

# Détecteur de Rao robuste pour un sonar à croix de Mills

Olivier LERDA<sup>1,2</sup> Ammar MIAN<sup>2</sup> Guillaume GINOLHAC<sup>2</sup> Jean-Philippe OVARLEZ<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup>Exail Sonar Systems division, La Ciotat, France

<sup>2</sup>LISTIC, Université Savoie Mont-Blanc, Annecy, France

<sup>3</sup>ONERA - DEMR, Université Paris-Saclay, Palaiseau, France

<sup>4</sup>CentraleSupélec - SONDRRA, Université Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, France

**Résumé** – Nous considérons un système sonar multifaisceaux pouvant opérer deux antennes en réception. Pour ce système, nous dérivons un nouveau test de détection adaptatif en supposant un fouillis hétérogène et des antennes corrélées. Nous nous basons sur une approche de Rao en deux étapes, en supposant d’abord que la matrice de covariance est connue à des facteurs près, puis en substituant la vraie matrice de covariance par son maximum de vraisemblance. Les performances sont discutées et illustrées par des exemples théoriques, simulations et aperçus sur données réelles. Les résultats montrent que ce détecteur est plus performant que ses concurrents et robuste à des inconnues environnementales.

**Abstract** – We consider a multibeam sonar system that can operate with two receive arrays. For this system, we derive a new adaptive detection test by assuming heterogeneous clutter and correlated antennas. We rely on a 2-step Rao approach, first assuming that the covariance matrix is known up to scale factors, and then substituting the true covariance matrix by its maximum likelihood. The performance is discussed and illustrated by theoretical examples, simulations, and insights into real data. The results show that this detector outperforms its competitors and is robust to environmental unknowns.

## 1 Introduction

Les sonars frontaux, dits *Forward Looking Sonar* (FLS), sont des solutions de perception de l’environnement sous-marin. Dans un contexte de besoin croissant en autonomie décisionnelle et sécurité de navigation, ils sont devenus des outils d’analyses fondamentaux pour la compréhension de l’environnement marin, l’anticipation des obstacles et dangers, l’identification de menaces. Ils apportent, en outre, des réponses efficaces en détection, suivi et classification de cibles surface, colonne d’eau ou fond, dans des applications civiles ou militaires [3], [8].

En détection sonar, les tests monovariés sous hypothèse d’interférence gaussienne restent des approches prévalentes. Des travaux ont pourtant permis d’illustrer les intérêts des statistiques multivariées, comme le papier fondateur de E. J. Kelly [4] qui a dérivé un rapport de vraisemblance généralisé lorsque les paramètres de cible et du fouillis sont inconnus. Une approche en deux étapes, en supposant dans un premier temps la matrice de covariance connue, permet sous certaines conditions, d’obtenir des performances quasi similaires [9]. Cette dernière méthodologie offre aussi une dérivation beaucoup plus simple. Dans le cas de signaux désadaptés, les détecteurs basés sur des modèles de données à sous-espaces ont aussi montré leur grande performance et robustesse [10] et [5]. Ces travaux, largement employés dans les traitements radar, restent encore sous-utilisés par les systèmes sonar.

L’hypothèse de normalité est parfois une mauvaise approximation de la physique pour modéliser des fouillis haute résolution, des bruits impulsifs, valeurs aberrantes ou interférences. Les distributions complexes elliptiques symétriques (CES) [7], et la sous-classe des processus gaussiens composés, sont alors des extensions naturelles permettant la modélisation des distributions à queues lourdes en radar, comme en sonar (dont

les fouillis de mer et de fond). Le mélange de distributions gaussiennes pondérées, *Mixture of Scaled Gaussian* (MSG) [2], est un modèle de données dérivé facile à manipuler offrant un bon agrément avec les données réelles. Dans ce contexte, des estimateurs de matrice de covariance particuliers comme l’estimateur de *Tyler* ou le M-estimateur de *Huber* apportent des gains substantiels aux applications.

Cet article porte sur le développement d’un test de détection adaptatif d’une cible ponctuelle par un système sonar à antennes orthogonales corrélées. Inspirés par les travaux précités, nous proposons un nouveau détecteur en suivant une approche en deux étapes du test de Rao [11]. La matrice de covariance sera donc dans un premier temps supposée connue (à deux paramètres d’échelle près). Un test de détection sera alors développé. Dans un second temps, la matrice de covariance sera remplacée par une estimée adéquate sur la base de données secondaires non-gaussiennes MSG. Ce modèle de données nous conduit à un nouvel estimateur de matrice de covariance, proche d’un estimateur de *Tyler* par blocs. Nous étudions finalement les performances de ce nouveau test de détection adaptatif sur des données simulées et expérimentales.

## 2 Système SEAPIX

Le système SEAPIX est un sondeur multifaisceaux tridimensionnel développé par la division Systèmes Sonars d’Exail. Il est traditionnellement utilisé par les professionnels de la pêche comme outil d’aide à la sélection des captures et au respect des quotas, par les hydro-acousticiens pour le suivi des stocks et l’étude morphologique des bancs de poissons, par les hydrographes pour l’établissement de cartes marines bathymétriques et sédimentaires.

Nous expérimentons une configuration FLS pour la détec-

tion et l'identification prédictives de cibles. Dans ce contexte d'utilisation, le SEAPIX est installé sur un navire de surface, la face active orientée vers « l'avant » plutôt qu'en direction des fonds marins. Deux antennes linéaires uniformes de 64 éléments, disposées en croix de Mills [6], sont symétriques, réversibles en émission/réception et orientables électronique-ment. En émission, l'antenne verticale génère un faisceau dépointé et stabilisé de  $9^\circ$  en élévation (dont la limite supérieure à  $-3$  dB effleure la surface de la mer) par  $120^\circ$  en azimut. En réception, l'antenne horizontale génère des faisceaux de  $2^\circ$  en azimut par  $120^\circ$  en élévation et l'antenne verticale (qui est utilisée de nouveau) de  $2^\circ$  en élévation par  $120^\circ$  en azimut. Une sphère rigide de 71 cm de diamètre est immergée par 25 m de profondeur en milieu de colonne d'eau. Après chaque transmission, les signaux capteurs des deux antennes sont enregistrés simultanément, permettant une représentation en azimut et élévation de l'environnement acoustique (Figure 1).

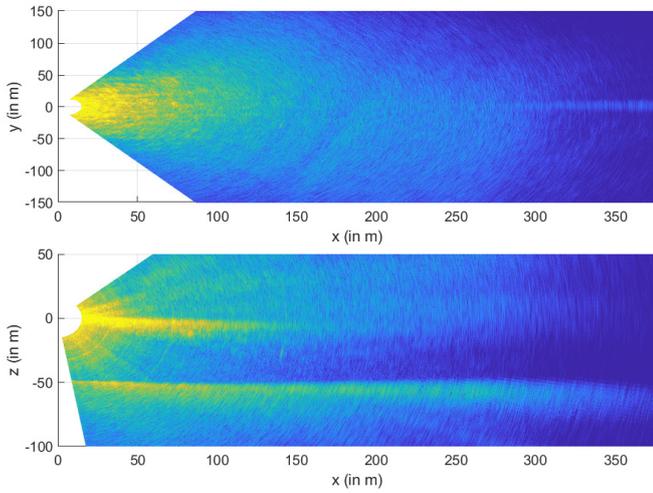


FIGURE 1 : Vue en azimut (haut) et élévation (bas) d'un ping par 50 m de profondeur en baie de La Ciotat.

### 3 Problème de détection

A chaque instant, nous disposons de deux vecteurs de données complexes synchronisés de  $m = 64$  éléments qui peuvent s'écrire :

$$\mathbf{x}_i = [x_{i,1} \ x_{i,2} \ \dots \ x_{i,m}]^T, \quad (1)$$

où  $i = 1, 2$  est l'identifiant antenne. Une cible ponctuelle observée sur l'antenne  $i$  est modélisée comme :

$$\mathbf{x}_i = \alpha_i \mathbf{p}_i + \mathbf{z}_i, \quad (2)$$

$\mathbf{x}_i \in \mathbb{C}^m$  est le signal reçu,  $\alpha_i$  est l'amplitude complexe inconnue de la cible,  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{C}^m$  est un *steering vector* angulaire connu,  $\mathbf{z}_i \in \mathbb{C}^m$  est un vecteur aléatoire MSG admettant la représentation stochastique :

$$\mathbf{z}_i \stackrel{d}{=} \sqrt{\tau_i} \mathbf{c}_i. \quad (3)$$

La *texture*  $\tau_i$  est un scalaire positif déterministe inconnu supposé différent à chaque case distance et pilotant la puissance reçue. Le *speckle*  $\mathbf{c}_i \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma_i^2 \mathbf{M}_{ii}) \in \mathbb{C}^m$  est un vecteur

aléatoire complexe circulaire gaussien de matrice de covariance  $\mathbf{M}_{ii}$  connue, ou estimable, à un facteur près  $\sigma_i^2$ .

En considérant les deux antennes en réception, le problème de détection s'écrit :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{x} = \mathbf{z} & ; \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{z}_k \quad k = 1 \dots K \\ H_1 : \mathbf{x} = \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{z} & ; \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{z}_k \quad k = 1 \dots K \end{cases}, \quad (4)$$

où  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \ \mathbf{x}_2^T]^T \in \mathbb{C}^{2m}$  est la concaténation des deux signaux reçus,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2] \in \mathbb{C}^2$  est le vecteur des amplitudes cible et  $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^T \ \mathbf{z}_2^T]^T \in \mathbb{C}^{2m}$  est le fouillis additif. La matrice  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2}$  contient les steering vectors,  $\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_{1,k}^T \ \mathbf{x}_{2,k}^T]^T \in \mathbb{C}^{2m}$  pour  $k \in [1, K]$ ,  $K \geq 2m$  sont des données secondaires i.i.d. sans cible avec  $\mathbf{x}_{i,k} \stackrel{d}{=} \sqrt{\tau_{i,k}} \mathbf{c}_{i,k}$ . Cette formulation permet de considérer la corrélation entre capteurs des différentes antennes. La matrice de covariance est  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}$  avec  $\mathbf{M}_{ii}$  la covariance de l'antenne  $i$  et  $\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{M}_{ji}^H$  les termes croisés de cross-corrélation. Nous supposons ici que cette covariance est connue à deux scalaires près :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}, \quad (5)$$

avec  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_2 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_m$  et  $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i \sqrt{\tau_i}$ , la matrice diagonale inconnue des scalaires  $\sigma_i$  (paramètre d'homogénéité qui traduit la différence de facteur d'échelle entre les matrices de covariances des données primaires et secondaires) et  $\tau_i$  (paramètre de non-gaussianité des données, ou de variation de la puissance des observations au cours du temps).

## 4 Construction du détecteur

Nous considérons dans un premier temps la matrice  $\mathbf{M}$  connue. Un test de Rao est obtenu en exploitant l'efficacité asymptotique de l'estimation par maximum de vraisemblance (MV). La matrice de covariance est ensuite remplacée par son estimée au sens du MV.

**Proposition 4.1.** *Le détecteur de Rao pour le test d'hypothèse binaire défini en (4) est donné par :*

$$M\text{-NMF-R}(\mathbf{x}) = 2 \mathbf{x}^H \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \mathbf{P} \left( \mathbf{P}^H \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \mathbf{P} \right)^{-1} \mathbf{P}^H \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \mathbf{x}, \quad (6)$$

où  $\hat{\mathbf{C}}_0 = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0 \mathbf{M} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0$  et  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0 = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{10} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\sigma}_{20} \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$ . En notant

$$s_1 = \frac{\mathbf{x}_1^H \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{x}_1}{m}, \quad s_{12} = \frac{\text{Re}(\mathbf{x}_1^H \mathbf{M}_{12}^{-1} \mathbf{x}_2)}{m}, \quad s_2 = \frac{\mathbf{x}_2^H \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{x}_2}{m}$$

$$\text{on a } \hat{\sigma}_{10}^2 = s_1 + \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} s_{12} \text{ et } \hat{\sigma}_{20}^2 = s_2 + \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} s_{12}.$$

On peut montrer que le test de détection (6) est texture-indépendant. La propriété de taux de fausse alarme constant par rapport à la matrice de covariance (TFAC-matrice) semble plus compliquée à vérifier et sera étudiée en simulation uniquement.

En pratique, la matrice de covariance  $\mathbf{M}$  est inconnue et estimée depuis les  $K$  données secondaires disponibles. En environnement Gaussien, l'estimateur du MV est la matrice de covariance empirique (SCM) donnée par :

$$\widehat{\mathbf{M}}_{SCM} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H. \quad (7)$$

Mais pour des modèles de données non-gaussiennes, en présence de valeurs aberrantes ou d'une distribution à queue lourde, cet estimateur n'est plus optimal ni robuste. La SCM dégrade alors les performances des traitements adaptatifs.

**Proposition 4.2.** *En environnement MSG, le MV de M est donné par :*

$$\widehat{\mathbf{M}}_{2TYL} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \widehat{\mathbf{T}}_k^{-1} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H \widehat{\mathbf{T}}_k^{-1}, \quad (8)$$

avec  $\widehat{\mathbf{T}}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\tau}_{1,k}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\hat{\tau}_{2,k}} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_m$ ,  $\hat{\tau}_{1,k} = t_1 + \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} t_{12}$ ,  
 $\hat{\tau}_{2,k} = t_2 + \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} t_{12}$  et  $t_1 = \frac{\mathbf{x}_{1,k}^H \widehat{\mathbf{M}}_{11}^{-1} \mathbf{x}_{1,k}}{m}$ ,  $t_2 = \frac{\mathbf{x}_{2,k}^H \widehat{\mathbf{M}}_{22}^{-1} \mathbf{x}_{2,k}}{m}$ ,  $t_{12} = \frac{\text{Re}(\mathbf{x}_{1,k}^H \widehat{\mathbf{M}}_{12}^{-1} \mathbf{x}_{2,k})}{m}$ .

C'est une généralisation bi-antennes de l'estimateur de Tyler (2TYL). Cet estimateur est indépendant des variations de puissance (c.a.d. des textures) observées sur chacune des antennes. D'un point de vue pratique  $\widehat{\mathbf{M}}_{2TYL}$  est la solution de l'algorithme récursif :

$$\widehat{\mathbf{T}}_k^{(n)} = \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\tau}_{1,k}^{(n)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\hat{\tau}_{2,k}^{(n)}} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_m, \quad (9)$$

$$\widehat{\mathbf{M}}_{2TYL}^{(n)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left( \widehat{\mathbf{T}}_k^{(n-1)} \right)^{-1} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H \left( \widehat{\mathbf{T}}_k^{(n-1)} \right)^{-1}, \quad (10)$$

avec  $n \in \mathbb{N}$  le numéro d'itération.

Finalement, la version adaptative de (6) est obtenue en remplaçant la matrice de covariance  $\mathbf{M}$  par l'estimateur approprié (7) ou (8) selon l'environnement. Ces détecteurs seront dénommés dans la suite  $M\text{-ANMF-}R_{SCM}$  et  $M\text{-ANMF-}R_{2TYL}$ .

## 5 Résultats

### 5.1 Données simulées

Deux coefficients de corrélation  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ( $0 < \rho_1, \rho_2 < 1$ ) sont utilisés pour construire un modèle de matrice de covariance de speckle (Figure 2) défini comme suit :

$$[\mathbf{M}]_{jl} = \beta \rho_1^{|j_1-l_1|} \rho_2^{|j_2-l_2|}, \quad (11)$$

où  $j, l \in [1, 2m]$  sont des numéros de capteurs de coordonnées  $(j_1, j_2)$  et  $(l_1, l_2)$  dans le plan des antennes et  $\beta$  est un facteur multiplicatif.

On choisit  $\sigma_i = 1$ ,  $\tau_i, \tau_{i,k} \sim \text{Gam}(\nu, 1/\nu)$  avec  $\nu = 0.5$  pour des données impulsives non-gaussiennes  $K$ -distribuées. Tous les estimateurs de covariance (mono et bi-antennes) sont construits sur la base de  $2 \times 2m = 256$  données secondaires. La Figure 3 représente la probabilité de fausse alarme en fonction du seuil de détection pour différentes configurations de covariance (11). En trait plein  $\beta = 3 \times 10^{-4}$ ,  $\rho_1 = 0.4$ ,

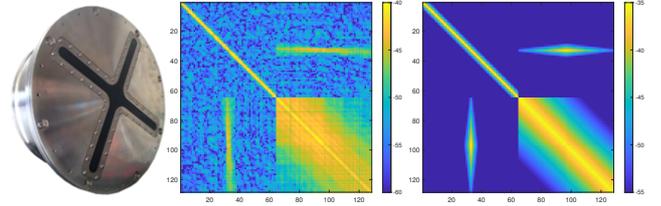


FIGURE 2 : (gauche) Antennes sonar : deux ULA (Uniformly Linear Array) se croisent en leur centre. (milieu) Estimateur SCM sur données réelles dans une zone de bruit homogène. (droite) Modèle de matrice de covariance :  $\beta = 3 \times 10^{-4}$ ,  $\rho_1 = 0.4$ ,  $\rho_2 = 0.9$ .

$\rho_2 = 0.9$ . Les symboles en croix sont pour  $\beta = 1$ ,  $\rho_1 = 0.95$ ,  $\rho_2 = 0.95$ . Les marqueurs circulaires pour  $\beta = 100$ ,  $\rho_1 = 0.1$ ,  $\rho_2 = 0.1$  avec des blocs anti-diagonaux nuls. La superposition des courbes illustre un comportement TFAC-matrice du détecteur (la loi du test est indépendante de la matrice de covariance).

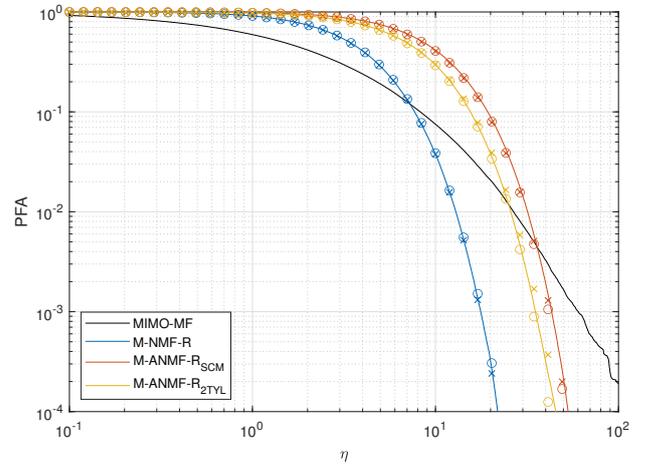


FIGURE 3 : Courbes Pfa-seuil pour différentes matrices de covariance. Détecteur de Rao pour M connue (bleu), M estimée avec la SCM (rouge), M estimée avec 2TYL (jaune), *Optimum Gaussian Detector* ou *Matched Filter* (noir).

La probabilité de détection (PD) est représentée en fonction du rapport signal/bruit (SNR) en Figure 4. Les performances sont comparées aux tests mono-antennes [10] ANMF 1<sub>TYL</sub> et ANMF 2<sub>TYL</sub> dont les matrices de covariance sont estimées par approche de Tyler (TYL) et au test bi-antennes [1] MIMO-AMF<sub>SCM</sub>.

L'utilisation de l'estimateur 2TYL (8) dans un environnement impulsif non-gaussien induit un gain en performance de détection de l'ordre de 1.2 dB à  $PD = 0.8$  comparativement à la SCM. Par rapport au meilleur des concurrents, l'amélioration est de 3 dB à  $PD = 0.8$ . Bien qu'optimal en fouillis gaussien homogène, le détecteur MIMO-AMF n'est plus approprié.

### 5.2 Données expérimentales

Précédemment, nous avons supposé la disponibilité d'un ensemble de  $K \geq 2m$  données secondaires i.i.d., exemptes de composantes de signal et partageant les propriétés statistiques du bruit de la cellule sous test. En pratique, ces hypothèses ne

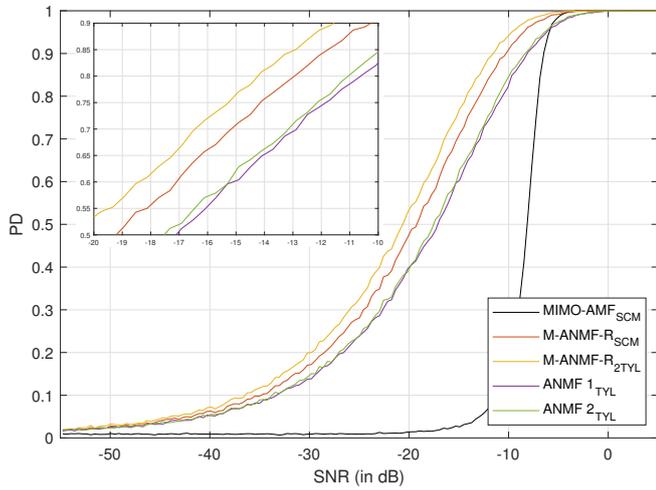


FIGURE 4 : Probabilité de détection ( $PFA = 10^{-2}$ ,  $\beta = 3 \times 10^{-4}$ ,  $\rho_1 = 0.4$ ,  $\rho_2 = 0.9$ ). Détecteur de Rao pour  $M$  estimée avec la SCM (rouge),  $M$  estimée avec 2TYL (jaune), MIMO-AMF<sub>SCM</sub> (noir), ANMF mono-antennes (vert et violet).

sont pas toujours vérifiées et tombent en défaut si, par exemple, une autre cible est présente dans ces données secondaires.

La Figure 5 illustre la robustesse des estimateurs de la matrice de covariance face à une telle corruption des données. Dans le dataset d'intérêt présenté en Figure 1, une vraie cible est observée dans la case distance 2040 (à 143 m du sonar), à  $\theta_1 = 26$  ( $-12.4^\circ$  en azimut) et  $\theta_2 = 37$  ( $8.6^\circ$  en élévation). Une cible synthétique est ajoutée à 100 cases distances de la vraie cible et contamine, de fait, le jeu de données secondaires.

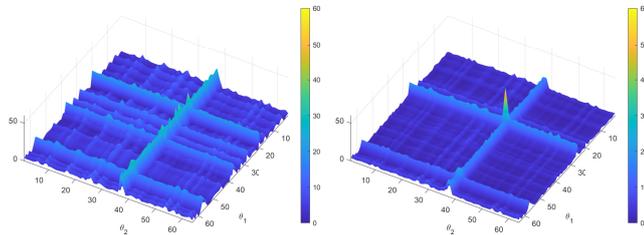


FIGURE 5 : Sorties du détecteur de Rao avec la SCM (gauche) et 2TYL (droite) à la case distance 2040 lorsque les données secondaires sont corrompues. La cible réelle est en (37, 26).

La sortie de M-ANMF-R<sub>SCM</sub> (Figure 5 à gauche) est fortement dégradée. La cible est difficilement discernable et non positionnée sur le maximum d'amplitude de la représentation. Dans des conditions identiques, cette même cible est aisément identifiable dans la réponse de M-ANMF-R<sub>2TYL</sub> (Figure 5 à droite). L'estimateur 2TYL (8) est plus résistant à la contamination des données.

## 6 Conclusions

Dans cet article, nous avons considéré la problématique de la détection adaptative de cibles ponctuelles par un système sonar bi-antennes corrélées en croix de Mills. À l'aide d'une approche en deux étapes, nous avons d'abord dérivé un nouveau détecteur robuste à des différences d'amplitudes de cible, ainsi qu'à des inconnues de facteurs d'échelle sur les covariances des antennes. Par la suite, nous avons introduit un

estimateur de matrice de covariance particulièrement adapté aux environnements MSG non-gaussien dans le cadre double antennes. Les résultats expérimentaux montrent que les performances en détection sont jusqu'à 3 dB supérieures aux approches conventionnelles. Ce détecteur est également robuste aux bruits impulsifs et à la contamination des données.

Des travaux futurs se concentrent sur l'établissement d'une démonstration théorique de la propriété TFAC-matrice du détecteur et sur la généralisation de solutions pour un nombre et des géométries différentes de réseaux d'antennes.

## Références

- [1] C. Y. CHONG, F. PASCAL, J.-P. OVARLEZ et M. LESTURGIE : Robust MIMO radar detection for correlated subarrays. *In IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 2786 – 2789, 04 2010.
- [2] A. HIPPERT-FERRER, M. N. EL KORSO, A. BRELOY et G. GINOLHAC : Robust low-rank covariance matrix estimation with a general pattern of missing values. *Signal Processing*, 195:108460, 2022.
- [3] I. KAROUÏ, I. QUIDU et M. LEGRIS : Automatic sea-surface obstacle detection and tracking in forward-looking sonar image sequences. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 53(8):4661–4669, 2015.
- [4] E. J. KELLY : An adaptive detection algorithm. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-22(2):115–127, 1986.
- [5] S. KRAUT, L. L. SCHARF et L. T. MCWHORTER : Adaptive subspace detectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(1):1–16, 2001.
- [6] B. Y. MILLS et A. G. LITTLE : A high-resolution aerial system of a new type. *Australian Journal of Physics*, 6(3):272–278, 1953.
- [7] E. OLLILA, D. E. TYLER, V. KOIVUNEN et H. V. POOR : Complex Elliptically Symmetric distributions : Survey, new results and applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(11):5597–5625, 2012.
- [8] I. QUIDU, L. JAULIN, A. BERTHOLOM et Y. DUPAS : Robust multitarget tracking in forward-looking sonar image sequences using navigational data. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 37(3):417–430, 2012.
- [9] F. C. ROBNEY, D. R. FUHRMANN, E. J. KELLY et R. NITZBERG : A CFAR Adaptive Matched Filter detector. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 28(1):208–216, 1992.
- [10] L. L. SCHARF et B. FRIEDLANDER : Matched subspace detectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(8):2146–2157, 1994.
- [11] J. XUE, M. MA, J. LIU, M. PAN, S. XU et J. FANG : Wald- and Rao-based detection for maritime radar targets in sea clutter with lognormal texture. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 60:1–9, 2022.