

# Schémas de modulations orthogonales avec codage multi-étages basés sur des codes polaires

Jocelyn BOURDUGE<sup>1</sup> Charly POUILLIAT<sup>1</sup> Benjamin GADAT<sup>2</sup> Jean-Frederic CHOUTEAU<sup>2</sup>

<sup>1</sup>INP Toulouse, 2 Rue Charles Camichel, 31000 Toulouse, France

<sup>2</sup>Airbus Defense & Space, 31 rue des Cosmonautes, 31400 Toulouse, France

**Résumé** – Nous nous intéressons aux schémas MLC (Multilevel Coding) pour les modulations orthogonales en utilisant des codes polaires construits par méthode de Monte-Carlo pour un canal Gaussien cohérent et non cohérent.

**Abstract** – We investigate MLC (Multilevel Coding) schemes for orthogonal modulations based on polar codes using Monte-Carlo method over a Gaussian channel and over coherent and non coherent regimes.

## 1 Introduction

Les modulations orthogonales sont une classe importante des modulations utilisées dans l’Internet des Objets, comme la Turbo-FSK (Frequency-Shift Keying) [13], la modulation LoRa (Long Range) [1] considérée comme orthogonale lorsque échantillonnée au temps chip [6], ou alors la modulation CSK (Code-Shift Keying) [8] utilisant des séquences orthogonales ou asymptotiquement orthogonales. Plusieurs solutions existent afin de profiter au maximum des performances offertes par ce type de modulations. Pour les modulations linéaires ayant un ordre de modulation élevé, les schémas BICM (Bit-Interleaved Coded Modulation) ont été privilégiés [14]. Cependant, pour les modulations non linéaires (donc les modulations orthogonales), les performances d’un schéma BICM souffrent d’une forte dégradation en terme de débit atteignable si un décodage itératif (ID) n’est pas mis en place. En outre, les schémas BICM-ID peuvent être sous-optimaux dans un contexte de trame courte comme proposé dans l’Internet des Objets.

Une solution afin d’atteindre la capacité est d’employer un schéma binaire avec un codage et un décodage multi-étages (MLC/MSD : Multilevel Coding/Multistage Decoding) [10, 15]. Cette solution a été étudiée en profondeur pour les modulations linéaires [9], mais, à la connaissance des auteurs assez peu pour les modulations orthogonales. L’avantage du schéma MLC appliqué aux modulations orthogonales est que les stratégies de mapping n’ont aucune influence sur les performances du système contrairement au cas des modulations linéaires.

L’un des désavantages du MLC dans un contexte de trame courte est qu’il faut pouvoir construire plusieurs codes avec des rendements particuliers pour éviter une perte de performance. C’est pour cela que nous nous intéressons dans ce papier aux codes polaires. Introduit par Arikan [2], les codes polaires sont aujourd’hui très populaires car ces derniers permettent d’atteindre asymptotiquement la capacité et sont peu complexes du côté du codeur et du décodeur. L’intérêt de ces codes associés à un schéma MLC est que, en notant  $N$  la taille des mots de codes, le rendement du code peut être ajusté très facilement avec une précision de  $1/N$ . Plusieurs travaux, notamment [5], ont déjà mis en lumière les schémas MLC avec

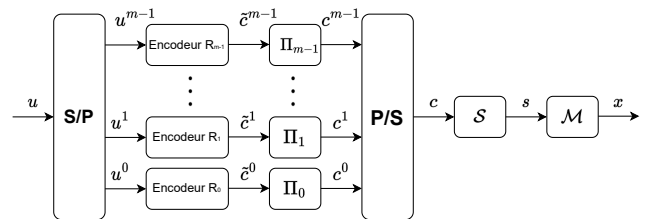


FIGURE 1 : Structure de l’émetteur d’un système MLC.

des codes polaires pour des modulations linéaires en proposant différentes méthodes de construction pour les codes polaires.

Le papier est organisé de la manière suivante. Tout d’abord, le système de communication est détaillé Section 2. Puis, une brève présentation des code polaires est faite Section 3. Enfin, des analyses des performances asymptotiques et à taille finie sont exposées respectivement dans les Sections 4 et 5. Pour finir, les conclusions et perspectives sont dressées en Section 6.

## 2 Système de communication

Dans cette section, nous présentons la structure de l’émetteur et du récepteur d’un schéma utilisant un codage et un décodage multi-étages (MLC/MSD : Multilevel coding/Multistage decoding). De plus, nous nous intéressons plus particulièrement aux modulations orthogonales et aux codes polaires dans un contexte cohérent et non cohérent. Le corps de Galois binaire sera noté  $\mathbb{F}_2$ .

La figure 1 montre la structure de l’émetteur d’un système MLC avec  $m$  étages. Un système BICM (Bit-Interleaved Coded Modulation) est le cas particulier d’un système MLC avec un seul étage. Par la suite, nous considérons  $M$  l’ordre de la modulation et  $m = \log_2(M)$  le nombre de bits émis par symbole. Pour un système MLC, nous répartissons le message d’information  $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{k_u-1}]^T \in \mathbb{F}_2^{k_u}$  sur  $m$  étages pour former les vecteurs  $\mathbf{u}^i = [u_0^i, u_1^i, \dots, u_{K_i}^i]^T \in \mathbb{F}_2^{K_i}$  pour  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$  tel que  $\sum_i K_i = k_u$ . L’opérateur  $(\cdot)^T$  désigne la transposée. Puis, chaque vecteur  $\mathbf{u}^i$

est encodé par un code polaire binaire de rendement  $R_i = K_i/N$  pour former sur chaque étage un vecteur  $\tilde{\mathbf{c}}^i = [\tilde{c}_0^i, \tilde{c}_1^i, \dots, \tilde{c}_{N-1}^i]^\top \in \mathbb{F}_2^N$ . Le rendement total du système est défini par  $R = \sum_i R_i$ . Ensuite, chaque mot de code est entrelacé par une matrice de permutation  $\mathbf{\Pi}_i$  afin d'obtenir le vecteur  $\mathbf{c}^i = \tilde{\mathbf{c}}^i \mathbf{\Pi}_i = [c_0^i, c_1^i, \dots, c_{N-1}^i]^\top \in \mathbb{F}_2^N$  pour  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ . Enfin, nous réunissons chaque mot de code de chaque étage pour former le vecteur composé de  $m$ -tuples  $\mathbf{c}$  tel que  $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^\top \in \mathbb{F}_2^{N \times m}$  avec  $\mathbf{c}_k = [c_k^0, c_k^1, \dots, c_k^{m-1}] \in \mathbb{F}_2^m$  pour  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ .

Nous mappons chaque  $m$ -tuple binaire  $\mathbf{c}_k$  pour  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  en un symbole  $s_k \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$  en utilisant la fonction  $\mathcal{S}$  qui associe la représentation décimale d'un vecteur binaire à l'aide d'un mapping naturel telle que :

$$\mathcal{S} : \mathbb{F}_2^m \mapsto \llbracket 0, M-1 \rrbracket \\ \mathbf{c}_k \rightarrow s_k$$

Nous récupérons ainsi le vecteur de symboles  $\mathbf{s} = [s_0, s_1, \dots, s_{N-1}]^\top \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket^N$ . Enfin, chaque symbole  $s_k$  pour  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  est associé à un symbole  $\mathbf{x}_k$  appartenant à un ensemble orthogonal  $\mathcal{X}$  tel que  $|\mathcal{X}| = M$  et  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(M-1)}\}$  avec  $\mathbf{x}^{(j)} = [x_0, x_1, \dots, x_{M-1}]$  pour  $j \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$ . Cette opération est faite par la fonction de mapping  $\mathcal{M}$  définie par :

$$\mathcal{M} : \llbracket 0, M-1 \rrbracket \mapsto \mathcal{X} \\ s_k \rightarrow \mathbf{x}_k$$

Par définition d'une modulation orthogonale, pour  $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\} \in \mathcal{X}^2$ , nous avons  $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{i,j}$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  correspond à l'opérateur produit scalaire et  $\delta_{i,j}$  représente le symbole delta de Kronecker tel que  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{i,j} = 0$  sinon. De plus, la distance Euclidienne entre deux symboles différents de l'ensemble orthogonal  $\mathcal{X}$  est constante. Enfin, dû au fait de la symétrie des modulations orthogonales, le choix des fonctions de mapping n'a aucune influence sur les performances du système.

Côté récepteur, l'observation du  $k$ -ème symbole émis est définie par  $\mathbf{y}_k = \exp\{j\theta_k\} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k$  pour  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  avec  $\theta_k$  une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $[0, 2\pi]$ , et  $\mathbf{w}_k$  est un bruit circulaire complexe Gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_w^2$ . Dans le cadre d'une réception cohérente, c'est-à-dire où tous les  $\theta_k$  sont connus, la vraisemblance à la sortie du soft-demapper en supposant que le symbole émis soit  $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathcal{X}$  pour  $i \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$  peut s'exprimer de la manière suivante

$$\mathbb{P}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^{(i)}, \theta_k) \propto \exp\left(\frac{2\Re\{e^{-j\theta_k} \langle \mathbf{y}_k, \mathbf{x}^{(i)} \rangle\}}{\sigma_w^2}\right), \quad (1)$$

où  $\Re\{\cdot\}$  est l'opérateur partie réelle. En considérant cette fois-ci le régime non cohérent (les  $\theta_k$  ne sont pas connus par le récepteur), la vraisemblance s'écrit pour  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  :

$$\mathbb{P}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^{(i)}) \propto I_0\left(\frac{2|\langle \mathbf{y}_k, \mathbf{x}^{(i)} \rangle|}{\sigma_w^2}\right), \quad (2)$$

où  $I_0(\cdot)$  indique la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre 0. Nous définissons maintenant la fonction  $\phi = \mathcal{M} \circ \mathcal{S}$  permettant de passer d'un mot de code binaire  $\mathbf{c}_k \in \mathbb{F}_2^m$  à un symbole  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}$  pour  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ . De plus, nous notons  $\phi_i^{-1}(\mathbf{x})$  pour  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  la fonction permettant d'obtenir le  $i$ -ème bit associé au symbole  $\mathbf{x}$  pour  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ .

Afin d'effectuer le décodage multi-étages [15], il faut fournir une information souple de type LLR (Log-Likelihood Ratio) de chaque bit codé à chaque décodeur en tenant compte des décisions faites par les décodeurs des étages précédents. L'expression du LLR du  $k$ -ème bit associé au  $i$ -ème étage noté  $c_k^i$  pour  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$  est donnée par :

$$L(c_k^i) = \log \left( \frac{\sum_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}(\hat{c}_k^0, \hat{c}_k^1, \dots, \hat{c}_k^{i-1}, 0)} \mathbb{P}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k = \tilde{\mathbf{x}})}{\sum_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}(\hat{c}_k^0, \hat{c}_k^1, \dots, \hat{c}_k^{i-1}, 1)} \mathbb{P}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k = \tilde{\mathbf{x}})} \right), \quad (3)$$

où  $\hat{c}_k^\ell$  pour  $\ell \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$  correspond aux décisions prises par les décodeurs des étages précédents et  $\mathcal{X}(\hat{c}_k^0, \hat{c}_k^1, \dots, \hat{c}_k^{i-1}, j)$  pour  $j \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$  est l'ensemble des symboles  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$  tels que  $\phi_0^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}) = \hat{c}_k^0, \phi_1^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}) = \hat{c}_k^1, \dots, \phi_{i-1}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}) = \hat{c}_k^{i-1}$  et  $\phi_i^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}) = j$ .

### 3 Codes polaires

Soit  $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{N-1}]^\top$  un vecteur binaire de taille  $N = 2^n$  avec  $n$  un entier strictement positif en entrée de l'encodeur d'un code polaire. En définissant la matrice  $G_2$  (Arikan's kernel [2]) telle que

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

nous pouvons exprimer la matrice génératrice  $G_N \in \mathbb{F}_2^{N \times N}$  d'un code polaire de taille  $N$  telle que  $G_N = G_2^{\otimes n}$  où  $G_2^{\otimes n} = G_2 \otimes G_2^{\otimes (n-1)}$  est la  $n$ -ème puissance de Kronecker de la matrice  $G_2$  (avec  $G_2^{\otimes 0} = (1)$ ). Ainsi, le mot de code  $\mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^N$  à la sortie de l'encodeur s'écrit  $\mathbf{c} = \mathbf{b}^\top G_N$ . En supposant que le rendement du code s'écrit  $R = K/N$ , on définit  $\mathcal{I}$  avec  $|\mathcal{I}| = K$  l'ensemble d'indices où pour  $i \in \mathcal{I}$ , les bits  $b_i$  correspondent aux bits d'information. De manière analogue, on définit les bits gelés, c'est-à-dire les bits connus par l'encodeur et le décodeur et ne portant donc pas d'information, les bits  $b_j$  pour  $j \in \mathcal{I}^C$  avec  $|\mathcal{I}^C| = N - K$ .

La construction des codes polaires, permettant d'obtenir les meilleures performances possibles avec un code polaire, consiste en la recherche de l'ensemble  $\mathcal{I}$  pour un SNR (Signal-to-Noise Ratio) donné. Il existe différentes méthodes afin de déterminer  $\mathcal{I}$  comme l'approche GA (Gaussian Approximation) [4], et son extension lorsque  $N$  devient très important (IGA : Improved Gaussian Approximation) [12] ou encore une méthode basée sur la réciprocité du canal (RCA : Reciprocal Channel Approximation) [11]. Dans ce papier, nous décidons d'adopter la méthode de Monte-Carlo (MC) [2]. Cette méthode, très populaire pour les schémas BICM et basée sur les simulations, est très simple d'implantation et, en choisissant un nombre assez important d'essais, permet d'atteindre des performances très proche de l'optimal [11]. Cette méthode consiste à tester pour un SNR donné, les  $N$  canaux perçus par le récepteur et de compter les erreurs. Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{I}$  correspond aux  $K$  canaux ayant généré le moins d'erreurs.

### 4 Analyse asymptotique

Dans cette section, nous mettons en lumière l'intérêt d'un système MLC/MSD pour les modulations orthogonales et nous déterminons les rendements optimaux des codes polaires pour

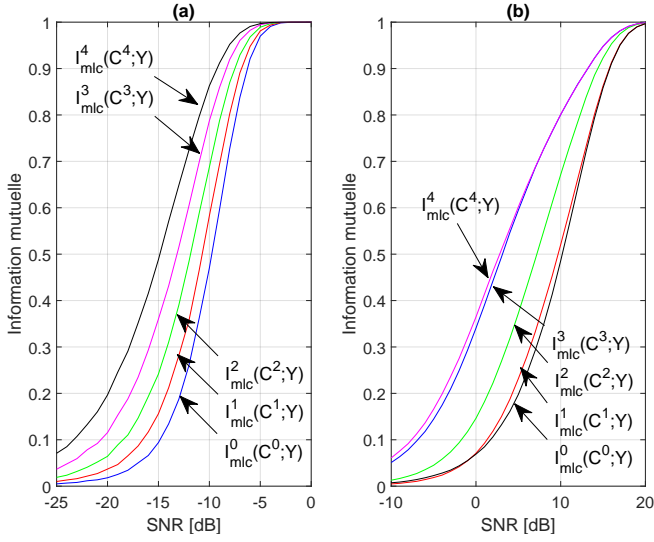


FIGURE 2 : Information mutuelle de chaque étage du schéma MLC pour  $M = 32$  : (a) pour une modulation orthogonale, (b) pour une modulation QAM (Quadrature Amplitude Modulation) à travers un canal Gaussien et sous un régime cohérent.

chaque étage. Par la suite, nous notons  $X$ ,  $Y$  et  $C^i$  pour  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$  les variables aléatoires associées respectivement au symbole émis  $x$ , à l'observation reçue  $y$  et au  $i$ -ème bit  $c^i$  du symbole  $x$ .

Nous allons dans un premier temps définir, pour un SNR donné, l'information mutuelle  $\mathbb{I}(X; Y) = \mathbb{H}(X) - \mathbb{H}(X | Y)$  avec  $\mathbb{H}(X) = -\mathbb{E}_X \{\log_2(\mathbb{P}(X))\}$  et  $\mathbb{H}(X | Y) = -\mathbb{E}_{X,Y} \{\log_2(\mathbb{P}(X | Y))\}$ . L'opérateur  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  désigne l'opération espérance. En appliquant la règle de l'information mutuelle chaînée [15], nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(X; Y) &= \mathbb{I}(C^0, C^1, \dots, C^{m-1}; Y) \\ &= \mathbb{I}(C^0; Y) + \mathbb{I}(C^1; Y | C^0) + \dots \\ &\quad + \mathbb{I}(C^{m-1}; Y | C^0, C^1, \dots, C^{m-2}), \end{aligned} \quad (4)$$

et donc l'information mutuelle liée au  $i$ -ème étage pour  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$  est égale à  $\mathbb{I}_{\text{mlc}}^i(C^i; Y) = \mathbb{I}(C^i; Y | C^0, C^1, \dots, C^{i-1})$ .

La figure 2 illustre l'information mutuelle de chaque étage d'un schéma MLC avec  $m = 5$  pour (a) une modulation orthogonale et (b) une modulation linéaire. Nous constatons que pour les modulations orthogonales, l'écart entre les courbes pour chaque étage est distinct contrairement au cas des modulations linéaires. Cet écart signifie que chaque étage apporte de l'information a priori aux étages suivants. Néanmoins, cela exprime aussi le fait que si nous appliquons des stratégies du type RL-MLC (Reduced-Layer MLC) afin de diminuer le nombre d'encodeurs et de décodeurs, nous aurions une pénalité sur les performances plus importante que pour les modulations linéaires.

Ainsi, pour choisir les rendements optimaux des codes polaires, il suffit de choisir le rendement  $R_i$  le plus proche de  $\mathbb{I}_{\text{mlc}}^i(C^i; Y)$  pour  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$  pour un SNR donné.

## 5 Résultats à taille finie

Dans cette partie, nous étudions les performances à taille finie des modulations orthogonales pour un schéma MLC et BICM

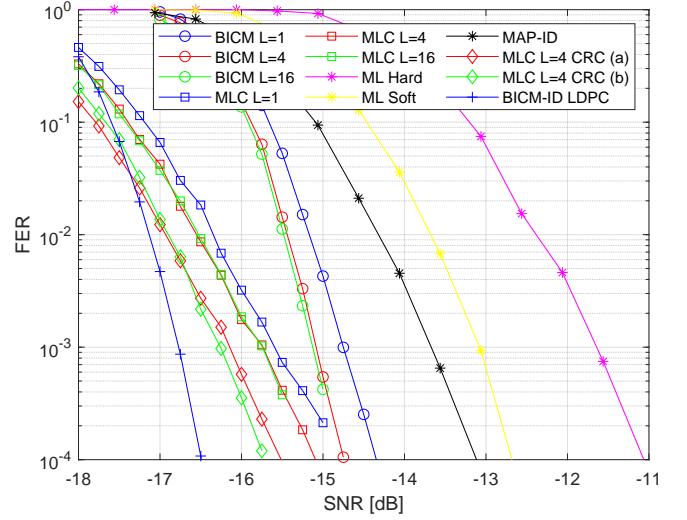


FIGURE 3 : Taux d'erreur trame pour la modulation LoRa pour un canal Gaussien cohérent.

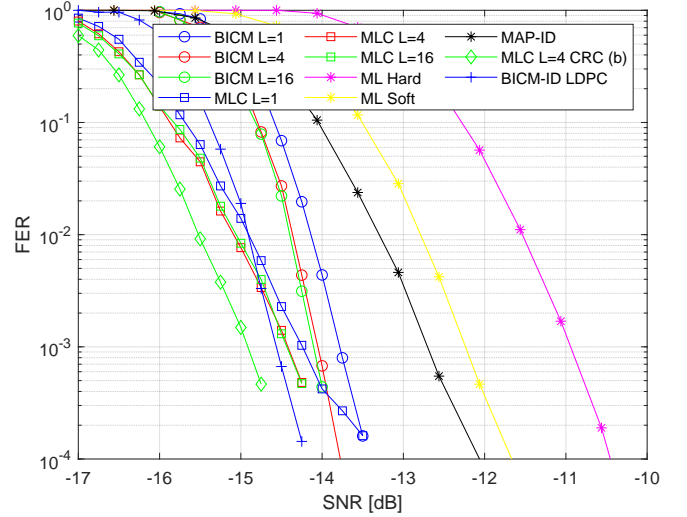


FIGURE 4 : Taux d'erreur trame pour la modulation LoRa pour un canal Gaussien non cohérent.

à travers un canal Gaussien.

Les figures 3 et 4 montrent le taux d'erreur trame (ou FER : Frame Error Rate) pour la modulation LoRa pour un régime cohérent et non cohérent respectivement. Les paramètres des simulations sont les suivants :  $M = 256$ ,  $R = 1/2$ ,  $N = 512$  bits pour les schémas BICM avec codes polaires,  $N = 64$  bits par étage pour les schémas MLC et  $N = 528$  bits pour les autres simulations. Les rendements des schéma MLC sont 11/64, 16/64, 21/64, 28/64, 31/64, 38/64, 45/64 et 50/64. Afin d'appuyer nos propos, nous avons affiché les performances du standard LoRa en utilisant un système BICM avec un code de Hamming (4, 8) et un entrelaceur diagonal [1]. En réception, nous utilisons un démapper itératif MAP (MAP-ID) avec 10 itérations, un démapper ML avec entrées souples (ML Soft) et à entrées dures (ML Hard) [7]. Pour les codes polaires, l'algorithme SCL (Successive Cancellation List) est utilisé au niveau du décodeur.

Les remarques suivantes peuvent être dressées.

Premièrement, en utilisant un système BICM avec un code

polaire et une liste de 4 au niveau du décodeur, nous constatons un gain de 1.5 dB pour un FER de  $10^{-3}$  dans les deux régimes par rapport au meilleur récepteur proposé par le standard LoRa.

Deuxièmement, nous remarquons que le système MLC propose pour un FER de  $10^{-3}$  un gain de 0.7 dB pour le cas cohérent et 0.4 dB pour le cas non cohérent par rapport au système BICM. Cependant, cet écart diminue avec le FER. Cela est dû à la pénalité liée à la petite taille des mots de codes. En effet, les mots de codes sont  $m$  fois plus petits dans le cas MLC ce qui dégrade les performances du système global.

Troisièmement, augmenter la taille des listes pour l'algorithme SCL n'a très peu d'impact pour le schéma MLC dans les deux régimes.

Quatrièmement, nous avons décidé de comparer les performances des codes polaires avec un schéma BICM-ID utilisant un code LDPC (Low Density Parity Check) optimisé [3]. Pour le cas cohérent, un important écart de 1 dB apparaît entre le meilleur système MLC (sans CRC) et le système BICM-ID pour un FER de  $10^{-3}$ . Cependant, cet écart n'est plus que de 0.1 dB dans le cas non cohérent.

Cinquièmement, nous avons voulu étudier l'impact du CRC (Contrôle de Redondance Cyclique) sur un système MLC. Sur la figure 3, nous avons employé deux schémas : (a) le CRC est réparti uniformément sur les étages (2 bits par étage), (b) le CRC est réparti uniformément sur les derniers étages (4 bits sur les 4 derniers étages). En effet, nous constatons que la courbe du FER du système MLC est fortement corrélée avec les performances des derniers étages car ces derniers ont les rendements les plus élevés. La répartition des bits de CRC met en lumière une différence pouvant aller jusqu'à 0.2 dB pour un FER de  $10^{-4}$ . Le problème reste ouvert quant à la répartition optimale des bits de CRC mais nous remarquons que ce dernier a une influence non négligeable sur le FER.

Sixièmement, l'ajout d'un CRC aux schémas MLC permet d'être 0.35 dB pour un FER de  $10^{-3}$  meilleur que le schéma BICM-ID avec un code LDPC dans le cas non cohérent. Ce résultat est à pondérer car nos observations ne sont pas en énergie par bit utile.

## 6 Conclusion

Dans ce papier, nous avons étudié des schémas MLC appliqués aux modulations orthogonales à l'aide de codes polaires. Nous avons mis en lumière que ce type de schémas était très efficace par rapport au schéma BICM ou au standard proposé. De plus, nous avons montré qu'à l'aide d'un CRC judicieusement choisi, nous pouvons attendre des performances meilleures que certains schémas BICM-ID dans un contexte non cohérent. Les futurs travaux porteront sur les schémas MLC avec des codes polaires non binaires.

## Références

- [1] O. AFISIADIS : Physical layer aspects of lora and full-duplex wireless transceivers. Rapport technique, EPFL, 2020.
- [2] E. ARIKAN : Channel polarization : A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 55(7):3051–3073, 2009.
- [3] J. BOURDUGE, C. POUILLIAT, B. GADAT et J-F. CHOUTEAU : Bit interleaved chirp spread spectrum coded modulations with iterative decoding based on ldpc codes for coherent and non-coherent regimes. *In IEEE 33rd Annual Int. Symp. on Pers., Indoor and Mobile Radio Commun. (PIMRC)*, pages 968–974, 2022.
- [4] Sae-Young C., T.J. RICHARDSON et R.L. URBANKE : Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a gaussian approximation. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 47(2):657–670, 2001.
- [5] L. CHANDESIRIS, V. SAVIN et D. DECLERCQ : Lasting successive-cancellation based decoders for multilevel polar coded modulation. *In 25th Int. Conf. on Telecommun. (ICT)*, pages 264–268, 2018.
- [6] M. CHIARI et A. ELZANATY : On the lora modulation for iot : Waveform properties and spectral analysis. *IEEE Internet of Things J.*, 6(5):8463–8470, 2019.
- [7] T. ELSHABRAWY et J. ROBERT : Evaluation of the ber performance of lora communication using bicm decoding. *In IEEE 9th Int. Conf. on Consum. Electron. (ICCE-Berlin)*, pages 162–167, 2019.
- [8] A. HAMMER et D. J. SCHAEFER : Performance analysis of m-ary code shift keying in code division multiple access systems. *In ICC '82 - The Digital Revolution, Volume 3*, volume 3, page 7E.2, 1982.
- [9] J. HOU, P.H. SIEGEL, L.B. MILSTEIN et H.D. PFISTER : Capacity-approaching bandwidth-efficient coded modulation schemes based on low-density parity-check codes. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 49(9):2141–2155, 2003.
- [10] H. IMAI et S. HIRAKAWA : A new multilevel coding method using error-correcting codes. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 23(3):371–377, 1977.
- [11] H. OCHIAI, K. IKEYA et P. MITRAN : A new polar code design based on reciprocal channel approximation. *IEEE Trans. on Commun.*, 71(2):631–643, 2023.
- [12] H. OCHIAI, P. MITRAN et H. VINCENT POOR : Capacity-approaching polar codes with long codewords and successive cancellation decoding based on improved gaussian approximation. *IEEE Trans. on Commun.*, 69(1):31–43, 2021.
- [13] Y. ROTH, J-B. DORÉ, L. ROS et V. BERG : Turbo-fsk : A new uplink scheme for low power wide area networks. *In IEEE 16th Int. Workshop on Signal Process. Adv. in Wireless Commun. (SPAWC)*, pages 81–85, 2015.
- [14] M.C. VALENTI et Shi CHENG : Iterative demodulation and decoding of turbo-coded m-ary noncoherent orthogonal modulation. *IEEE J. on Selected Areas in Commun.*, 23(9):1739–1747, 2005.
- [15] U. WACHSMANN, R.F.H. FISCHER et J.B. HUBER : Multilevel codes : theoretical concepts and practical design rules. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 45(5):1361–1391, 1999.