

Décomposition tensorielle de rang faible pour l'imagerie de Stokes polarimétrique

Saulo CARDOSO BARRETO¹ Julien FLAMANT¹ Sebastian MIRON¹ David BRIE¹

¹Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy, France

Résumé – Nous présentons une nouvelle approche pour l'analyse et la segmentation d'images polarimétriques de Stokes. Notre approche repose sur un modèle tensoriel de rang faible, qui intègre des contraintes physiques liées à l'acquisition des données. Nous proposons également un algorithme rapide fondé sur une procédure de gradient proximal permettant une estimation efficace des paramètres du modèle. Les résultats numériques démontrent le fort potentiel de cette approche pour les applications en imagerie polarimétrique passive et active.

Abstract – We present a novel approach for the analysis and segmentation of Stokes polarimetric images. Our approach is based on a low-rank tensor model that incorporates physical constraints related to data acquisition. We also propose a fast algorithm based on a proximal gradient procedure allowing for efficient estimation of the model parameters. Numerical results demonstrate the high potential of this approach for passive and active polarimetric imaging applications.

1 Introduction

L'imagerie polarimétrique repose sur l'exploitation des propriétés de polarisation de la lumière. A l'instar de l'intensité et de la longueur d'onde, la polarisation définit un attribut physique fondamental qui a la particularité d'être vectoriel. En effet, la polarisation décrit la trajectoire (en général elliptique) du champ électromagnétique dans le plan 2D perpendiculaire à la direction de propagation. L'interaction de la lumière polarisée avec un milieu mène dans de nombreux cas à une évolution des propriétés géométriques de cette ellipse, fournissant ainsi des informations décisives quant au milieu observé, souvent inaccessibles aux modalités d'imageries conventionnelles. L'imagerie polarimétrique est ainsi une modalité clé pour de nombreuses applications, telles que la caractérisation d'échantillons biologiques [1], la télédétection [2], ou encore le diagnostic précoce de tissus cancéreux [3].

En imagerie optique¹, un état de polarisation est représenté par 4 valeurs expérimentalement mesurables appelées paramètres de Stokes [5]. Dans une image polarimétrique dite de Stokes, chaque pixel porte alors une information vectorielle, sous la forme d'un vecteur de paramètres de Stokes à 4 composantes. Ainsi, une image polarimétrique de Stokes définit naturellement un tableau tri-dimensionnel, que l'on appellera *tenseur* de Stokes. Il est alors possible d'envisager l'utilisation d'outils d'algèbre multilinéaire ou tensoriels [6] pour analyser et traiter ces données polarimétriques. Cette approche n'a, à notre connaissance, reçu que peu d'attention jusqu'à présent; nous étudions ici son potentiel.

Cet article propose un modèle tensoriel de rang faible dédié pour l'analyse et le traitement d'images polarimétriques de Stokes. Le modèle s'appuie sur une décomposition tensorielle de type bloc (BTD) [7] qui assure l'identifiabilité de la décomposition sous des conditions très générales. Les contributions de ce travail sont doubles : l'identification de contraintes de type non-négativité assurant l'interprétabilité physique des différents

facteurs du modèle, d'une part; d'autre part la formulation d'un algorithme proximal par blocs permettant une décomposition rapide et efficace d'un tenseur de Stokes, assortie de garanties théoriques. Une expérience numérique sur données simulées illustre la pertinence de l'approche.

Notations. Les vecteurs et matrices sont représentés en gras miniscule \mathbf{v} et gras majuscule \mathbf{M} . Les tenseurs correspondent ici à des tableaux tridimensionnels et sont notés en lettres scriptes \mathcal{T} . Un vecteur colonne de « 1 » de taille N est noté $\mathbf{1}_N$. La norme de Frobenius d'un vecteur, matrice ou tenseur est notée $\|\cdot\|$. Le produit extérieur (ou tensoriel) est noté par \circ ; le produit de Khatri-Rao de deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} est donné par $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ suivant les conventions de [8]. On note par $\mathbf{T}_{(n)}$ le dépliement matriciel d'un tenseur \mathcal{T} suivant son $n^{\text{ième}}$ mode.

2 Modèle tensoriel de rang-faible pour l'imagerie polarimétrique

2.1 Paramètres de Stokes

On note par S_0, S_1, S_2 et S_3 les paramètres de Stokes. Ces 4 grandeurs sont à valeurs réelles, mesurables expérimentalement et peuvent être interprétées comme suit. Le premier paramètre, S_0 , donne l'intensité *totale* de la lumière, à l'instar de l'imagerie d'intensité classique. Les trois paramètres restants S_1, S_2 et S_3 décrivent sa *polarisation*. La différence d'intensité entre polarisation linéaire horizontale et verticale est donnée par S_1 , alors que S_2 donne la composante polarisée suivant les axes $45^\circ/135^\circ$. Enfin S_3 indique la prépondérance entre les polarisations circulaires gauche et droite.

La Fig. 1 présente la sphère de Poincaré, un outil graphique permettant une visualisation géométrique des états de polarisation. A chaque point de la sphère correspond un état de polarisation donné, auquel peut être associée une ellipse de polarisation dont la géométrie est définie par l'orientation θ et l'ellipticité χ . Un changement de repère cartésien - sphérique donne l'expres-

Travail soutenu par le projet ANR RICOCHET n° ANR-21-CE48-0013.

¹Par opposition au domaine radar, où l'imagerie est dite "active" et fait appel à des outils et représentations spécifiques, voir [4].

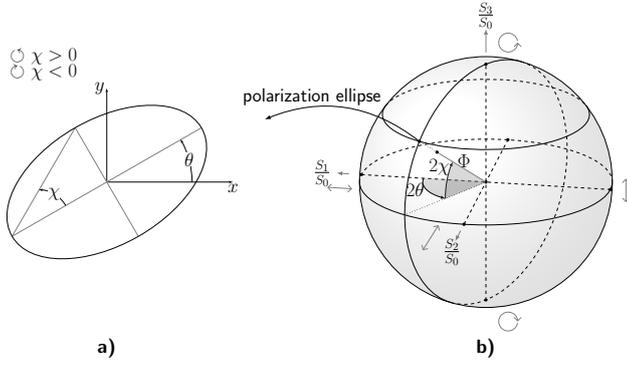


FIGURE 1 : a) Ellipse de polarisation b) Sphère de Poincaré.

sion des paramètres de Stokes

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 \Phi \cos 2\theta \cos 2\chi, \\ S_2 &= S_0 \Phi \sin 2\theta \cos 2\chi, \\ S_3 &= S_0 \Phi \sin 2\chi, \end{aligned} \quad (1)$$

où le degré de polarisation $\Phi = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}/S_0 \in [0, 1]$ quantifie le rapport entre intensité polarisée et intensité totale. Les états de polarisation totale ($\Phi = 1$) correspondent à la surface de la sphère ; pour $0 < \Phi < 1$, l'état est partiellement polarisé et se trouve à l'intérieur ; le cas $\Phi = 0$, correspondant au centre de la sphère, est dit non-polarisé. A partir de la Fig. 1, on remarque qu'une polarisation circulaire totale ($\Phi = 1, \chi = \pm\pi/4$) donne $S_3/S_0 = \pm 1$ et $S_1 = S_2 = 0$, tandis qu'une polarisation linéaire horizontale totale ($\Phi = 1, \theta = \chi = 0$) donne $S_1/S_0 = 1$ et $S_2 = S_3 = 0$.

Contraintes physiques. Les paramètres de Stokes obéissent à de fortes contraintes et ne peuvent donc être arbitraires. En particulier, puisque S_0 est une intensité et que le degré de polarisation ne peut excéder 1, un vecteur de Stokes $[S_0, S_1, S_2, S_3]^T$ doit satisfaire

$$S_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (\mathcal{S})$$

On notera par \mathbb{R}_S^4 l'ensemble des vecteurs obéissant à la contrainte (\mathcal{S}) . Cette dernière définit un cône du second-ordre dans \mathbb{R}^4 et qui peut être interprétée comme une extension de la contrainte de non-négativité usuelle au cas vectoriel. Introduisons la matrice de cohérence $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ qui, par construction physique [5], correspond à la matrice de corrélation statistique du champ électromagnétique 2D. On peut alors montrer

$$\mathbf{J}(S_0, S_1, S_2, S_3) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_0 + S_1 & S_2 + iS_3 \\ S_2 - iS_3 & S_0 - S_1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

La matrice \mathbf{J} est semi-définie positive par construction. Un calcul direct montre que $\mathbf{J} \succeq 0 \Leftrightarrow \text{Tr} \mathbf{J} \geq 0$ et $\det \mathbf{J} \geq 0 \Leftrightarrow (\mathcal{S})$. Cette équivalence sera utile par la suite pour l'implémentation pratique de la contrainte (\mathcal{S}) .

2.2 Décomposition tensorielle par blocs sous contraintes physiques

Considérons une image polarimétrique de taille $I \times J$ où chaque pixel est un vecteur de Stokes dans \mathbb{R}_S^4 . Cette image définit un

tenseur $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_S^{I \times J \times 4}$ de telle sorte que le pixel d'indice (i, j) s'écrit

$$\mathcal{T}_{ij} = [S_0(i, j), S_1(i, j), S_2(i, j), S_3(i, j)]^T \in \mathbb{R}_S^4. \quad (3)$$

Une hypothèse raisonnable est de supposer un modèle de mélange linéaire pour \mathcal{T} , i.e., le vecteur de Stokes mesuré à un pixel (i, j) donné peut s'écrire comme la combinaison linéaire de R vecteurs de Stokes élémentaires $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_R \in \mathbb{R}_S^4$ tel que $\mathcal{T}_{ij} = \sum_{r=1}^R (\mathbf{T}_r)_{ij} \cdot \mathbf{c}_r$, où $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_R \in \mathbb{R}_+^{I \times J}$ sont les matrices de mélange spatiales associées aux R états de polarisation. Ce modèle correspond à la superposition incohérente des vecteurs de Stokes associés aux différentes régions de l'image polarimétrique [5]. Le modèle de mélange linéaire s'écrit ainsi de manière compacte

$$\mathcal{T} \approx \sum_{r=1}^R \mathbf{T}_r \circ \mathbf{c}_r, \quad (4)$$

où \circ est le produit tensoriel. Les matrices \mathbf{T}_r sont supposées non-négatives : cela assure d'une part leur interprétabilité en tant que carte d'activation de l'état de polarisation \mathbf{c}_r associé ; d'autre part, cela assure que (4) définit une combinaison conique d'éléments de \mathbb{R}_S^4 , et ainsi chaque pixel de l'image polarimétrique reconstruite est un vecteur de Stokes, i.e., un vecteur de \mathbb{R}^4 vérifiant (\mathcal{S}) .

Décomposition tensorielle par blocs. Une hypothèse courante consiste à modéliser chaque matrice de mélange par une approximation de rang faible telle que $\mathbf{T}_r \approx \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T$, avec $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}_+^{I \times L}$ et $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}_+^{J \times L}$ et $L \ll I, J$ où \mathbf{A}_r et \mathbf{B}_r héritent des contraintes de non-négativité sur \mathbf{T}_r . On définit alors le modèle de rang-faible par bloc (BTD) suivant

$$\mathcal{T} \approx \sum_{r=1}^R (\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T) \circ \mathbf{c}_r, \quad (5)$$

qui est un modèle LL1 [8] particulier avec des contraintes de non-négativité (en un sens généralisé) sur les facteurs. On pose $\mathcal{T} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \Psi_L]$, avec $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_R] \in \mathbb{R}_+^{I \times LR}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_R] \in \mathbb{R}_+^{J \times LR}$, et $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_R] \in \mathbb{R}_S^{4 \times R}$ (chaque colonne est un vecteur de Stokes). La matrice Ψ_L permet d'associer un unique état de polarisation \mathbf{c}_r aux activations spatiales $\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T$ en répétant L fois chaque colonne de \mathbf{C} tel que $\Psi_L = \text{blkdiag}(\mathbf{1}_L^T \dots \mathbf{1}_L^T) \in \mathbb{N}^{R \times RL}$. Les dépliements matriciels du modèle proposé (5) sont alors donnés par [7] :

$$\mathbf{T}_{(1)} = (\mathbf{B} \circ \mathbf{C} \Psi_L) \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{JK \times I}, \quad (6)$$

$$\mathbf{T}_{(2)} = (\mathbf{C} \Psi_L \circ \mathbf{A}) \mathbf{B}^T \in \mathbb{R}^{KI \times J}, \quad (7)$$

$$\mathbf{T}_{(3)} = (\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \Psi_L^T \mathbf{C}^T \in \mathbb{R}^{IJ \times K}. \quad (8)$$

Garanties d'identifiabilité. Une décomposition tensorielle est dite identifiable si les seules ambiguïtés sont des ambiguïtés triviales du modèle. En particulier, pour le modèle (5), celles-ci correspondent à une permutation des différents termes, ou un facteur d'échelle λ_r tel que $(\lambda_r \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T) \circ (\lambda_r^{-1} \mathbf{c}_r) = \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T \circ \mathbf{c}_r$. En outre seul le sous-espace engendré par \mathbf{A}_r et \mathbf{B}_r est identifiable car il est toujours possible de trouver une matrice inversible \mathbf{D} telle que $\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T = \mathbf{A}_r \mathbf{D} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}_r^T$. Plusieurs conditions suffisantes d'identifiabilité pour le modèle LL1 peuvent être obtenues [7]. On donne ici la suivante, adaptée au modèle (5) :

$$\left\lfloor \frac{IJ}{L^2} \right\rfloor \geq R \quad \text{et} \quad \left(\min(\lfloor I/L \rfloor, R) + \min(\lfloor J/L \rfloor, R) + \min(4, R) \geq 2R + 2 \right) \quad (9)$$

avec $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière inférieure.

2.3 Algorithme de gradient proximal par blocs

Problème d'optimisation. La résolution du modèle BTD (5) se formule comme le problème d'optimisation non-convexe

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{B} \geq 0, \mathbf{C} \in \mathbb{R}_S^{4 \times R}} \|\mathcal{T} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \Psi_L]\|^2. \quad (10)$$

Pour résoudre (10), on adopte une approche de minimisation alternée sur chacun des facteurs du modèle, qui consiste à itérer successivement sur \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} de telle sorte qu'à partir de l'itération k on calcule dans l'ordre

$$\mathbf{A}^{k+1} \leftarrow \operatorname{argmin}_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}_+^{I \times RL}} \|\mathbf{T}_{(1)} - (\mathbf{B}^k \odot \mathbf{C}^k \Psi_L) \mathbf{A}^\top\|^2, \quad (11)$$

$$\mathbf{B}^{k+1} \leftarrow \operatorname{argmin}_{\mathbf{B} \in \mathbb{R}_+^{J \times RL}} \|\mathbf{T}_{(2)} - (\mathbf{C}^k \Psi_L \odot \mathbf{A}^{k+1}) \mathbf{B}^\top\|^2, \quad (12)$$

$$\mathbf{C}^{k+1} \leftarrow \operatorname{argmin}_{\mathbf{C} \in \mathbb{R}_S^{4 \times R}} \|\mathbf{T}_{(3)} - (\mathbf{A}^{k+1} \odot \mathbf{B}^{k+1}) \Psi_L^\top \mathbf{C}^\top\|^2, \quad (13)$$

où l'on a utilisé les dépliement matriciels (6)–(8) pour la définition des fonctions coût $f_X^k(\cdot)$ associées à chacun des sous-problèmes. Les trois sous-problèmes sont convexes, $f_X^k(\cdot)$ étant convexe (coût quadratique) et les contraintes l'étant également. On peut ainsi résoudre (11)–(13) à l'aide de méthodes génériques, telles qu'un algorithme de gradient proximal par blocs, où la résolution d'un des sous-problèmes est décrite ci-dessous. Ce choix est motivé par la simplicité de l'implémentation, son faible coût computationnel, et les garanties de convergence [9] vers un point stationnaire de la fonction objectif (10) de la séquence (11)–(13).

Gradient proximal. En posant $\mathbf{X} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$, chaque sous-problème (11)–(13) peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation convexe sous contrainte d'appartenance à ensemble convexe $G : \min_{\mathbf{X} \in G} f_X(\mathbf{X})$. Dans ce cas, l'algorithme du gradient proximal se réduit à l'algorithme du gradient projeté [9, Ch. 10], soit à une itération n donnée,

$$\mathbf{X}^{n+1} = P_X \left(\mathbf{X}^n - \alpha_n \nabla f_X(\mathbf{X}^n) \right), \quad (14)$$

avec α_n le pas de descente et P_X la projection sur G . Les opérateurs de projection pour chacun des sous-problèmes sont explicités ci-après. En pratique, on utilise une version accélérée de cet algorithme appelée FISTA, et dont les itérations sont données explicitement dans l'Algorithme 1. Le pas α_n est contrôlé par *backtracking* suivant l'approche décrite dans [9, p. 150] de façon à assurer une condition de décroissance suffisante sur la fonction objectif.

Projections. Les projections P_A et P_B assurent que les entrées de \mathbf{A} et \mathbf{B} sont non-négatives. Leur expression est classique $P_A(\mathbf{A}) = \max(0, \mathbf{A})$ et $P_B(\mathbf{A}) = \max(0, \mathbf{B})$ où le maximum est défini élément par élément. À l'inverse, la projection de \mathbf{C} sur l'ensemble $\mathbb{R}_S^{4 \times R}$ est moins usuelle. Elle consiste à projeter chaque colonne $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_R$ de la matrice \mathbf{C} sur \mathbb{R}_S^4 . Comme expliqué en Section 2.1, cela est équivalent à calculer la projection de la matrice \mathbf{J} définie en (2) sur l'ensemble des

Algorithme 1 : FISTA pour $\min_{\mathbf{X} \in G} f_X(\mathbf{X})$

Input : initialisation \mathbf{X}^0
1 $\mathbf{Y}^0 \leftarrow \mathbf{X}^0$
2 $t_0 = 1$
3 **while** critère d'arrêt non satisfait **do**
4 $\mathbf{X}^{n+1} \leftarrow P_X(\mathbf{Y}^n - \alpha_n \nabla f_X^k(\mathbf{Y}^n))$
5 $t_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_n^2}}{2}$
6 $\mathbf{Y}^{n+1} \leftarrow \mathbf{X}^{n+1} + \left(\frac{t_n - 1}{t_{n+1}}\right)(\mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{X}^n)$
7 **end**

matrices semidefinie positives de taille 2×2 complexes $\mathbb{C}_{++}^{2 \times 2}$. Cette projection s'écrit simplement

$$P_{\mathbb{C}_{++}^{2 \times 2}}(\mathbf{J}(\mathbf{c}_r)) = \sum_{i=1}^2 \max(0, \eta_i) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\dagger = \begin{bmatrix} \sigma & \gamma \\ \bar{\gamma} & \beta \end{bmatrix} \quad (15)$$

avec η et \mathbf{v} les valeurs propres et vecteurs propres de $\mathbf{J}(\mathbf{c}_r)$. Cette projection est unique. Puisque $\mathbf{c}_r \mapsto \mathbf{J}(\mathbf{c}_r)$ est bijectif, on obtient $P_c(\mathbf{c}_r)$ comme

$$P_c(\mathbf{c}_r) = [(\sigma + \beta), (\sigma - \beta), 2 \operatorname{Re}(\gamma), 2 \operatorname{Im}(\gamma)]^\top. \quad (16)$$

Enfin, on obtient la projection $P_C(\mathbf{C})$ en appliquant $P_c(\mathbf{c}_r)$ à chacune des colonnes de \mathbf{C} .

3 Validation expérimentale

Dans cette section, nous illustrons l'approche présentée sur des données de Stokes simulées. Un tenseur de Stokes synthétique avec $I = J = 160$ a été généré. Les valeurs d'intensité ont été tirées à partir d'une distribution uniforme, et pour la simplicité, des états totalement polarisés ont été utilisés pour les vecteurs de Stokes. Les résultats des deux décompositions, pour deux valeurs différentes de L , sont montrés. Dans les deux cas, la condition suffisante d'unicité (9) est respectée.

Pour une convergence plus rapide, la matrice de facteurs \mathbf{C} a été initialisée avec le résultat d'un algorithme des k -moyennes, dans lequel, le nombre de clusters correspond au nombre de termes R de la décomposition. Les centroïdes des clusters définissent les valeurs initiales des colonnes de \mathbf{C} . La projection P_C a été ensuite appliquée à \mathbf{C} pour s'assurer que la condition (S) est satisfaite. Une factorisation en matrices non-négatives (NMF) avec un rang L est également appliquée sur les R matrices de mélange spatiales identifiées par l'algorithme des k -moyennes, et utilisée comme initialisation pour \mathbf{A}_r et \mathbf{B}_r . Ces étapes nous permettent d'observer une convergence rapide de l'algorithme pour les deux valeurs de L utilisées.

La Fig. 2a) illustre les données d'entrée ; les résultats de la décomposition sont présentés dans la Fig. 2b). Comme attendu, il y a une relation directe entre la valeur de L et la capacité du modèle à représenter des informations spatiales complexes. Néanmoins, même pour de faibles valeurs du paramètre L ($L = 3$), les composantes sont reconstruites de manière satisfaisante et leurs états de polarisation sont correctement estimés, malgré une reconstruction de qualité moyenne de l'arrière-plan (en raison de sa complexité). L'utilisation d'une valeur de L plus élevée ($L = 15$) permet d'améliorer la résolution spatiale, tout en conservant l'identifiabilité du modèle. La projection sur les contraintes définies par (S) a permis une estimation des états de

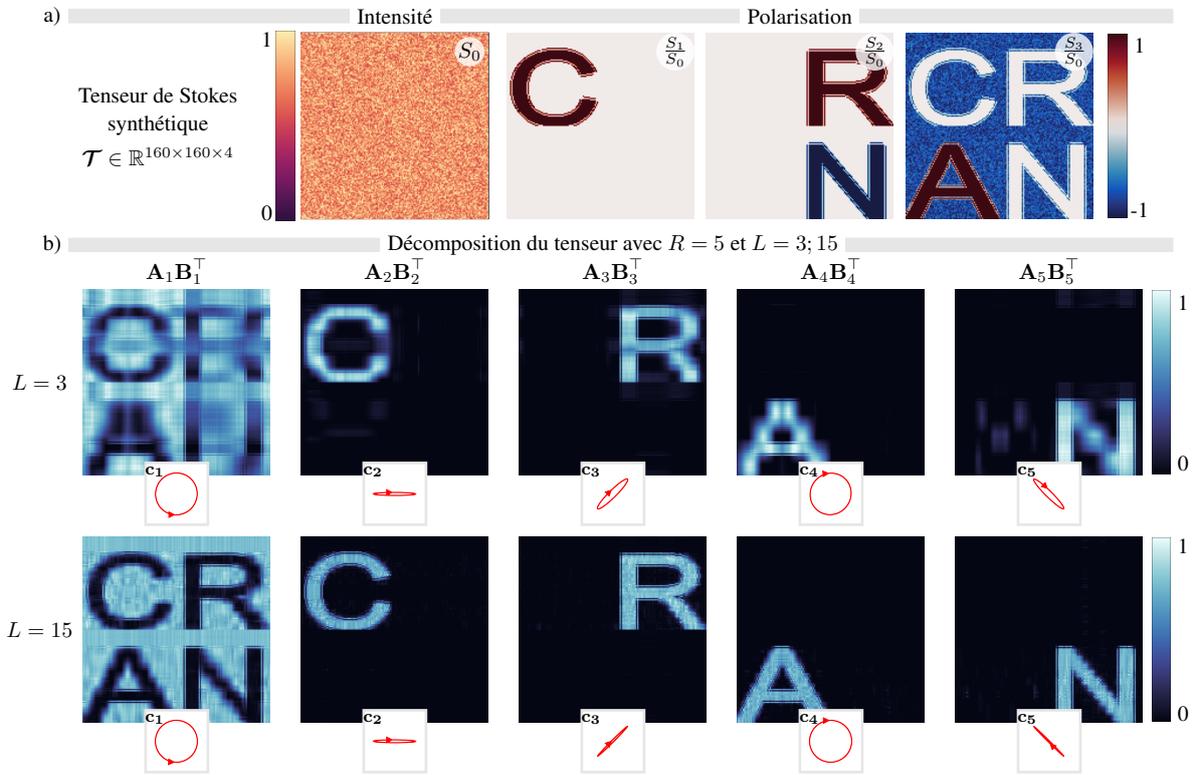


FIGURE 2 : Décomposition du tenseur de Stokes construit en utilisant des états de polarisation élémentaires. **a)** Visualisation de l’intensité (S_0) tirée aléatoirement à partir d’une loi uniforme $0.5 \geq S_0 \geq 1$ et des paramètres S_1, S_2, S_3 normalisés. **b)** Résultat de la décomposition avec $R = 5$ pour deux valeurs différentes de L . Chaque ellipse correspond à une colonne c_r de C , et caractérise l’état de polarisation de l’image $A_r B_r^\top$ correspondante.

polarisation interprétables, comme le montrent les ellipses de polarisation de la Fig. 2b). Nous pouvons également constater que les vecteurs de Stokes c_r estimés par les deux décompositions sont légèrement différents. Pour $L = 15$, la récupération des états de polarisation élémentaires est un peu meilleure par rapport à la décomposition avec un rang plus petit. Il est important aussi de mentionner que, grâce au modèle tensoriel, nous avons pu utiliser un rang de décomposition $R = 5$, supérieur à la dimension originale du dernier mode du tenseur de Stokes.

4 Conclusions et perspectives

Nous avons introduit dans cette communication une nouvelle approche pour l’analyse d’images polarimétriques de Stokes, fondée sur un modèle tensoriel de rang faible de type $LL1$ avec des contraintes physiques. Nous avons développé également un algorithme de gradient proximal par blocs pour ajuster le modèle aux données, permettant de prendre en compte de façon simple et efficace les contraintes. On a obtenu ainsi une approche rapide permettant de décomposer une image polarimétrique en termes élémentaires, avec des garanties d’identifiabilité. Plus qu’une simple segmentation visant à associer chaque point à une classe, nous avons proposé une approche qui estime conjointement les états de polarisation et les cartes d’activation spatiales associées. L’interprétabilité des résultats est garantie grâce aux contraintes physiques imposées directement lors de la décomposition.

La flexibilité et les garanties d’unicité du modèle $LL1$, ainsi que les garanties de convergence de l’algorithme de gradient proximal, illustrent le potentiel de l’approche proposée pour d’autres types d’applications en optique, à fort impact applicatif, e.g., l’imagerie active par matrices de Mueller.

Références

- [1] C. HE, H. HE, J. CHANG et al., “Polarisation optics for biomedical and clinical applications : a review”, *Light : Science & Applications*, t. 10, n° 1, p. 194, 2021.
- [2] C. JAMET, A. IBRAHIM, Z. AHMAD et al., “Going beyond standard ocean color observations : lidar and polarimetry”, *Frontiers in Marine Science*, t. 6, p. 251, 2019.
- [3] B. KUNNEN, C. MACDONALD, A. DORONIN et al., “Application of circularly polarized light for non-invasive diagnosis of cancerous tissues and turbid tissue-like scattering media”, *Journal of biophotonics*, t. 8, n° 4, p. 317-323, 2015.
- [4] J.-S. LEE et E. POTTIER, *Polarimetric radar imaging : from basics to applications*. CRC press, 2017.
- [5] J. J. GIL et R. OSSIKOVSKI, *Polarized light and the Mueller matrix approach*. CRC press, 2022.
- [6] T. G. KOLDA et B. W. BADER, “Tensor decompositions and applications”, *SIAM review*, t. 51, n° 3, p. 455-500, 2009.
- [7] L. DE LATHAUWER, “Decompositions of a higher-order tensor in block terms—Part II : Definitions and uniqueness”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, t. 30, n° 3, p. 1033-1066, 2008.
- [8] L. DE LATHAUWER et D. NION, “Decompositions of a Higher-Order Tensor in Block Terms—Part III : Alternating Least Squares Algorithms”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, t. 30, n° 3, p. 1067-1083, 2008.
- [9] A. BECK, *First-Order Methods in Optimization* (MOS-SIAM Series on Optimization). Society for Industrial et Applied Mathematics, 2017.