Garanties de convergence pour la résolution de problèmes inverses linéaires par réseaux de neurones génératifs

Nathan BUSKULIC Yvain QUÉAU Jalal FADILI

Normandie Univ., UNICAEN, ENSICAEN, CNRS, GREYC, 6 Boulevard Maréchal Juin, 14000 Caen, France

Résumé – Les réseaux de neurones génératifs sont devenus depuis quelques années un outil majeur pour la résolution de problèmes inverses. Cependant, la compréhension théorique de ces modèles reste assez lacunaire. Dans cet article, nous nous intéressons aux garanties théoriques de ces réseaux entraînés par flot de gradient. Nous démontrons d'abord, que pour n'importe quelle fonction de coût vérifiant l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz, l'entraînement du réseau sous certaines conditions sur sa jacobienne produira une solution de coût nul. Nous fournissons ensuite des garanties déterministes de reconstruction du signal sous-jacent sous une condition d'injectivité restreinte de l'opérateur de mesure. Pour les réseaux à deux couches, équipés d'une fonction d'activation lisse, nous exhibons les bornes de sur-paramétrisation sous lesquelles les garanties déterministes de reconstruction sont vraies avec une grande probabilité.

Abstract – Generative neural networks have become in recent years a prominent approach to solve inverse problems. However, the theoretical understanding of these models is still lacking. In this paper we are interested in the theoretical guarantees of these networks trained through gradient flow. We first show that for loss functions verifying the Kurdyka-Łojasiewicz inequality, training a neural network under some conditions on its jacobian matrix will produce a zero-loss optimal solution. We then provide guarantees for deterministic stable reconstruction of the underlying signal under a restricted injectivity condition of the forward operator. For two-layer neural networks with a smooth activation function, we provide overparametrization bounds under which the deterministic reconstruction guarantees hold with high probability.

1 Introduction

Résoudre un problème inverse linéaire consiste à retrouver un signal $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ depuis des observations bruitées indirectes

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} + \epsilon, \tag{1}$$

où $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des observations, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est l'opérateur linéaire de mesure, et ϵ représente un bruit additif. Sans perte de généralité, nous supposons dans la suite que $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}\,(\mathbf{A})$.

Au cours des dernières années, l'utilisation d'algorithmes sophistiqués d'apprentissage automatique (*machine learning*), dont l'apprentissage par réseaux de neurones, pour résoudre des problèmes inverses a beaucoup gagné en popularité et a donné des résultats prometteurs, voir e.g. les revues [3, 15]. Plus spécifiquement, plusieurs modèles hybrides de réseaux de neurones, qui mélangent des approche fondées sur des modèles et des méthodes fondées sur les données, ont produit les meilleurs résultats récents. Parmi ces modèles, on peut citer l'apprentissage de régularisation dans les problèmes variationnels [18], le *Plug-and-Play* [9] ou les algorithmes dits de « déroulement » [13] qui s'inspirent des algorithmes itérés classiques d'optimisation. Un question qui subsiste est la détermination de garanties théoriques de reconstruction et de convergence [14], ce qui est de première importance pour les applications critiques.

L'objectif de notre travail est de présenter des éléments de réponse à cette question, dans le contexte des réseaux dits génératifs. Ces méthodes sont non-supervisées et consistent à optimiser un réseau $\mathbf{g} : (\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pour transformer une entrée latente $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ en un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Les paramètres $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ du réseau sont optimisés par flot de gradient afin de minimiser une fonction de coût $\mathcal{L} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+, (\mathbf{y}(t), \mathbf{y}) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y})$ qui mesure l'écart entre le vecteur $\mathbf{y}$ des observations et le vecteur $\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}(t))$ de la sortie du réseau pour les paramètres $\boldsymbol{\theta}(t)$ du flot de gradient au temps t.

Plusieurs travaux théoriques ont récemment vu le jour pour étudier et caractériser la dynamique d'apprentissage par flot de gradient de certains réseaux de neurones. Les premiers travaux utilisaient une hypothèse de convexité sur la composition du réseau et de la fonction de coût – hypothèse que l'on sait ne pas être respectée dans le cas général. Un approche plus récente se base sur une inégalité de domination de gradient de laquelle on peut déduire par simple intégration une convergence exponentielle du flot de gradient vers une solution à coût nul. Cela permet notamment d'établir des garanties de convergence globale pour des réseaux entraînés à minimiser l'erreur quadratique moyenne par flot de gradient [6], où sa version discrète en temps (i.e., descente de gradient à pas fixe) [2, 7, 16, 17]. Le travail que nous présentons s'inspire de ces travaux, mais va bien plus loin. Entre autres différences, nous nous intéressons aux problémes inverses et nous traitons des fonctions de coût plus générales respectant l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz (e.g., toute fonction semi-algébrique voire définissable sur une structure o-minimale) [10, 11, 12].

Il a récemment été mis en évidence que certains noyaux jouent un rôle central dans l'analyse de convergence du flot de gradient pour l'entraînement des réseaux de neurones. En particulier, le *Neural Tangent Kernel* (NTK) [8] est un noyau défini positif donné par $\mathcal{J}(t)\mathcal{J}(t)^\top$, où $\mathcal{J}(t)$ est la jacobienne du réseau au temps t. Les travaux précédemment cités s'attachent à contrôler les valeurs propres du NTK pour s'assurer qu'il soit défini positif, engendrant ainsi la convergence vers une solution optimale à une vitesse exponentielle. Le contrôle des valeurs propres du NTK passe par une initialisation aléatoire et une sur-paramétrisation du réseau, la question centrale étant le niveau de sur-paramétrisation nécessaire pour obtenir la convergence recherchée. En effet, on observe pour les réseaux suffisamment sur-paramétrés que les paramètres $\boldsymbol{\theta}(t)$ vont rester près de leur initialisation et seront bien approchés par leur linéarisation (régime dit « *lazy* » [6]). Des bornes de sur-paramétrisation ont été obtenues majoritairement pour des réseaux à une couche cachée ; le contrôle de réseaux profonds étant bien plus complexe.

Malgré tous ces travaux, il y a un manque théorique concernant les spécificités du contexte des problèmes inverses, et notamment de l'effet de l'opérateur sur le NTK. Nous proposons dans la suite de cet article une première analyse théorique de l'optimisation de réseaux génératifs sur-paramétrés dans le contexte des problèmes inverses, en fournissant notamment des garanties sur la convergence et les capacités de reconstruction de ces méthodes. Pour cela, nous analysons le flot de gradient appliqué à $\mathcal{L}$:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = -\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\mathcal{L}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}),\\ \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0.\end{cases} \tag{2}$$

Ceci est un cas idéal qui rend la présentation plus simple et qui doit refléter le comportement des méthodes d'optimisation de premier ordre puisqu'elles approchent le flot de gradient.

Contributions Notre contribution principale fait l'objet de la section 2, où nous analysons (2) au travers du prisme du NTK afin d'étudier comment il est affecté par l'opérateur de mesure. Ceci nous permet de prouver que sous des conditions sur la jacobienne du réseau, celui-ci va converger vers une solution optimale dans l'espace des observations, et que la vitesse de convergence est caractérisée par la fonction désingularisante dans l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz associée à la fonction de coût. Nous présentons également un résultat de convergence dans l'espace des signaux, sous une condition d'injectivité restreinte de l'opérateur $\mathbf{A}$, via une borne supérieure sur l'erreur de reconstruction de $\overline{\mathbf{x}}$. Nous appliquons finalement dans la section 3 ces résultats dans le cas particulier des réseaux à deux couches.

Notations Pour une matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{a\times b}$, on appelle $\sigma_{\min}(\mathbf{M})$ et $\sigma_{\max}(\mathbf{M})$ sa plus petite et sa plus grande valeur singulière, et $\kappa(\mathbf{M}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{M})}{\sigma_{\min}(\mathbf{M})}$ son conditionnement. On note aussi $\|\cdot\|$ la norme euclidienne d'un vecteur. On définit en outre $\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{g}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}(t)))$, $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}(t))$. La jacobienne de $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}(t))$ par rapport à $\boldsymbol{\theta}(t)$ est dénotée par $\mathcal{J}(t)$. La constante de Lipschitz d'une application est notée $\mathrm{Lip}(\cdot)$. Enfin, on définit $\Sigma = \{\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) | \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$ l'ensemble des signaux que le réseau $\mathbf{g}$ peut générer. Dès lors que Θ est fermé, Σ l'est aussi. On note $\mathrm{d}(\cdot, \Sigma)$ la distance à Σ qui est bien définie si Θ est fermé non-vide. Pour un vecteur $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_\Sigma$ est sa projection sur Σ. On note aussi $T_\Sigma(\mathbf{x}) = \overline{\mathrm{conv}}\left(\mathbb{R}_+(\Sigma - x)\right)$ le cône tangent de Σ au point $\mathbf{x} \in \Sigma$. La valeur singulière minimale de $\mathbf{A}$ par rapport au cône $T_\Sigma(\mathbf{x})$ est définie comme $\lambda_{\min}(\mathbf{A}; T_\Sigma(\mathbf{x})) = \inf\{\|\mathbf{A}\mathbf{z}\| / \|\mathbf{z}\| : \mathbf{z} \in T_\Sigma(\mathbf{x})\}$.

2 Garanties de reconstruction

2.1 Préliminaires et hypothéses

Definition 1 (inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur un ouvert borné $X \subset \mathbb{R}^n$ avec $\min f = 0$. On dira que f respecte l'inégalite de Kurdyka-Łojasiewicz (KL) s'il existe une fonction strictement croissante $\psi \in C^0(\mathbb{R}_+) \cap C^1(]0, +\infty[)$ avec $\psi(0) = 0$, telle que $\forall x \in X$ et $f(x) > 0$,*

$$\psi'(f(x)) \|\nabla f(x)\| \geq 1. \tag{3}$$

On notera alors $f \in$ KŁ(ψ).

L'inégalité de Łojasiewicz [11, 12] correspond à une fonction désingularisante de la forme $\psi(s) = cs^\alpha$ avec $\alpha \in [0, 1]$. De plus, toute fonction définie sur une structure o-minimale respecte l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz [10] ce qui inclut de fait toutes les fonctions de coûts usuelles. Dans la suite de ce travail, nous faisons l'hypothèse suivante :

A-1. *$\mathcal{L}$ est continue et convexe en son premier argument, et $\mathcal{L}(\cdot, \mathbf{y}) \in$ KŁ(ψ) avec $\min_{\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = 0$ atteint en $\mathbf{u} = \mathbf{y}$.*

2.2 Résultat principal

Remarquons tout d'abord que pour que l'analyse qui vient soit valide, le problème de Cauchy (2) doit être bien posé, i.e., il existe une trajectoire unique absolument continue de (2). Nous supposons désormais que c'est le cas. Ceci peut être assuré dans une grande variété de situations, notamment si $\mathcal{L}(\mathbf{g}(\mathbf{u}, \cdot))$ est localement Lipschitz (théorème de Cauchy-Lipschitz).

Nous présentons maintenant nos deux résultats principaux. Le premier concerne la convergence des réseaux de neurones vers une solution de coût nul, étendant ainsi les résultats existants [7, 17] sur la convergence des réseaux de neurones aux problèmes inverses et à une classe de fonctions de coût plus vaste. Ce résultat ne contrôle cependant que l'erreur dans l'espace des observations et ne dit rien de la reconstruction du signal $\overline{\mathbf{x}}$. Une réponse à ce second problème, qui constitue le cœur des problèmes inverses, est apportée par notre second résultat, qui consiste en une borne sur la distance entre la solution générée par le réseau et le signal à estimer. Ces deux résultats sont satisfaits dès lors que la condition (4) est satisfaite. Assurer cette condition nécessite de contrôler trois quantités distinctes : le coût à l'initialisation, la valeur singulière minimum de la jacobienne à l'initialisation, et la constante de Lipschitz de la jacobienne. Ceci est similaire aux contraintes présentées dans [7, 17]. Nous montrerons par la suite que cette condition est vérifiée lorsque le reśeau est suffisamment sur-paramétré.

Théorème 1. *Soit $\sigma_{\mathbf{A}} = \inf_{\mathbf{z}\in \mathrm{Im}(\mathbf{A})} \left\|\mathbf{A}^\top \mathbf{z}\right\| / \|\mathbf{z}\| > 0$. Notons $\gamma(t) = \frac{\sigma_{\mathbf{A}}^2 \sigma_{\min}(\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}_0))^2}{4} t + \Psi\left(\mathcal{L}(\mathbf{y}(0), \mathbf{y})\right)$. Sous notre hypothèse sur $\mathcal{L}$ ci-dessus, pour un réseau entraîné par* (2) *tel que*

$$\frac{\psi(\mathcal{L}(\mathbf{y}(0), \mathbf{y}))}{\sigma_{\mathbf{A}}} < \frac{\sigma_{\min}(\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}_0))^2}{4\mathrm{Lip}(\mathcal{J})}, \tag{4}$$

1. *le réseau converge vers une solution de coût nul à une vitesse donnée par*

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}) \leq \Psi^{-1}\Big(\gamma(t)\Big) \underset{t\to+\infty}{\to} 0, \tag{5}$$

avec $\Psi = \int -(\psi')^2$.

2. *De plus,*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(t) - \overline{\mathbf{x}}\| \leq & \frac{2\psi\left(\Psi^{-1}\left(\gamma(t)\right)\right)}{\sigma_{\min}(\mathcal{J}(0))\sigma_{\mathbf{A}}\lambda_{\min}(\mathbf{A}; T_\Sigma(\overline{\mathbf{x}}_\Sigma))} \\ & + \frac{\|\epsilon\|}{\lambda_{\min}(\mathbf{A}; T_\Sigma(\overline{\mathbf{x}}_\Sigma))} \\ & + \left(1 + \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{A})}{\lambda_{\min}(\mathbf{A}; T_\Sigma(\overline{\mathbf{x}}_\Sigma))}\right) \mathrm{d}(\overline{\mathbf{x}}, \Sigma). \end{aligned} \tag{6}$$

La preuve complète de ce théorème peut être trouvée dans [4]. La preuve du premier résultat repose sur le fait que sous la condition (4), la trajectoire $\boldsymbol{\theta}(t)$ du flot de gradient reste proche de l'initialisation du réseau, qui elle-même est proche d'une solution optimale. Ainsi, $\boldsymbol{\theta}(t)$ restera dans le bassin d'attraction d'un point optimal de la fonction de coût. Le preuve du second résultat capitalise sur la première borne et utilise l'injectivité restreinte de $\mathbf{A}$ sur le cône tangent de Σ au point $\overline{\mathbf{x}}_\Sigma$, la projection du vecteur original $\overline{\mathbf{x}}$ sur l'espace des signaux générable par le réseau.

2.3 Remarques

Vitesse de convergence selon la fonction de coût Notre premier résultat assure que sous les conditions du théorème le réseau converge vers une solution optimale en terme de coût. La vitesse de convergence est gouvernée par Ψ^{-1}, qui est strictement décroissante par définition. La fonction Ψ dépend seulement de la fonction désingularisante de la fonction coût choisie.

Par exemple, si $\psi(s) = cs^{1/2}$, alors nous obtenons une vitesse de convergence exponentielle puisque par intégration, il est aisé de voir que $\Psi^{-1}(s) \propto \exp(-cs)$. Typiquement, la fonction de coût quadratique moyenne correspond à ce cas particulier.

Stratégie d'*early-stopping* Dans l'espace des observations, la borne (5) donne une convergence vers un coût nul, conduisant alors à un sur-ajustement même au bruit ϵ. Pour contourner ce problème, on peut utiliser une stratégie d'arrêt prématuré (« *early-stopping* ») permettant une régularisation implicite. On peut en effet choisir d'arrêter l'entraînement lorsque

$$t \geq \frac{4\Psi(\psi^{-1}(\|\epsilon\|))}{\sigma_{\mathbf{A}}^2 \sigma_{\min}(\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}_0))^2} - \Psi(\mathcal{L}(\mathbf{y}(0), \mathbf{y}))$$

afin d'assurer que la solution trouvée soit dans une boule autour de la solution qui sur-apprend le bruit. La taille de cette boule est donnée par la norme du bruit, de telle sorte que $\|\mathbf{y}(t) - \overline{\mathbf{y}}\| \leq 2\|\epsilon\|$.

Reconstruction du signal La borne (6) nous informe que la reconstruction du signal $\overline{\mathbf{x}}$ est bornée par une somme de trois termes. D'abord, une erreur d'optimisation qui de fait provient de (5) et qui converge vers 0 lorsque $t \to +\infty$. Ensuite, une erreur dûe au bruit en $\|\epsilon\|$. Enfin, une erreur donnée par $\mathrm{d}(\Sigma, \overline{\mathbf{x}})$, qui correspond à l'erreur de modélisation du réseau puisqu'elle indique la distance entre le signal à recouvrer $\overline{\mathbf{x}}$ et sa meilleure approximation que le réseau puisse générer au vu de son architecture.

Injectivité restreinte de l'opérateur A Le terme de bruit et l'erreur de modélisation sont tous les deux amplifiés par la valeur singulière minimale de $\mathbf{A}$ relative au cône tangent au point $\overline{\mathbf{x}}_\Sigma$. Cette valeur singulière capture la propriété d'injectivité de $\mathbf{A}$ restreinte à la classe de signaux à reconstruire. Cette quantité est naturelle (et très connue) dans la littérature des problèmes inverses car il est illusoire d'espérer une reconstruction même approchée de $\overline{\mathbf{x}}$ si $\mathbf{A}$ est singulier sur la classe de signaux correspondante. Il est aussi important de remarquer que cette condition d'injectivité restreinte est à mettre au regard de l'erreur de modélisation $\mathrm{d}(\overline{\mathbf{x}}, \Sigma)$. En effet, pour que cette dernière soit petite, on aurait tendante à rendre la famille Σ la plus grande possible. Ceci pourrait toutefois rendre la propriété d'injectivité restreinte plus difficile à respecter. En résumé, il faut un certain compromis entre la complexité de la classe Σ et le spectre de $\mathbf{A}$, chose qui est capturée dans les approches variationnelles classiques (orientées modèles) par le choix d'une régularisation appropriée.

3 Application aux réseaux à deux couches

Les garanties théoriques du Théorème 1 ne sont vraies que sous la condition (4). Dans ce paragraphe, nous montrons en quoi cette hypothèse est réaliste et vérifiée pour un réseau de type Deep Inverse/Image Prior (DIP) [19] à deux couches où l'entrée $\mathbf{u}$ est fixée. Formellement, ce réseau prend la forme

$$\mathbf{g}\left(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta} := (\mathbf{V}, \mathbf{W})\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \mathbf{V}\phi(\mathbf{W}\mathbf{u}) \tag{7}$$

où $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ est fixé, $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{k \times d}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$, avec ϕ la fonction d'activation. De plus, nous posons les hypothèses suivantes sur le réseau :

A-2. $\mathbf{u}$ *est un vecteur uniforme sur* $\mathbb{S}^{d-1}$ *;*
A-3. $\mathbf{W}(0)$ *a des entrées iid tirées sur* $\mathcal{N}(0, 1)$ *;*
A-4. $\mathbf{V}$ *a des entrées iid bornées par* D*, avec une covariance identité ;*
A-5. ϕ *est continument dérivable de dérivée borné par* $B > 0$ *et* B*-Lipschitz.*

L'hypothèse sur ϕ est vérifiée pour plusieurs activations usuelles comme la sigmoïde ou la tangente hyperbolique. Prendre en compte la ReLU induit des complications techniques que nous préférons éviter ici.

Sous ces hypothèses, nous sommes en mesure d'énoncer un résultat qui indique comment sur-paramétrer ce type de réseau afin qu'il respecte (4).

Théorème 2. *Pour un réseau à deux couches donné par* (7)*, entraîné par flot de gradient pour optimiser* $\mathcal{L}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}) = \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}\|^2$*, qui respecte les hypothèses* (A-2)-(A-5)*, si le nombre de neurones* k *sur la couche cachée obéit à*

$$k \geq C\kappa(\mathbf{A})^2 n \left(\sqrt{n}\left(\sqrt{\log(d)} + 1\right) + \sqrt{m}\right)^2,$$

alors la condition (4) *est vraie avec une probabilité* $1 - n^{-1} - d^{-1} - \exp(-n)$*, où* C *est constante positive qui dépend seulement de la fonction d'activation* ϕ *et de la borne* D*.*

La preuve de ce théorème est similaire à celle présentée dans [5]. Elle repose sur le fait que $\sigma_{\min}(\mathcal{J}(0)) > C$ si k est suffisamment sur-paramétré par rapport à n, et que $\mathrm{Lip}(\mathcal{J}) \lesssim \sqrt{\frac{n}{k}}$. La valeur de k nécessaire pour assurer que le réseau respecte (4) est celle donnée dans le théorème.

Quelques remarques sur ce résultat sont nécessaires pour éclairer le lecteur. Plusieurs travaux ont caractérisé la sur-paramétrisation nécessaire pour obtenir un comportement similaire des réseaux peu profonds pour différentes tâches, voir par exemple [1, 7, 16, 17]. Notre cadre présente toutefois des différences importantes. D'une part, nous disposons de mesures indirectes par l'intermédiaire de $\mathbf{A}$, la sortie n'est pas scalaire et il n'y a pas de supervision. D'autre part, contrairement à tous les travaux ci-dessus qui traitent d'un cadre d'apprentissage supervisé, dans le modèle DIP la dimension d de l'entrée est un paramètre libre, alors qu'elle est imposée dans un cadre supervisé.

Notre borne de sur-paramétrisation stipule que le nombre de neurones sur la couche cachée doit vérifier $k \gtrsim n^2 m$. La probabilité de succès du théorème augmente quant à elle à mesure que n devient grand. On voit par ailleurs l'effet du conditionnement de $\mathbf{A}$ sur la borne de sur-paramétrisation. Plus $\mathbf{A}$ est mal conditionné, plus la borne sur k devient exigeante. Ce phénomène peut être compris comme le fait que plus l'opérateur $\mathbf{A}$ est mal conditionné, plus le réseau a besoin d'être large pour résoudre le problème inverse. On sait toutefois que dans la pratique des réseaux plus petits peuvent produire des résultats similaires, ce qui indique que notre borne n'est pas optimale même si elle est en accord avec la littérature.

4 Conclusion

Nous avons proposé une analyse théorique des réseaux de neurones entraînés par flot de gradient pour résoudre des problèmes inverses. Nous avons notamment montré que sous un certain niveau de sur-paramétrisation du réseau, on peut obtenir une convergence vers une solution de coût nul, et avoir une borne sur la qualité de la reconstruction du signal sous-jacent, en mettant en exergue notamment le rôle d'une propriété d'injectivité restreinte. Ces résultats s'appliquent pour toute fonction de coût respectant l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz, ce qui inclut une grande classe de coûts usuels. Nous avons également analysé les différents termes dans nos bornes et discuté leur signification et leur impact. Ce travail constitue une étape vers une meilleure compréhension des réseaux de neurones dans le cadre des problèmes inverses. Dans des travaux futurs, nous étudierons la possibilité d'inclure d'autres fonctions d'activation comme la ReLU, d'aller vers d'autres flots, ou encore la généralisation aux réseaux multicouches.

Références

1. ALLEN-ZHU, Z., LI, Y., et SONG, Z. : A Convergence Theory for Deep Learning via Over-Parameterization. In : ICML (2019)
2. ARORA, S., DU, S., HU, W., LI, Z., et WANG, R. : Fine-Grained Analysis of Optimization and Generalization for Overparameterized Two-Layer Neural Networks. In : ICML (2019)
3. ARRIDGE, S., MAASS, P., OZAN, Ö., et SCHÖNLIEB, C.-B. : Solving inverse problems using data-driven models. Acta Numerica 28, 1-174 (2019)
4. BUSKULIC, N., QUÉAU, Y., et FADILI, J. : Convergence and Recovery Guarantees of Generative Neural Networks for Inverse Problems. Hal preprint 04059168 (2023)
5. BUSKULIC, N., QUÉAU, Y., et FADILI, J. : Convergence Guarantees of Overparametrized Wide Deep Inverse Prior. In : SSVM (2023)
6. CHIZAT, L., OYALLON, E., et BACH, F. : On Lazy Training in Differentiable Programming. In : NeurIPS (2019)
7. DU, S.S., ZHAI, X., POCZOS, B., et SINGH, A. : Gradient Descent Provably Optimizes Over-parameterized Neural Networks. In : ICLR (2019)
8. JACOT, A., GABRIEL, F., et HONGLER, C. : Neural Tangent Kernel : Convergence and Generalization in Neural Networks. In : NeurIPS (2018)
9. KAMILOV, U.S., BOUMAN, C.A., BUZZARD, G.T., et WOHLBERG, B. : Plug-and-Play Methods for Integrating Physical and Learned Models in Computational Imaging : Theory, algorithms, and applications. IEEE SPM 40(1), 85-97 (2023)
10. KURDYKA, K. : On gradients of functions definable in o-minimal structures. In : Annales de l'institut Fourier, p. 769-783 (1998)
11. ŁOJASIEWICZ, S. : Sur les trajectoires du gradient d'une fonction analytique. Semin. Geom., Univ. Studi Bologna 1982/1983, 115-117 (1984)
12. ŁOJASIEWICZ, S. : Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels. In : Les Équations aux Dérivées Partielles, p. 87-89. Editions du Centre National de la Recherche Scientifique (1963)
13. MONGA, V., LI, Y., et ELDAR, Y.C. : Algorithm Unrolling : Interpretable, Efficient Deep Learning for Signal and Image Processing. IEEE SPM 38(2), 18-44 (2021)
14. MUKHERJEE, S., HAUPTMANN, A., ÖKTEM, O., PEREYRA, M., et SCHÖNLIEB, C.-B. : Learned Reconstruction Methods With Convergence Guarantees : A survey of concepts and applications. IEEE SPM 40(1), 164-182 (2023)
15. ONGIE, G., JALAL, A., METZLER, C.A., BARANIUK, R.G., DIMAKIS, A.G., et WILLETT, R. : Deep Learning Techniques for Inverse Problems in Imaging. IEEE J-SAIT 1(1), 39-56 (2020)
16. OYMAK, S., et SOLTANOLKOTABI, M. : Overparameterized Nonlinear Learning : Gradient Descent Takes the Shortest Path ? In : ICML (2019)
17. OYMAK, S., et SOLTANOLKOTABI, M. : Toward Moderate Overparameterization : Global Convergence Guarantees for Training Shallow Neural Networks. IEEE J-SAIT 1(1), 84-105 (2020)
18. PROST, J., HOUDARD, A., ALMANSA, A., et PAPADAKIS, N. : Learning Local Regularization for Variational Image Restoration. In : SSVM (2021)
19. ULYANOV, D., VEDALDI, A., et LEMPITSKY, V. : Deep Image Prior. IJCV 128(7), 1867-1888 (2020)