trans. on Commun.*, 2013.
- [7] Simon Bicaïs and *al.* "Design of Digital Communications for Strong Phase Noise Channels". *IEEE Open J. of Veh. Technol.*, 2020.
- [8] Simon Tarboush and *al.* "Single-Versus Multicarrier Terahertz-Band Communications : A Comparative Study". *IEEE Open J. of the Commun. Soc.*, 3, 2022.
- [9] Yunchou Xing and al. "Propagation Measurements and Path Loss Models for sub-THz in Urban Microcells". In Proc. IEEE International Conference on Communications (ICC), 2021.
- [10] L. Pometcu and al. "An Indoor Channel Model for High Data-Rate Communications in D-Band". *IEEE Access*, 2020.
- [11] Simon Bicais and Jean-Baptiste Doré. "Phase Noise Model Selection for Sub-THz Communications". In Proc. IEEE Global Commun. Conf. (GLOBECOM), pages 1–6, 2019.
- [12] F. J Massey. "The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit". In J. of the Amer. Statistical Assoc., 1951.