

# Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : un système d'oscillateurs harmoniques couplés

Julien FLAMANT<sup>1</sup> Pierre-Olivier AMBLARD<sup>2</sup> Nicolas LE BIHAN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy, France

<sup>2</sup>CNRS, Univ. Grenoble Alpes, Grenoble INP, GIPSA-lab, 38000 Grenoble France

**Résumé** – Ce papier considère un système d'oscillateurs harmoniques couplés comme système générateur de signaux bivariés polarisés. On se place dans le cas d'un faible couplage avec des fréquences propres légèrement différentes. Nous étudions ce système d'un point de vue signal et exhibons quelques propriétés intéressantes du système pour l'utiliser en génération de signaux aléatoires polarisés. Enfin, en appliquant des techniques d'approximation d'enveloppes lentement variables, nous rappelons la réduction d'un tel modèle à l'équation de Schrödinger d'un système quantique à deux niveaux, dont l'étude est détaillée dans le papier compagnon.

**Abstract** – This paper considers a system of coupled harmonic oscillators as a generator of polarized bivariate signals. We consider the case of a weak coupling with slightly different eigenfrequencies. We study this system from a signal point of view and show some interesting properties of the system for use in polarized random signal generation. Finally, by applying slowly variable envelope approximation techniques, we recall the reduction of such a model to the Schrödinger equation of a two-level quantum system, the study of which is detailed in the companion paper.

**Propos liminaire.** Ce papier constitue un des deux états d'une contribution bivariée au GRETSI. Il est couplé à son état compagnon [1]. Ces deux articles peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre, chacun dans son état propre.

## 1 Introduction

Les signaux bivariés apparaissent dès lors que l'analyse jointe de deux signaux est nécessaire : composantes transverses de signaux polarisés en sismologie et optique, composantes radiales et verticales de signaux de vitesse particulière en acoustique sous-marine, ou encore modes *plus* et *cross* des ondes gravitationnelles. Dans ces applications, il est crucial de pouvoir caractériser finement les différentes relations d'amplitude et de phase entre les deux composantes du signal bivarié : celles-ci décrivent la géométrie du signal, encore appelée *polarisation* en physique. Cette dernière porte de nombreuses informations quant à la nature du système observé : par exemple, une évolution temporelle des propriétés de polarisation d'une onde gravitationnelle est révélatrice de phénomènes complexes liés à la dynamique du mouvement orbital de la source, connus sous le nom de *précession*.

La modélisation, l'analyse et le traitement des signaux bivariés en termes géométriques et physiques requiert des développements dédiés. En effet, les outils actuels du traitement du signal multivarié (le cas bivarié étant le plus simple) sont fondés sur une représentation vectorielle des signaux : cette représentation a l'avantage d'être générique, au sens où elle permet de formuler et résoudre des problèmes de traitement du signal en termes d'algèbre linéaire ; à l'inverse, elle ne permet pas de description simple et intuitive des propriétés de polarisation des signaux bivariés. Ce souci d'interprétabilité est connu de longue date en physique, et plus particulièrement en optique, motivant l'utilisation de représentations alternatives interprétables géométriquement – telles que les paramètres de

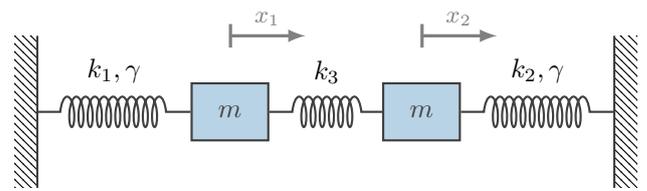


FIGURE 1 : Système physique considéré.

Stokes [2]. Ainsi, la définition de modèles de signaux bivariés paramétriques simples et physiquement interprétables reste encore une question largement ouverte, n'ayant reçu qu'une attention limitée jusqu'à présent (voir [3] par exemple).

Cette contribution se propose d'étudier un système physique simple constitué de deux oscillateurs harmoniques couplés avec un jeu réduit de paramètres. Nous proposons une interprétation traitement du signal du système comme un filtre linéaire invariant dans le temps et agissant sur un signal bivarié. Plusieurs comportements uniques et non-intuitifs des signaux bivariés sont proposés. Nous terminons ce papier par son couplage avec le papier compagnon, en montrant la réduction du modèle étudié ici en l'équation de Schrödinger étudiée dans [1], et en ouvrant quelques perspectives non linéaires.

## 2 Modèle physique

La Fig. 1 présente le système physique considéré. Il s'agit de deux systèmes masses-ressort-amortisseur de masse  $m$  et d'amortissement  $\gamma$  identiques et de raideurs respectives  $k_1$  et  $k_2$  ; les deux oscillateurs sont couplés par un ressort idéal de raideur  $k_3$ . Les deux variables  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  donnent les positions horizontales des axes respectifs des deux masses par rapport à leur position d'équilibre. Ce modèle apparaît notamment dans l'étude vibratoire des systèmes mécaniques

[4, Exemple 4.2.5] ou dans l'étude d'analogies mécaniques aux systèmes quantiques à deux niveaux [5]. Un bilan des forces sur chacune des masses permet d'obtenir les équations du mouvement sur  $x_1$  et  $x_2$  suivantes :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + \gamma\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_3(x_1 - x_2) &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + \gamma\dot{x}_2 + k_2x_2 + k_3(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\dot{x}_i, \ddot{x}_i$  dénotent les dérivées première et seconde de  $x_i$  pour  $i = 1, 2$ . La présence du ressort de raideur  $k_3$  liant les deux masses assure le couplage entre les deux composantes du signal bivarié  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^\top \in \mathbb{R}^2$ .

Comme  $(k_1, k_2, k_3, m)$  sont positifs par hypothèse, on introduit un nouveau jeu de paramètres  $(\omega_1, \omega_2, \kappa, \xi)$  selon

$$\omega_i = \left( \frac{k_i + k_3}{m} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \kappa = -\frac{k_3}{m}, \quad \xi = \frac{\gamma}{m}. \quad (2)$$

L'équation du mouvement (1) devient alors

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \xi\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 + \kappa x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \xi\dot{x}_2 + \omega_2^2x_2 + \kappa x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

On remarque ainsi que  $\omega_1 = \omega_2$  si et seulement si les raideurs des ressorts sont égales  $k_1 = k_2$ ; d'autre part  $\kappa = 0$  si et seulement si  $k_3 = 0$  (pas de couplage) et  $\xi = 0$  si et seulement si  $\gamma = 0$ , i.e., les ressorts sont supposés idéaux (amortissement nul). Dans la suite, on étudie le comportement fréquentiel du système défini par l'équation différentielle vectorielle (3). En particulier, celle-ci définit un filtre linéaire temps-invariant du second-ordre. Nous nous proposons d'établir et d'illustrer quelques unes de ses caractéristiques non-intuitives.

### 3 Filtre linéaire bivarié du 2<sup>ème</sup> ordre

On considère à présent la solution forcée au système précédent, c'est-à-dire en remplaçant dans (3) le terme de droite par une entrée vectorielle arbitraire  $\mathbf{e}(t) \in \mathbb{R}^2$ . Par transformée de Fourier, on obtient alors le système linéaire suivant, paramétré par la pulsation  $\omega$  :

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 + j\xi\omega & \kappa \\ \kappa & \omega_2^2 - \omega^2 + j\xi\omega \end{bmatrix} \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{E}(\omega) \quad (4)$$

où  $\mathbf{X}(\omega)$  et  $\mathbf{E}(\omega)$  sont les transformées de Fourier de  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{e}(t)$ . Le signal  $\mathbf{x}(t)$  est donc interprété comme la sortie d'un filtre linéaire temps-invariant matriciel bivarié, car agissant sur une entrée  $\mathbf{e}(t) \in \mathbb{R}^2$ . Ce filtre est défini par sa fonction de transfert matricielle  $\mathbf{H}(\omega) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  telle que  $\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{E}(\omega)$  avec

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{d(\omega)} \begin{bmatrix} \omega_2^2 - \omega^2 + j\xi\omega & -\kappa \\ -\kappa & \omega_1^2 - \omega^2 + j\xi\omega \end{bmatrix} \quad (5)$$

où  $d(\omega) = \det \mathbf{H}^{-1}(\omega)$ . On s'intéresse à présent à l'étude des valeurs propres et vecteurs propres du filtre décrit par  $\mathbf{H}(\omega)$ , une approche correspondant à l'étude des *modes normaux* de systèmes oscillant à plusieurs degrés de liberté en physique. Dans la suite, on posera  $\omega_1 = \omega_0 + \Delta$  et  $\omega_2 = \omega_1 - \Delta$  pour simplifier les expressions.

**Valeur propres.** On obtient directement les valeurs propres de  $\mathbf{H}(\omega)$  à partir des valeurs propres de son inverse, soit :

$$\lambda_{1,2}(\omega) = \left[ \omega_0^2 + \Delta^2 + j\xi\omega - \omega^2 \pm \sqrt{4\omega_0^2\Delta^2 + \kappa^2} \right]^{-1}. \quad (6)$$

Les valeurs propres sont à valeurs complexes, et réelles si et seulement si il n'y pas d'amortissement ( $\xi = 0$ ). D'autre part,  $\lambda_1(\omega) = \lambda_2(\omega)$  pour tout  $\omega$  si et seulement si  $\kappa = 0$  (pas de couplage) et  $\Delta = 0$  (pulsations propres identiques  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ ). On remarque enfin que la forme générale de  $\lambda_1(\omega)$  et  $\lambda_2(\omega)$  est celle de la réponse fréquentielle (complexe) d'un filtre du second ordre, et peut être mise sous forme canonique si besoin.

**Vecteurs propres.** Hors cas dégénérés, la matrice  $\mathbf{H}(\omega)$  est inversible pour tout  $\omega$ . Par conséquent, ses vecteurs propres sont les mêmes que son inverse. On trouve ainsi :

$$\lambda_1(\omega) : \quad \mathbf{v}_1(\omega) = c \begin{bmatrix} 2\omega_0\Delta + \sqrt{4\omega_0^2\Delta^2 + \kappa^2} \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\lambda_2(\omega) : \quad \mathbf{v}_2(\omega) = c \begin{bmatrix} -\kappa \\ 2\omega_0\Delta + \sqrt{4\omega_0^2\Delta^2 + \kappa^2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

dans le cas  $\kappa \neq 0$  et  $\Delta \neq 0$ , et où  $c \in \mathbb{R}$  est une constante de normalisation indépendante de la pulsation. Dans le cas  $\kappa = \Delta = 0$ , on a  $\lambda_1(\omega) = \lambda_2(\omega)$  et les vecteurs propres peuvent être choisis comme  $\mathbf{v}_1(\omega) = [1 \ 0]^\top$ ,  $\mathbf{v}_2(\omega) = [0 \ 1]^\top$ . On remarque ainsi que pour tout jeu de paramètres  $(\omega_0, \Delta, \xi, \kappa)$  les vecteurs propres  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  de  $\mathbf{H}(\omega)$  sont indépendants de  $\omega$  et orthogonaux. De plus,  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  peuvent toujours être choisis réels, de tel sorte que les modes normaux associés correspondent (à une rotation du plan près dépendant du couplage  $\kappa$ ) à des oscillations suivant les deux axes de  $\mathbb{R}^2$ .

**Formule des interférences.** On s'intéresse à présent à l'action du filtre sur un signal d'entrée  $\mathbf{e}(t) \in \mathbb{R}^2$  au travers de l'évolution de ses propriétés d'ordre deux. Supposons que le signal  $\mathbf{e}(t)$  est un signal aléatoire stationnaire au second-ordre. Sa densité spectrale de puissance (DSP) matricielle  $\mathbf{\Gamma}_e(\omega) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  est définie par

$$\mathbf{\Gamma}_e(\omega) = \begin{bmatrix} \Gamma_{e_1e_1}(\omega) & \Gamma_{e_1e_2}(\omega) \\ \Gamma_{e_2e_1}(\omega) & \Gamma_{e_2e_2}(\omega) \end{bmatrix} \quad (9)$$

où  $\Gamma_{e_1e_1}(\omega)$  et  $\Gamma_{e_2e_2}(\omega)$  sont les DSP des signaux univariés  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ , et où  $\Gamma_{e_1e_2}(\omega)$  est l'interspectre entre les deux composantes  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ . La formule des interférences donne alors l'expression de la DSP de  $\mathbf{x}(t)$  en sortie du filtre par

$$\mathbf{\Gamma}_x(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{\Gamma}_e(\omega)\mathbf{H}^H(\omega) \quad (10)$$

où  $^H$  est l'opérateur transposé-conjugué. Dans la section suivante, on s'intéresse aux conséquences de la formule (10) lorsque qu'on attaque le filtre  $\mathbf{H}(\omega)$  par un bruit blanc pouvant être *polarisé*.

### 4 Réponse à un bruit blanc polarisé

On s'intéresse à présent à la panoplie de signaux pouvant être générés par le filtre  $\mathbf{H}(\omega)$  lorsque celui-ci est attaqué par une entrée  $\mathbf{e}(t)$  de type bruit blanc, potentiellement *polarisé*. Nous allons montrer qu'il est possible d'obtenir une variété de signaux, dont la polarisation varie avec la pulsation  $\omega$  de manière non-triviale (et non-intuitive). Ces effets sont analysés et illustrés grâce à un jeu de 4 grandeurs physiques appelés paramètres de Stokes [6]. On considère ici leur version fréquentielle ; leur définition temporelle est utilisée dans le papier compagnon [1].

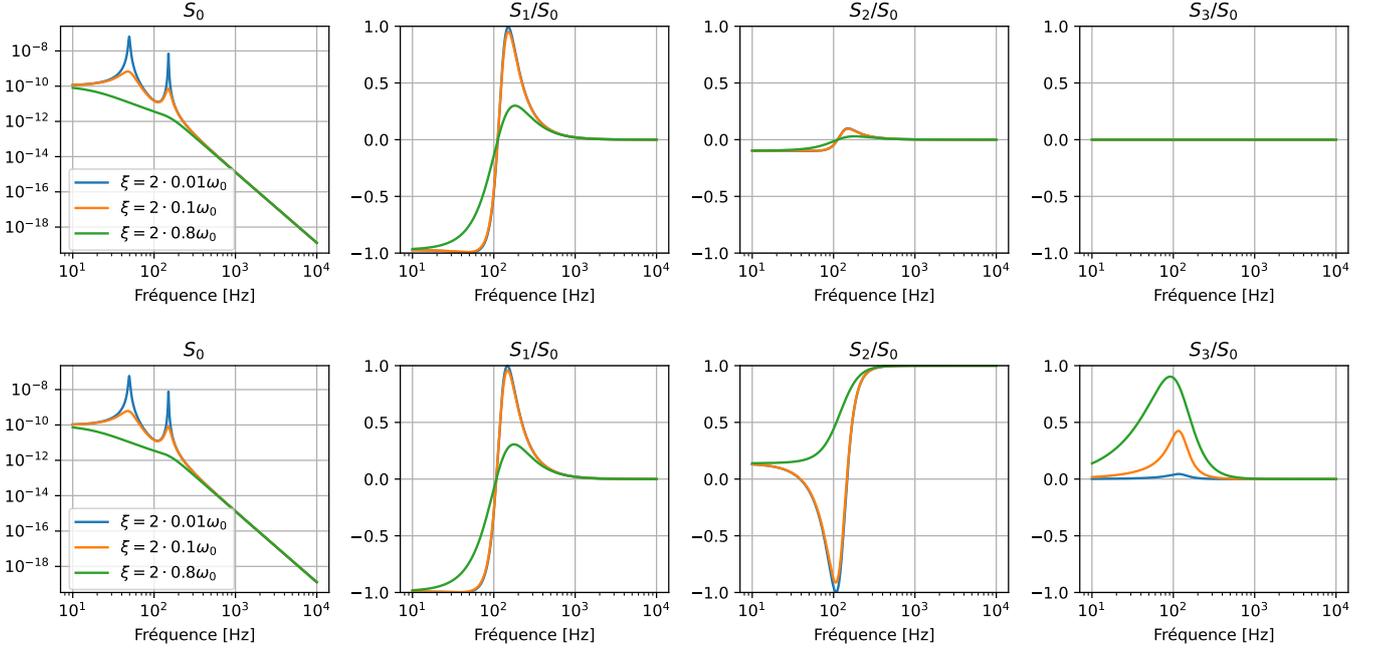


FIGURE 2 : Paramètres de Stokes fréquentiels pour la réponse à un bruit blanc non polarisé (ligne supérieure), et à un bruit blanc polarisé (ligne inférieure). Le paramètre  $S_0$  est en unités arbitraires. Pour chaque expérience, l'amortissement  $\xi$  varie, les autres paramètres étant fixés à  $\omega_0 = 2\pi \cdot 100$  Hz,  $\kappa = 0.1\omega_0^2$ ,  $\Delta = 0.5\omega_0$ . On note que  $\kappa \ll 2\omega_0\Delta$  par un ordre de grandeur.

**Paramètres de Stokes.** Les paramètres de Stokes  $S_i^x(\omega)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  fréquentiels d'un signal bivarié  $\mathbf{x}(t)$  peuvent être définis à partir de sa DSP  $\Gamma_{\mathbf{x}}(\omega)$  par

$$\begin{aligned} S_0^x(\omega) &= \Gamma_{x_1x_1}(\omega) + \Gamma_{x_2x_2}(\omega), \\ S_1^x(\omega) &= \Gamma_{x_1x_1}(\omega) - \Gamma_{x_2x_2}(\omega), \\ S_2^x(\omega) &= 2 \operatorname{Re} \Gamma_{x_1x_2}(\omega), \\ S_3^x(\omega) &= 2 \operatorname{Im} \Gamma_{x_1x_2}(\omega). \end{aligned} \quad (11)$$

Les paramètres de Stokes sont à valeurs réelles. Ils permettent l'interprétation des moments d'ordre 2 d'un signal bivarié en termes de ses propriétés de *polarisation*. Le paramètre  $S_0^x$  représente la puissance totale à la fréquence  $\omega$  dans le signal bivarié. Les trois autres paramètres sont en général étudiés après renormalisation par la puissance totale  $S_0^x$ . Les paramètres  $S_1^x$  et  $S_2^x$  quantifient la polarisation linéaire, alors que  $S_3^x$  mesure la polarisation circulaire. On note que la réversibilité temporelle d'un signal bivarié proscriit la polarisation circulaire. En effet,  $S_3^x(\omega) = 0$  pour tout  $\omega$  si  $\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{loi}}{=} \mathbf{x}(-t)$ .

Une quantification de la puissance de la partie polarisée d'un signal est donnée par le degré de polarisation défini comme :

$$P_{\mathbf{x}}(\omega) = \frac{\sqrt{S_1^x(\omega)^2 + S_2^x(\omega)^2 + S_3^x(\omega)^2}}{S_0^x(\omega)}. \quad (12)$$

Un signal tel que  $P_{\mathbf{x}}(\omega) = 1$  est dit totalement polarisé à la fréquence  $\omega$ . Si  $0 < P_{\mathbf{x}}(\omega) < 1$  le signal est dit partiellement polarisé et non polarisé si  $P_{\mathbf{x}}(\omega) = 0$ .

**Bruit blanc polarisé.** Soit  $\mathbf{e}(t)$  un bruit blanc de moyenne nulle  $\mathbb{E}e_1(t) = \mathbb{E}e_2(t) = 0$  avec  $\mathbb{E}$  l'opérateur d'espérance mathématique, et de moments d'ordre 2 donnés par  $\mathbb{E}e_1^2(t) = \sigma_1^2$ ,  $\mathbb{E}e_2^2(t) = \sigma_2^2$ , et  $\mathbb{E}e_1(t)e_2(t) = \rho\sigma_1\sigma_2$  avec  $\rho \in [-1, 1]$  le

coefficient de corrélation. Sa DSP matricielle (9) est indépendante de la fréquence (bruit blanc) :

$$\Gamma_{\mathbf{e}}(\omega) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Le calcul explicite des paramètres de Stokes (11) pour la DSP (13) montre qu'un bruit blanc est en général *partiellement polarisé* car  $S_1^e(\omega) = \sigma_1^2 - \sigma_2^2$  et  $S_2^e(\omega) = 2\rho\sigma_1\sigma_2$ . Cette polarisation n'est pas arbitraire : elle est nécessairement linéaire, car un bruit blanc bivarié ne peut être circulairement polarisé puisqu'il est nécessairement réversible dans le temps et donc  $S_3^e(\omega) = 0$ . Par ailleurs,  $P_e = 1$  implique soit  $\rho = 1$ , soit  $\rho = 0$  et  $\sigma_1 = 0$  ou  $\sigma_2 = 0$ . Il existe donc deux types de bruits blancs totalement polarisés : le premier a une de ses deux composantes nulles, le deuxième a ses deux composantes parfaitement corrélées. Le bruit blanc à symétrie circulaire ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  et  $\rho = 0$ ) est par contre non polarisé. Cela peut paraître surprenant mais illustre le fait que polarisation et circularité sont des concepts de nature différentes [7] : la première est un concept géométrique, alors que la deuxième est un concept statistique.

**Effets du filtre.** A partir de la formule des interférences (10), il est possible de calculer explicitement la DSP de la sortie  $\mathbf{x}(t)$  en fonction de celle du bruit blanc d'entrée et des paramètres du filtre. Les expressions sont particulièrement lourdes. Toutefois, par une vectorisation bien choisie, il est possible de relier paramètres de Stokes d'entrée et de sortie via une relation linéaire dans  $\mathbb{R}^4$  telle que  $\mathbf{S}^x(\omega) = \mathbf{M}(\omega)\mathbf{S}^e$ , où  $\mathbf{S} = [S_0, S_1, S_2, S_3]^T$ . Pour une pulsation donnée, la matrice  $\mathbf{M}(\omega) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  est connue sous le nom de matrice de Mueller-Jones en optique [2]. Dans le cas général, l'expression des coefficients de  $\mathbf{M}(\omega)$  est particulièrement lourde ; on peut

toutefois montrer que les deux termes anti-diagonaux extrêmes sont systématiquement nuls, i.e.,  $m_{30}(\omega) = m_{03}(\omega) = 0$ . Ce résultat montre qu'il est impossible de générer de la polarisation circulaire dans  $\mathbf{x}(t)$  ( $S_3^x(\omega) \neq 0$ ) si l'entrée  $\mathbf{e}(t)$  est non-polarisée. En effet, dans ce cas  $S_1^e = S_2^e = S_3^e = 0$  et donc  $S_3^x(\omega) = 0$  car  $m_{30}(\omega) = 0$ .

En supposant  $\kappa \ll 2\omega_0\Delta$  (cas pratique d'un couplage faible), la matrice des états propres du filtre devient la matrice identité. On peut alors montrer que  $\mathbf{M}(\omega)$  a une structure bloc diagonale telle que  $\mathbf{M}(\omega) = \text{blkdiag}\{\mathbf{A}(\omega), \mathbf{B}(\omega)\}$  avec

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{bmatrix} |\lambda_1(\omega)|^2 + |\lambda_2(\omega)|^2 & |\lambda_1(\omega)|^2 - |\lambda_2(\omega)|^2 \\ |\lambda_1(\omega)|^2 - |\lambda_2(\omega)|^2 & |\lambda_1(\omega)|^2 + |\lambda_2(\omega)|^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\omega) = \begin{bmatrix} 2 \text{Re}(\lambda_1(\omega)\overline{\lambda_2(\omega)}) & 2 \text{Im}(\lambda_1(\omega)\overline{\lambda_2(\omega)}) \\ 2 \text{Im}(\lambda_1(\omega)\overline{\lambda_2(\omega)}) & 2 \text{Re}(\lambda_1(\omega)\overline{\lambda_2(\omega)}) \end{bmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{A}(\omega)$  agit sur les paramètres  $[S_0, S_1]$  d'entrée, tandis que  $\mathbf{B}(\omega)$  agit sur les paramètres  $[S_2, S_3]$ . Le filtre permet donc de polariser circulairement si  $\text{Im}(\lambda_1(\omega)\overline{\lambda_2(\omega)}) \approx \xi\omega\sqrt{4\omega_0^2\Delta^2}$  est non nul (condition remplie pour les cas d'intérêt). De plus, on s'aperçoit que plus l'amortissement  $\xi$  est fort, plus la polarisation circulaire peut l'être. Cette remarque montre la difficulté de polariser circulairement un signal harmonique (raie spectrale très fine, et donc  $\xi \ll 1$ ). Une dernière remarque intéressante concerne la conservation du degré de polarisation s'il est égal à 1. On montre en effet que  $P_e(\omega) = 1$  est équivalent à  $\text{rank } \mathbf{\Gamma}_e(\omega) = 1$ , i.e. la matrice de corrélation du bruit blanc polarisé est de rang 1. Par suite, la DSP de sortie  $\mathbf{\Gamma}_x(\omega)$  est de rang 1 et donc  $P_x(\omega) = 1$  également.

La Fig. 2 illustre ces différentes interprétations, pour un même filtre initial où l'on fait varier l'amortissement  $\xi$  seul. On retrouve bien l'impossibilité de générer un signal polarisé circulairement dans une bande de fréquence lorsque l'entrée est non-polarisée (ligne supérieure). Ce premier cas montre ainsi que le filtrage d'un bruit blanc non-polarisé mène, pour ce filtre, à des signaux nécessairement polarisés linéairement. A l'inverse, on observe l'apparition de polarisation circulaire lorsque l'entrée est totalement polarisée (ligne inférieur), dont l'amplitude croît avec  $\xi$ .

## 5 Vers l'équation de Schrödinger

Les équations (3) de la définition des oscillateurs couplés restent valides pour les signaux analytiques associés  $x_i + j\mathcal{H}(x_i)$ ,  $\mathcal{H}$  désignant la transformée de Hilbert. Par abus de notation on garde  $x_i$  pour désigner le signal analytique. Si on s'intéresse aux phénomènes physiques existant autour de la fréquence  $\omega_0$ , on peut chercher les solutions en démodulant, c'est-à-dire sous la forme  $x_i(t) = \tilde{x}_i(t) \exp(j\omega_0 t)$ , représentation du signal analytique licite si le théorème de Bedrosian s'applique : la transformée de Fourier de  $\tilde{x}_i$  doit être nulle au-delà d'une fréquence plus faible que  $\omega_0$ . Les équations (3) deviennent

$$\frac{d^2\tilde{\mathbf{x}}}{dt^2} + (\xi + 2j\omega_0)\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} + \mathbf{H}(\omega_0)^{-1}\tilde{\mathbf{x}} = 0$$

où  $\tilde{\mathbf{x}}$  est le vecteur contenant les amplitudes  $\tilde{x}_i$ . On utilise alors l'approximation de l'enveloppe lentement variable qui stipule que le signal en bande de base  $\tilde{\mathbf{x}}$  est très basse fréquence, et l'approximation de faible amortissement pour obtenir

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{j}{2\omega_0}\mathbf{H}(\omega_0)^{-1}\tilde{\mathbf{x}} = \frac{j}{2}\begin{bmatrix} \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_0} & \frac{\kappa}{\omega_0} \\ \frac{\kappa}{\omega_0} & \frac{\omega_2^2 - \omega_0^2}{\omega_0} \end{bmatrix}\tilde{\mathbf{x}} - \frac{\xi}{2}\tilde{\mathbf{x}} \quad (14)$$

qui est pour  $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}} \exp(\xi t/2)$  l'équation de Schrödinger  $j\dot{\mathbf{y}} = \mathfrak{H}\mathbf{y}$  d'un système à deux états d'Hamiltonien  $\mathfrak{H}$  implicitement défini. Si de plus on a  $\Delta \ll \omega_0$ , alors  $(\omega_i^2 - \omega_0^2)\omega_0^{-1} \approx \pm\Delta$ , de sorte que l'équation précédente devient

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{2} + j\Delta & j\frac{\kappa}{2\omega_0} \\ j\frac{\kappa}{2\omega_0} & -\frac{\xi}{2} - j\Delta \end{bmatrix}\tilde{\mathbf{x}} \quad (15)$$

qui n'est rien d'autre que le problème (en bande de base et avec amortissement) à deux états traité dans le papier compagnon [1]. Pour un état initial  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$ , la solution de (15) est  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \alpha_1 \exp(\eta_1 t)\mathbf{v}_1 + \alpha_2 \exp(\eta_2 t)\mathbf{v}_2$ , avec  $\eta_i = j\lambda_i^{-1}(\omega_0)/(2\omega_0) \approx -\xi/2 + j\Omega$ , où  $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \kappa^2/(4\omega_0^2)}$  est la fréquence de Rabi (voir le papier compagnon). L'interprétation quantique de cette solution est probabiliste :  $|\alpha_1 \exp(\eta_1 t)|^2$  est la probabilité de trouver le système dans l'état 1 à la date  $t$ .

**Vers des excitations paramétriques.** Notre intérêt pour l'étude des systèmes à deux états est d'obtenir des modèles de signaux bivariés pour les mesures d'ondes gravitationnelles (voir l'exemple dans le papier couplé). Pour ces signaux toutefois, les fréquences en jeu évoluent au cours du temps. Par suite, nous voulons considérer les modèles décrits ici, mais en envisageant des excitations paramétriques, par exemple en considérant le terme  $\Delta$  variant dans le temps. Ce type d'excitation ouvre de nouvelles difficultés, et fait apparaître de nouveaux effets, typiquement non linéaires, connus sous le nom d'interférométrie de Landau-Zener-Stückelberg-Majorana en physique quantique [8].

## Références

- [1] N. LE BIHAN, J. FLAMANT et P.-O. AMBLARD, "Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique", *Soumis au GRETSI'23*.
- [2] J. J. GIL, "Polarimetric characterization of light and media : Physical quantities involved in polarimetric phenomena", *The European Physical Journal Applied Physics*, vol. 40, n° 1, p. 1-47, oct. 2007.
- [3] A. M. SYKULSKI, S. C. OLHEDE, J. M. LILLY et al., "Frequency-domain stochastic modeling of stationary bivariate or complex-valued signals", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, n° 12, p. 3136-3151, 2017.
- [4] D. J. INMAN, *Engineering vibration*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [5] M. FRIMMER et L. NOVOTNY, "The classical Bloch equations", *American Journal of Physics*, vol. 82, n° 10, p. 947-954, 2014.
- [6] C. BROSSEAU, *Fundamentals of polarized light : a statistical optics approach*. Wiley, 1998.
- [7] J. FLAMANT, N. LE BIHAN et P. CHAINAIS, "Spectral analysis of stationary random bivariate signals", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, n° 23, p. 6135-6145, déc. 2017.
- [8] O. V. IVAKHNENKO, S. N. SHEVCHENKO et F. NORI, "Simulating quantum dynamical phenomena using classical oscillators : Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, latching modulation, and motional averaging", *Scientific reports*, vol. 8, n° 1, p. 12 218, 2018.