

# Éxploration théorique des motifs d'ordre pour une meilleure compréhension de leur utilité dans les méthodes ordinales de traitement du signal

Meryem JABLOUN

Laboratoire PRISME - équipe signal  
12 rue de Blois, 45000 Orléans, France  
meryem.jabloun@univ-orleans.fr

**Résumé** – Au cours des deux dernières décennies, un nombre croissant de méthodes et d'approches, dites "ordinales", se sont développées dans divers domaines et selon différentes orientations. Leur principe repose en premier lieu sur l'identification de motifs d'ordre, mais ce concept n'est pas entièrement caractérisé sur le plan théorique. L'objectif de cet article est de mettre en lumière l'aspect fréquentiel dissimulé derrière la sélection de ces motifs. Cet aspect devrait être pris en compte pour une meilleure interprétation des résultats obtenus par les méthodes ordinales.

**Abstract** – Over the past two decades, there has been an increasing number of ordinal methodologies and statistical approaches developed in different fields and directions. Their fundamental principle is primarily based on the identification of order patterns, but this concept is not fully and theoretically characterized. The objective of this paper is to shed light on the spectral behaviour concealed behind the selection of  $d$ -dimensional order patterns, which is common to all of these methodologies. This spectral aspect, closely related to pattern selection, must be taken into account for a better interpretation of the results obtained by these methodologies.

## 1 Introduction

Les approches de traitement du signal dites "ordinales" ont suscité une grande attention ces dernières décennies [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Leur concept repose sur l'identification de motifs d'ordre (OPs : order patterns) de longueur  $d$ . Ces OPs sont des symboles qui représentent les permutations servant à trier dans l'ordre croissant chaque ensemble de  $d$  valeurs consécutives d'une série temporelle.

Parmi ces méthodes, on peut citer la célèbre méthode de décomposition modale empirique (EMD) [12], la mesure de complexité basée sur l'entropie de permutation (PE) [1], ainsi que la méthode d'analyse PRSA (Phase Rectified Signal Averaging) [2].

L'EMD [12] est une méthode pilotée par les données qui réalise une séparation itérative de bandes spectrales des signaux. Cette méthode est par conception une méthode ordinale, comme expliqué dans [13]. En effet, son fonctionnement dépend de la localisation de quatre OPs de longueur  $d = 3$ , à savoir les OPs 021 et 120 représentant les maxima locaux, et les OPs 201 et 102 représentant les minima locaux [13]. Une extension de l'EMD à des OPs de longueur  $d = 2, 4, 5, \dots$  a été proposée dans [13]. Dans cette extension, la distribution de probabilité des OPs est incorporée dans le calcul itératif des enveloppes moyennes, ainsi que dans le critère d'arrêt du processus de tamisage.

Cette extension s'avère capable d'atténuer le mélange de modes et ainsi d'améliorer la robustesse de l'EMD.

Par ailleurs, l'application de l'entropie de Shannon à la distribution de probabilité des OPs a conduit à la définition de l'entropie de permutation (PE) [1]. Cette entropie est une mesure de complexité qui révèle des informations sur l'irrégularité de la dynamique des séries temporelles. Elle a été largement utilisée pour l'analyse des signaux dans les domaines de la physique, de la biologie, de la finance et de la médecine [7, 11, 14]. D'autres outils d'analyse ordinale, inspirés de la PE et/ou de la distribution de probabilité des OPs, ont été introduits dans [5, 15, 16]. On cite, notamment, la complexité de Lempel-Ziv de permutation qui mesure le taux de compressibilité de la séquence des OPs de la série temporelle [5, 15].

La méthode PRSA est, également, une approche ordinale reposant sur le repérage de points d'ancrage [2, 17], qui correspondent à la localisation temporelle des OPs. Dans sa version simplifiée, la PRSA utilise des OPs de longueur  $d = 2$ , à savoir 01 et 10. Des segments centrés sur ces motifs sont extraits et synchronisés, puis moyennés pour produire le signal PRSA. L'analyse spectrale de ce dernier peut révéler la présence de composantes quasi-périodiques auparavant masquées par les artefacts et le bruit impulsif.

Malgré l'intérêt suscité par les méthodes ordinales, peu

d'études théoriques ont été menées pour explorer l'aspect fréquentiel des OPs et l'impact de leur dimension  $d$  sur ce dernier. La contribution, présentée dans ce papier, est consacrée à cet aspect et met en évidence l'existence d'un filtrage implicite dissimulé derrière la sélection des OPs et de leur dimension  $d$ .

Dans la suite, le papier est structuré de la manière suivante. Dans un premier temps, la section 2 rappelle la définition des motifs ordinaux OPs et fournit quelques exemples. Ensuite, la section 3 examine certaines propriétés statistiques des OPs dans le contexte d'un processus gaussien, en préparation de la section suivante. La section 4 est consacrée à l'étude de l'aspect fréquentiel des OPs afin de dévoiler l'existence du filtrage induit par leur utilisation. Enfin, la section 5 conclut ce travail.

## 2 Définition des motifs d'ordre

On considère  $N$  échantillons d'un signal  $\{x_t\}_{t=0,1,\dots,N-1}$  faiblement stationnaire et uniformément échantillonné.

Une séquence de code, appelée séquence de motifs d'ordre OPs, peut être construite en triant dans le sens croissant chaque ensemble formé de  $d$  échantillons consécutifs :  $x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+d-1}$ . Le nombre de OPs distincts est, donc, égal à  $d!$ . Par exemple, les quatre échantillons suivants  $x_t = 0.2, x_{t+1} = -0.7, x_{t+2} = 0.0$  et  $x_{t+3} = 0.1$ , seront codés par une séquence de OPs, comme suit :

- un seul OP 3012 de longueur  $d = 4$ ,
- 2 OPs successifs 201 et 012 de longueur  $d = 3$  , et
- 3 OPs successifs 10, 01 et 01 de longueur  $d = 2$ .

Dans la suite, on désignera localement les  $d$  échantillons consécutifs par  $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{d-1}$ . La permutation qui permet de les trier dans l'ordre croissant, sous la forme  $R_{r_0} < R_{r_1} < \dots < R_{r_k} < \dots < R_{r_{d-1}}$ , sera notée  $\Sigma(k) = r_k$ , pour  $k \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ . Par exemple, la permutation qui permet d'ordonner  $R_0=0.2, R_1=-0.7, R_2=0.0$  et  $R_3=0.1$  avec  $d=4$  est donnée par  $\Sigma(0)=r_0=3, \Sigma(1)=r_1=0, \Sigma(2)=r_2=1$  et  $\Sigma(3)=r_3=2$ .

## 3 Propriétés des motifs d'ordre d'un processus gaussien

L'objectif de cette section est d'établir quelques propriétés statistiques des OPs pour les longueurs  $d = 2, d = 3$  et  $d > 3$ , en vue de les utiliser dans l'analyse spectrale qui suivra. On travaille sous l'hypothèse que les  $N$  échantillons du signal  $x_t$  sont indépendants et identiquement distribués (iid) selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ .

### 3.1 Propriétés des OPs de longueur $d = 2$

On considère, dans un premier temps, le OP  $\Pi_1 = 01$  dont la permutation qui lui est associée est l'identité. La densité de probabilité (ddp) de  $R_{r_0} = R_0$  s'obtient par :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f_{R_0}(u) = 2! p(u) (1 - \Phi(u)), \quad (1)$$

où  $p(u)$  est la ddp d'une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  et  $\Phi(u)$  est sa fonction de répartition :

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \text{ et } \Phi(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \quad (2)$$

En utilisant les propriétés  $p(u) = \Phi'(u)$  et  $p'(u) = -\frac{u}{\sigma^2}p(u)$ , on peut remonter par intégration à l'espérance de  $R_0$  :

$$E_{\Pi_1}[R_0] = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_{R_0}(u) du = -\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}. \quad (3)$$

Un calcul similaire conduit à la ddp et l'espérance de  $R_{r_1} = R_1$  :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f_{R_1}(u) = 2! p(u) \Phi(u), \quad (4)$$

$$\text{et } E_{\Pi_1}[R_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_{R_1}(u) du = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}. \quad (5)$$

On en déduit, ensuite, les ddp et les espérances de  $R_{r_0} = R_1$  et  $R_{r_1} = R_0$  pour le second OP  $\Pi_2 = 10$ , en utilisant la permutation qui lui est associée, c'est-à-dire  $\Sigma(0) = 1$  et  $\Sigma(1) = 0$  :

$$E_{\Pi_2}[R_k] = E_{\Pi_1}[R_{\Sigma(k)}], \text{ pour } k = 0, 1. \quad (6)$$

Ceci conduit à  $E_{\Pi_2}[R_0] = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$  et  $E_{\Pi_2}[R_1] = -\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$ .

### 3.2 Propriétés des OPs de longueur $d = 3$

Pour le OP  $\Pi_1 = 012$  associé à la permutation identité, on peut exprimer les ddp respectives de  $R_0, R_1$  et  $R_2$  comme suit :

$$f_{R_0}(u) = \frac{3!}{2} p(u) (1 - \Phi(u))^2, \quad (7)$$

$$f_{R_1}(u) = 3! p(u) \Phi(u) (1 - \Phi(u)) \quad (\text{fonction paire}), \quad (8)$$

$$f_{R_2}(u) = \frac{3!}{2} p(u) \Phi^2(u) = f_{R_0}(-u) \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

On peut, donc, remonter par intégration à l'espérance de chacun de ces trois points :

$$E_{\Pi_1}[R_0] = -E_{\Pi_1}[R_2] = -\frac{3\sigma}{2\sqrt{\pi}} \text{ et } E_{\Pi_1}[R_1] = 0. \quad (10)$$

Les espérances des  $R_k$  pour les cinq autres motifs  $\Pi$  peuvent être facilement calculées en utilisant les permutations  $\Sigma()$  qui leur sont associées, comme indiqué ci dessous :

$$E_{\Pi}[R_k] = E_{\Pi_1}[R_{\Sigma(k)}], \text{ pour } k = 0, 1, \dots, d-1. \quad (11)$$

Par exemple, pour le motif  $\Pi = 102$ , cela donne  $E_{\Pi}[R_0] = 0$  et  $E_{\Pi}[R_1] = -E_{\Pi}[R_2] = -\frac{3\sigma}{2\sqrt{\pi}}$ .

### 3.3 Propriétés des OPs de longueur $d > 3$

Dans le cas général où  $d > 3$ , on obtient les ddp et les espérances suivantes, pour le OP  $\Pi_1 = 012\dots d-1$  de longueur  $d$  associé à la permutation identité ( $\Sigma(k) = k$ ) pour  $k = 0, 1, \dots, d-1$  :

$$f_{R_k}(u) = \binom{d}{k+1} (k+1)p(u)\Phi(u)^k(1-\Phi(u))^{d-(k+1)}, \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (12)$$

$$\text{et } E_{\Pi_1}[R_k] = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_{R_k}(u) du, \quad (13)$$

où  $\binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!}$  est le coefficient binomial. L'équation (13) ne peut pas être exprimée analytiquement pour  $d > 3$ , à l'exception des cas particuliers où  $d$  est impair et  $k = \frac{d+1}{2}$ . En effet, la ddp est, dans ce cas, une fonction paire, ce qui mène à une espérance nulle. Comme les utilisateurs recommandent des OPs avec  $d \leq 7$ , le tableau ci-dessous résume les espérances des  $R_k$  pour un OP  $\Pi_1 = 01234\dots d-1$  associé à la permutation identité.

$\sigma^{-1}E_{\Pi_1}[R_k]$ pour le motif $\Pi_1 = 01234\dots d-1$ .						
k	d=2	d=3	d=4	d=5	d=6	d=7
1	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{3}{2\sqrt{\pi}}$	-1.0294	-1.1630	-1.2672	-1.3522
2	$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0	-0.2970	-0.4950	-0.6418	-0.7574
3		$-\frac{3}{2\sqrt{\pi}}$	0.2970	0	-0.2015	-0.3527
4			1.0294	0.4950	0.2015	0
5				1.1630	0.6418	0.3527
6					1.2672	0.7574
7						1.3522

On en déduit les espérances de  $R_k$  pour un OP quelconque  $\Pi$  associé à une permutation  $\Sigma()$  en utilisant l'équation (11).

## 4 Aspect fréquentiel lié au choix des motifs d'ordre

Le but de cette section est d'analyser l'aspect spectral des OPs issus d'un processus gaussien afin de mettre en évidence l'aspect filtrage qui se cache derrière le choix des motifs et de leur longueur. À cette fin, on se propose de calculer la transformée de Fourier de la séquence d'échantillons associée à un OP de longueur  $d$  :

$$X(\nu) = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} R_k e^{-j2\pi\nu k}, \quad \forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (14)$$

Ici,  $\nu$  représente la fréquence réduite. Pour simplifier les notations, on pose  $\alpha_0 = R_0$  et  $\alpha_k = R_k - R_{k-1}$  pour  $k = 1, 2, \dots, d-1$ . Cela permet d'écrire la relation suivante :

$$X_d(\nu) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d-k)}{d} \alpha_k \frac{\text{sinc}(\pi(d-k)\nu)}{\text{sinc}(\pi\nu)} e^{-j\pi\nu(d+k-1)}, \quad (15)$$

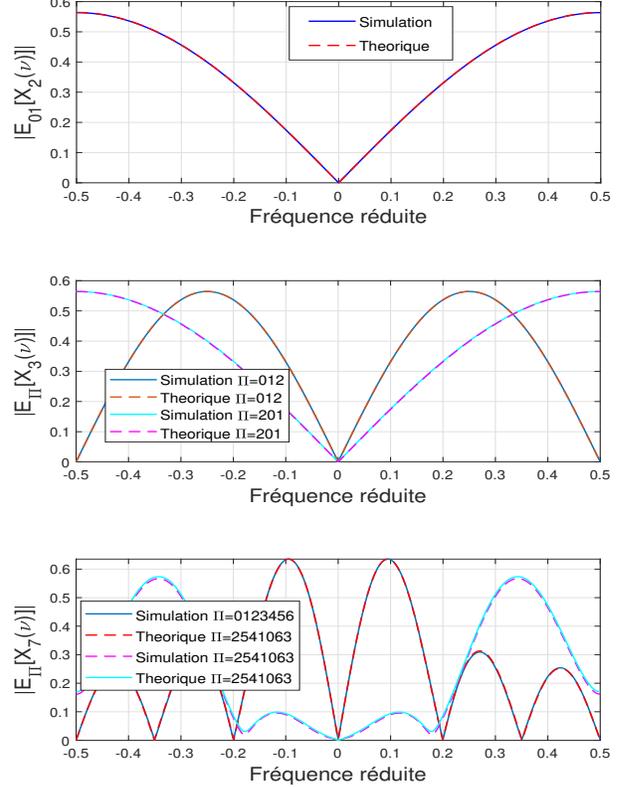


FIGURE 1 – Chaque motif d'ordre correspond à une sélection implicite d'une gamme de fréquence et l'atténuation d'autres (16).  $E_{\Pi}[X_d(\nu)]$  pour : (a)  $d = 2$ , (b)  $d = 3$  et (c)  $d = 7$ . Le nombre d'échantillons générés est  $N=1000000$ .

où  $\text{sinc}()$  est la fonction sinus cardinal. On peut en déduire le comportement moyen suivant :

$$E_{\Pi}[X_d(\nu)] = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d-k)}{d} E_{\Pi}[\alpha_k] \frac{\text{sinc}(\pi(d-k)\nu)}{\text{sinc}(\pi\nu)} e^{-j\pi\nu(d+k-1)}, \quad (16)$$

où  $E_{\Pi}[\alpha_0] = E_{\Pi_1}[R_{\Sigma(0)}]$  et  $E_{\Pi}[\alpha_k] = E_{\Pi_1}[R_{\Sigma(k)}] - E_{\Pi_1}[R_{\Sigma(k-1)}]$ .

La figure 1 illustre ces résultats pour  $d = 2, 3$  et  $7$  et pour des OPs issus d'un processus gaussien centré et de variance  $\sigma^2$ . On rappelle que l'équation (16) peut se simplifier comme suit pour  $d = 2$  et  $3$ .

$$|E_{01}[X_2(\nu)]| = |E_{10}[X_2(\nu)]| = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} |\sin(\pi\nu)|, \quad (17)$$

$$|E_{012}[X_3(\nu)]| = |E_{210}[X_3(\nu)]| = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} |\sin(2\pi\nu)|, \quad (18)$$

$$|E_{102}[X_3(\nu)]| = |E_{201}[X_3(\nu)]| = |E_{021}[X_3(\nu)]| \quad (19)$$

$$= |E_{120}[X_3(\nu)]| = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} |\sin(\pi\nu)| \quad (20)$$

À partir de la figure 1, on peut observer différentes signatures spectrales des OPs. Bien que les très basses fréquences soient fortement atténuées pour tous les OPs, comme attendu car  $d < 7$ , certains OPs se comportent

comme des passe-hauts tandis que d'autres agissent comme des passe-bandes. Cette observation est en accord avec une étude précédente présentée dans [18], qui ne traitait que le cas  $d = 2$ . L'effet de disparité, dans la sélection la gamme de fréquences induite naturellement par les OPs, est d'autant plus marqué que  $d$  augmente. Toutefois, les OPs miroirs présentent une signature spectrale commune. Par conséquent, on recommande de prendre en compte cette signature spectrale des motifs lors de l'interprétation des résultats obtenus par les méthodes ordinales existantes ou lors de la définition de nouvelles méthodes.

## 5 Conclusions

Ce papier vise à mettre en évidence la particularité des motifs ordinaux, sur lesquels se basent toutes les méthodes et les approches ordinales développées au cours des dernières décennies, telles que les mesures de complexité (l'entropie de permutation et la complexité de Lempel-Ziv de permutation). À l'aide d'une étude théorique menée sur des motifs ordinaux de différentes longueurs, issus d'un processus gaussien centré, on a montré que chaque motif présente une signature spectrale. Ils réduisent tous les très basses fréquences, ce qui est indéniable de par leur définition. Toutefois, certains motifs se comportent comme des passe-hauts, tandis que d'autres agissent comme des passe-bandes de plus en plus sélectifs à mesure que leur longueur  $d$  augmente. Il est important de tenir compte de cet aspect lors de l'interprétation des résultats obtenus par des méthodes ordinales.

## Références

- [1] C. Bandt and B. Pompe, "Permutation Entropy : A Natural Complexity Measure for Time Series," *Phy. Rev. Lett.*, vol. 88, no. 17, p. 174102, Apr. 2002.
- [2] "Phase-rectified signal averaging detects quasi-periodicities in non-stationary data," *Physica A : Stat. Mechanics and its Applications*, vol. 364, pp. 423–434, 2006.
- [3] C. Bandt and F. Shiha, "Order Patterns in Time Series," *Journal of Time Series Analysis*, vol. 28, no. 5, pp. 646–665, Sep. 2007.
- [4] O. A. Rosso, F. Olivares, L. Zunino, L. De Micco, A. L. L. Aquino, A. Plastino, and H. A. Larrondo, "Characterization of chaotic maps using the permutation Bandt-Pompe probability distribution," *The Europ. Phys. J. B*, vol. 86, no. 4, p. 116, Apr. 2013.
- [5] S. Zozor, D. Mateos, and P. W. Lamberti, "Mixing Bandt-Pompe and Lempel-Ziv approaches : another way to analyze the complexity of continuous-state sequences," *The Europ. Phys. Journal B*, vol. 87, no. 5, p. 107, May 2014.
- [6] C. Morel and A. Humeau-Heurtier, "Multiscale permutation entropy for two-dimensional patterns," *Pattern Recognition Lett.*, vol. 150, pp. 139–146, 2021.
- [7] J. M. Amigó, K. Keller, and V. A. Unakafova, "Ordinal symbolic analysis and its application to biomedical recordings," *Ph. Trans. of the Royal Society A : Math., Phys. and Eng. Sci.*, vol. 373, no. 2034, p. 20140091, Feb. 2015.
- [8] J. H. Martínez, J. L. Herrera-Diestra, and M. Chavez, "Detection of time reversibility in time series by ordinal patterns analysis," *Chaos : An Interdisciplinary J. of Nonlinear Sc.*, vol. 28, no. 12, p. 123111, Dec. 2018.
- [9] A. A. B. Pessa and H. V. Ribeiro, "Characterizing stochastic time series with ordinal networks," *Phys. Rev. E*, vol. 100, p. 042304, Oct 2019.
- [10] M. Zanin and F. Olivares, "Ordinal patterns-based methodologies for distinguishing chaos from noise in discrete time series," *Com. Phys.*, vol. 4, p. 190, 08 2021.
- [11] I. Leyva, J. H. Martínez, C. Masoller, O. A. Rosso, and M. Zanin, "20 years of ordinal patterns : Perspectives and challenges," *Europhysics Lett.*, vol. 138, no. 3, p. 31001, may 2022.
- [12] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N.-C. Yen, C. C. Tung, and H. H. Liu, "The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis," *Proc. Royal Soc. London. Series A : Math., Phys. and Eng. Sc.*, vol. 454, no. 1971, pp. 903–995, Mar. 1998.
- [13] M. Jabloun, "Empirical mode decomposition revisited using ordinal pattern concepts," in *30th European Signal Processing Conference, Belgrade, Serbia, 2022*, pp. 2186–2190.
- [14] C. Bandt, "Order patterns, their variation and change points in financial time series and Brownian motion," *Stat. Papers*, vol. 61, no. 4, pp. 1565–1588, Aug. 2020.
- [15] "Contrasting stochasticity with chaos in a permutation lempel-ziv complexity — shannon entropy plane," *Physica A : Stat. Mechanics and its Applications*, vol. 554, p. 124640, 2020.
- [16] C. Bandt, "Small Order Patterns in Big Time Series : A Practical Guide," *Entropy*, vol. 21, no. 6, p. 613, Jun. 2019.
- [17] M. Jabloun, J. Van Zaen, and J.-M. Vesin, "Time-frequency analysis based on the phase-rectified signal averaging method," in *17th European Signal Processing Conference, Glasgow, UK, 2009*, pp. 2303–2307.
- [18] S. Berger, G. Schneider, E. F. Kochs, and D. Jordan, "Permutation entropy : Too complex a measure for EEG time series?" *Entropy*, vol. 19, no. 12, 2017.