

# Compromis performance / complexité d'égaliseurs basés EP pour les liaisons FTN : simplifications par l'identité de Woodbury

Laëtitia JADOT<sup>1,2</sup> Serdar ŞAHIN<sup>1</sup> Romain TAJAN<sup>2</sup> Pascal CHEVALIER<sup>1,3</sup> Guillaume FERRÉ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Thales, 4 Avenue des Louvresses, 92230 Gennevilliers, France

<sup>2</sup>IMS, Univ. Bordeaux, Bordeaux INP, CNRS (UMR 5218), F-33405 Talence, France

<sup>3</sup>CEDRIC laboratory – CNAM, 292 rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 3, France

**Résumé** – Les récepteurs traitant l'interférence entre symboles (IES) induite par les liaisons Faster-Than-Nyquist (FTN) sont souvent très coûteux. Nous proposons d'étudier la simplification d'un égaliseur bloc temporel basé sur la propagation de l'espérance (*Expectation Propagation* - EP) en exploitant l'identité de Woodbury. En effet, en approximant l'inverse d'une matrice qui domine la complexité calculatoire à une matrice parcimonieuse qui a seulement  $L_c$  colonnes non-nulles, nous étudions le compromis performance / complexité de cette solution. Celle-ci permet de passer d'un ordre de complexité cubique en taille de bloc à une complexité quadratique, permettant par exemple d'atteindre plus de 83% de réduction de complexité pour des blocs de plus de 1000 symboles et des filtres avec un étalement de délai jusqu'à 5 symboles. Plus la compression du temps symbole FTN est faible, plus  $L_c$  doit être important pour maintenir des performances intéressantes, ce qui diminue légèrement le gain en complexité.

**Abstract** – Receivers dealing with the inter-symbol interference (ISI) caused by Faster-Than-Nyquist (FTN) signaling are often very expensive. We propose to study the simplification of a time-domain block equalizer based on Expectation Propagation (EP) by exploiting the Woodbury matrix identity. By approximating the inverse of a matrix that dominates the computational complexity to a sparse matrix that has only  $L_c$  non-zero columns, we study the performance/complexity trade-off of this solution. This allows us to get from a cubic order of complexity in block size to a quadratic complexity, allowing for instance to reach more than 83% complexity reduction for blocks of more than 1000 symbols and filters with a delay spread up to 5 symbols. The lower the FTN symbol time compression, the larger  $L_c$  must be to maintain attractive performance, which slightly decreases the complexity gain.

## 1 Introduction

Les futurs standards de communications numériques doivent faire face à des enjeux majeurs comme l'augmentation incessante d'utilisateurs d'objets connectés, et par conséquent, à un manque de ressources fréquentielles. Une approche permettant d'augmenter le débit sans nécessiter l'augmentation des ressources spectrales a été proposée par Mazo dans les années 70 ; il s'agit du Faster-Than-Nyquist (FTN) [1]. Cette méthode consiste à travailler à une cadence supérieure à la cadence dite de Nyquist pour une bande de fréquence donnée. Bien que la compression du signal transmis augmente le débit, elle génère aussi de l'interférence entre symboles (IES) qu'il est impératif de traiter pour pouvoir décoder le signal émis.

Le critère du Maximum A Posteriori (MAP), mis en œuvre par l'algorithme Bahl-Cocke-Jelinek-Raviv (BCJR) [2], minimise le taux d'erreur symbole. Cet algorithme est cependant souvent très coûteux à implémenter dans les systèmes réels. Dès lors, une quantité importante des recherches sur le FTN a été employée à concevoir des récepteurs moins complexes permettant de compenser les effets liés à la compression de la durée symbole. La recherche sur les signaux FTN a bénéficié des avancées dans le domaine des récepteurs turbo-itérés, en particulier pour le développement d'un récepteur avec un bon compromis complexité / performances dans un contexte de grande efficacité spectrale, comme dans [3].

Ces dernières années, des turbo-récepteurs basés sur la propagation d'espérance (*Expectation Propagation* - EP) pour le FTN ont été développés [4], et ont permis d'atteindre des taux

d'erreur binaire de l'ordre de  $10^{-5}$  pour des efficacités spectrales allant jusqu'à 5 bits/s/Hz avec une forte compression FTN. Bien que ces récepteurs soient moins complexes que le MAP, leur coût calculatoire reste élevé en raison de l'inversion d'une matrice de taille  $N_s \times N_s$ , avec  $N_s$  le nombre de symboles transmis, pour des systèmes non-circulaires, c'est-à-dire sans convolution circulaire des symboles avec le filtre de mise en forme en émission.

Dans cet article, nous réduisons le nombre d'opérations du récepteur de [4] en exploitant l'identité de Woodbury, ou lemme d'inversion matricielle. Ce lemme est attractif pour ré-inverser une matrice suite à des mises à jour de faible rang. Dans un récepteur itératif, la matrice de covariance des observations est à inverser lors de chaque passage dans l'égaliseur, vis à vis des changements sur les estimées de covariance a priori des symboles. A cause des erreurs résiduelles amplifiées par les filtres, la solution proposée devient instable à fort rapport signal sur bruit (*Signal to Noise Ratio* – SNR). Nous modélisons l'erreur de l'approximation initialement commise comme un bruit d'observation fictif lors du calcul des filtres, permettant ainsi de stabiliser les performances de l'égaliseur. En imposant une structure de matrice parcimonieuse lors de ces mises à jours, on peut réduire la complexité de ces égaliseurs de  $\mathcal{O}(N_s^3)$  à  $\mathcal{O}(N_s^2)$ . Nous nous intéressons seulement au comportement de l'égaliseur et nous nous plaçons dans une configuration sans turbo-itérations pour l'analyse des résultats. Enfin, nous analysons le compromis performance / complexité de l'égaliseur EP simplifié par l'identité de Woodbury pour les liaisons FTN.

**Notations** :  $\mathbf{X}$  est une matrice,  $\mathbf{x}$  un vecteur colonne et  $x$  un scalaire.  $\mathbf{e}_k$  est un vecteur colonne composé d'un 1 à la ligne  $k$ , de 0 sinon;  $\cdot^\dagger$  est le transposé conjugué d'une matrice et  $\mathbf{I}$  la matrice identité. Pour accéder à la  $k^{\text{ième}}$  ligne et  $l^{\text{ième}}$  colonne de  $\mathbf{X}$ , nous utilisons  $\mathbf{X}[k, l]$ . Avec  $\mathbf{X}[k, :]$ , on accède à la  $k^{\text{ième}}$  ligne de la matrice et réciproquement. Enfin,  $\mathcal{N}_C(\mathbf{s} : \mathbf{x}, \mathbf{v})$  est une fonction de densité de probabilité gaussienne complexe circulairement symétrique  $\mathbf{s}$  de moyenne  $\mathbf{x}$  et de variance  $\mathbf{v}$ .

## 2 Modèle du système

Nous considérons un système de communication FTN sur un canal avec un bruit blanc additif gaussien (AWGN). Des paquets  $\mathbf{b}$  de  $N_b$  bits d'information indépendants et uniformément distribués sont transmis. Ces bits sont indépendamment associés à des symboles d'une constellation  $\mathcal{M}$  avec une cardinalité de  $|\mathcal{M}| = M$ . Chaque symbole utilise  $Q = \log_2(M)$  bits, et le vecteur de symboles  $\mathbf{s}$  de longueur  $N_s = N_b/Q$  est ensuite porté par le filtre de mise en forme en racine de cosinus sur-élevé  $h(t)$ , avec un facteur d'excès de bande  $\beta \in [0, 1]$ .

En communication Nyquist, la transmission se ferait à un temps symbole  $T$  tel que le débit symbole vaut  $D \triangleq \frac{1}{T}$ , ce qui correspond à une largeur de bande de  $W \triangleq D(1 + \beta)$  pour une bande bilatérale  $[-\frac{W}{2}; +\frac{W}{2}]$  en bande de base. Avec le FTN, on utilise un rythme  $T_s = \tau T$  où  $\tau \in [0, 1]$  est le facteur de compression, le débit symbole atteint  $D_s = \frac{W}{\tau(1+\beta)} = \frac{D}{\tau}$  augmentant ainsi le débit.

Le récepteur utilise un filtre pour limiter la puissance du bruit à la bande  $W$  et pour préserver le signal utile; le signal reçu en bande de base s'écrit, pour un paquet transmis,

$$r(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} s_k h(t - kT_s) + w(t), \quad (1)$$

où  $w(t)$  est un bruit blanc gaussien complexe circulairement symétrique. Sous hypothèse de synchronisation parfaite avec le signal émis, nous posons le modèle discret du signal  $r(t)$  échantillonné au rythme  $f_{se}D$ , avec le facteur de sur-échantillonnage  $f_{se} = 2$  choisi de manière à empêcher le repliement spectral et à préserver la blancheur du bruit. En notation matricielle, on a

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{U}\mathbf{s} + \mathbf{w}, \quad (2)$$

où  $\mathbf{w}$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de covariance  $\sigma^2\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{U}$  est la matrice de sur-échantillonnage, et  $\mathbf{H}$  la matrice de convolution associée au filtre. Cette dernière est obtenue à travers la troncature de  $h(t)$  à  $L$  échantillons, au rythme  $2D$ , et est de taille  $(2N_s + L - 1) \times 2N_s$ .

Pour la suite des calculs, nous posons  $\mathbf{G} \triangleq \mathbf{H}\mathbf{U}$ . La matrice  $\mathbf{G}$  est parcimonieuse avec une structure bande non Toeplitz, dont la première colonne est  $[h_1, h_2, \dots, h_L, 0, \dots, 0]^\dagger$ . Puis, chaque colonne de  $\mathbf{G}$  est obtenue en décalant de 2 éléments vers le bas la colonne précédente.

## 3 Récepteur EP bloc temporel

Dans notre schéma de communication, minimiser l'erreur d'estimation des symboles transmis revient à résoudre le critère MAP symbole pour chaque symbole  $s_k$  :

$$\hat{s}_k = \arg \max_{s_k} p(s_k | \mathbf{r}, \mathbf{G}), \quad (3)$$

Résoudre le critère MAP symbole revient à appliquer l'algorithme BCJR; sa complexité est exponentielle avec la taille du filtre de mise en forme, et polynomiale avec l'ordre de modulation. Une approche moins complexe est l'égaliseur à erreur quadratique moyenne minimale (*Minimum Mean Square Error* - MMSE) suivi d'un démappeur symbole, qui découple le problème combinatoire lié à la constellation. Bien que peu coûteux, les performances de cet algorithme sont mauvaises pour de grandes efficacités spectrales [4]. En 2014, Minka [5] propose l'algorithme EP, qui est un algorithme de passage de messages. L'application de celui-ci à notre problème donne lieu à un récepteur où un égaliseur MMSE suivi d'un annulateur d'interférences échangent itérativement des estimés des symboles émis avec un démodulateur/modulateur souple. Ces deux modules appliquent le principe turbo [6] : il estiment une distribution a posteriori des symboles émis en agrégeant ses propres observations, ses contraintes intrinsèques, et l'estimation a priori fournie par l'autre module. Puis, on retire l'information a priori pour former une nouvelle distribution, dite distribution extrinsèque, qui deviendra l'estimation a priori pour l'autre module. La particularité de EP est sa capacité à interfacer différents types de distributions de la famille exponentielle. En l'occurrence, les probabilités catégoriques sur la constellation  $\mathcal{M}$  sont approximées par des distributions gaussiennes à travers la méthode de moments (*Moment-Matching*) avec le calcul des moyennes (estimés) et variances (fiabilité) des symboles émis. Nous considérons que 1 itération EP correspond à deux passages dans l'égaliseur et un dans le démappeur; on parle aussi de mapping souple. Cet algorithme a été appliqué au FTN dans [4]; dans une déclinaison non-turbo, la distribution extrinsèque calculée en sortie de l'égaliseur à la  $t^{\text{ième}}$  itération EP est donnée, pour le  $k^{\text{ième}}$  symbole, par sa moyenne  $x_{t,k}^e$  et sa variance  $v_{t,k}^e$  :

$$\begin{aligned} x_{t,k}^e &= x_{t,k}^d + \frac{\mathbf{e}_k^\dagger \Sigma_t^{-1} \mathbf{G}^\dagger}{\mathbf{e}_k^\dagger \Sigma_t^{-1} \mathbf{G}^\dagger \mathbf{G} \mathbf{e}_k} (\mathbf{r} - \mathbf{G} \mathbf{x}_t^d), \\ v_{t,k}^e &= \frac{1}{\mathbf{e}_k^\dagger \Sigma_t^{-1} \mathbf{G}^\dagger \mathbf{G} \mathbf{e}_k} - v_{t,k}^d, \end{aligned} \quad (4)$$

où, à la  $t^{\text{ième}}$  itération EP,  $\mathbf{x}_t^d$ ,  $\mathbf{v}_t^d$  désignent respectivement la moyenne et la variance de la distribution extrinsèque calculée par le démappeur en entrée d'égaliseur, et

$$\Sigma_t = \sigma^2 \mathbf{I} + \mathbf{V}_t^d \mathbf{G}^\dagger \mathbf{G}, \quad (5)$$

avec  $\mathbf{V}_t^d$  une matrice diagonale de diagonale  $\mathbf{v}_t^d$ . Pour la distribution extrinsèque au niveau du démappeur, voir [4].

Le coût calculatoire de l'égaliseur EP est en  $O(N_s^3)$ . Ceci est dû à l'inversion de (5). Dans la section suivante, on cherche à réduire la complexité de celui-ci.

## 4 Simplification de l'égaliseur EP

Dans cette section, nous explicitons la contribution de cet article. Cette dernière consiste en la réduction de complexité de l'étape d'inversion de (5) en appliquant l'identité de Woodbury et en exploitant la parcimonie de matrices sous-jacentes.

Nous réécrivons  $\Sigma_t^{-1} \mathbf{G}^\dagger$  pour faire apparaître la matrice de covariance des observations  $\Gamma_t \triangleq \sigma^2 \mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{V}_t^d \mathbf{G}^\dagger$  avec

$$\Sigma_t^{-1} \mathbf{G}^\dagger = \mathbf{G}^\dagger \Gamma_t^{-1}. \quad (6)$$

Afin d'exploiter une potentielle réduction de complexité avec l'identité de Woodbury sur les mises à jour itératives de

$\Sigma_t^{-1}\mathbf{G}^\dagger$ , nous allons exploiter les mises à jours de la matrice de covariance des estimées a priori  $\mathbf{V}_t^d$  au sein de  $\Gamma_t$ . Notons  $\mathbf{V}_0^d = \mathbf{I}$ , et supposons que nous disposons déjà de  $\Gamma_0^{-1}$ . Par ailleurs, nous pouvons exprimer  $\Gamma_t$  en fonction de  $\Gamma_{t-1}$  :

$$\Gamma_t = \Gamma_{t-1} + \mathbf{G}\Delta\mathbf{V}_t^d\mathbf{G}^\dagger, \quad (7)$$

avec  $\Delta\mathbf{V}_t^d = \mathbf{V}_t^d - \mathbf{V}_{t-1}^d$ . Nous appliquons l'identité de Woodbury à  $\Gamma_t$ , et obtenons :

$$\Gamma_t^{-1} = \Gamma_{t-1}^{-1} - \Gamma_{t-1}^{-1}\mathbf{G}((\Delta\mathbf{V}_t^d)^{-1} + \mathbf{G}^\dagger\Gamma_{t-1}^{-1}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^\dagger\Gamma_{t-1}^{-1}.$$

Bien que  $\Gamma_{t-1}^{-1}$  ait été calculée à l'itération EP précédente, la matrice  $(\Delta\mathbf{V}_t^d)^{-1} + \mathbf{G}^\dagger\Gamma_{t-1}^{-1}\mathbf{G}$  reste à inverser, ce qui ne permet pas de réduire le nombre d'opérations. Une piste pour faciliter ces inverses, est de décomposer la mise à jour de  $\Delta\mathbf{V}_t^d$  comme une suite de mises à jours de rang 1 sur les indices des symboles du bloc du signal, et d'appliquer l'identité de Woodbury symbole par symbole. Pour une itération  $t$  fixée, on pose  $\Delta\mathbf{V}_t^d \triangleq \sum_{k=1}^{N_s} \delta v_{t,k}^d \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\dagger$ .  $\delta v_{t,k}^d = v_{t,k}^d - v_{t-1,k}^d$  correspond à la différence entre la variance estimée de la distribution extrinsèque du  $k^{\text{ième}}$  symbole de la  $t^{\text{ième}}$  itération EP et celle de l'itération  $t-1$ . En réécrivant (7), on obtient  $\Gamma_t = \Gamma_{t-1} + \sum_{k=1}^{N_s} \delta v_{t,k}^d \mathbf{g}_k \mathbf{g}_k^\dagger$ , où  $\mathbf{g}_k = \mathbf{G}\mathbf{e}_k$  correspond à la  $k^{\text{ième}}$  colonne de  $\mathbf{G}$ . Nous pouvons alors poser  $\mathbf{A}^{(0)} \triangleq \Gamma_{t-1}^{-1}$ , et par récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(k)} &= \mathbf{A}^{(k-1)} - \frac{\delta v_{t,k}^d}{1 + \delta v_{t,k}^d \mathbf{g}_k^\dagger \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{g}_k} \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_k^\dagger \mathbf{A}^{(k-1)}, \\ \mathbf{A}^{(N_s)} &\triangleq \Gamma_t^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Pour retrouver (6), il faut multiplier (8) par  $\mathbf{G}^\dagger$ . En posant  $\Upsilon^{(k-1)} \triangleq \mathbf{G}^\dagger \mathbf{A}^{(k-1)}$ , on obtient :

$$\Upsilon^{(k)} = \Upsilon^{(k-1)} - c_{t,k} \Upsilon^{(k-1)} \mathbf{g}_k \Upsilon^{(k-1)} [k, :], \quad (9)$$

avec  $c_{t,k} = \frac{\delta v_{t,k}^d}{1 + \delta v_{t,k}^d \Upsilon^{(k-1)} [k, :] \mathbf{g}_k}$  et  $\Upsilon^{(k-1)} [k, :] = \mathbf{g}_k^\dagger \mathbf{A}^{(k-1)}$ .

Le calcul de  $\Sigma_t^{-1}\mathbf{G}$  est donc remplacé par une mise à jour successive de matrices de rang 1.

La matrice  $\Upsilon^{(k-1)}$  n'étant pas parcimonieuse, l'identité de Woodbury ne permet pas de réduire le nombre d'opérations de l'égaliseur. Néanmoins, en analysant  $\Upsilon^{(k-1)}$ , nous constatons qu'un nombre important de ses valeurs est presque nul, et que sa structure est similaire à une matrice bande. Nous proposons de faire une approximation sur  $\Upsilon^{(k-1)}$  en considérant uniquement les  $L_c$  colonnes contenant les coefficients avec le plus d'information. Nous calculons à présent la sous matrice  $\hat{\Upsilon}^{(k-1)}$  de taille  $N_s \times L_c$  donnée par  $\hat{\Upsilon}^{(k-1)} \triangleq \Upsilon^{(k-1)}[:, k_1 : k_2]$  avec

$$k_1 \triangleq \begin{cases} 2k + i & \text{si } k > (1 - i)/2, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$k_2 \triangleq \begin{cases} 2k + j & \text{si } k > N_s + (L - 1 - j)/2, \\ 2N_s + (L - 1) & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $i \in [-2L, 0]$  et  $j \in [0, 2L]$  à sélectionner tel que  $j - i + 1 = L_c$ . De plus, pour la quantité  $\Upsilon^{(k-1)} \mathbf{g}_k$ , et pour un  $k$  donné, seules  $L$  valeurs de  $\mathbf{g}_k$  sont non nulles entre  $2k - 1$  et  $2k + L - 2$ . Il suffit donc uniquement de considérer les  $L$  valeurs non nulles de ce produit. Cette approximation permet de travailler sur des matrices de taille  $N_s \times L_b$ , contre  $N_s \times (2N_s + L - 1)$  sans approximation.

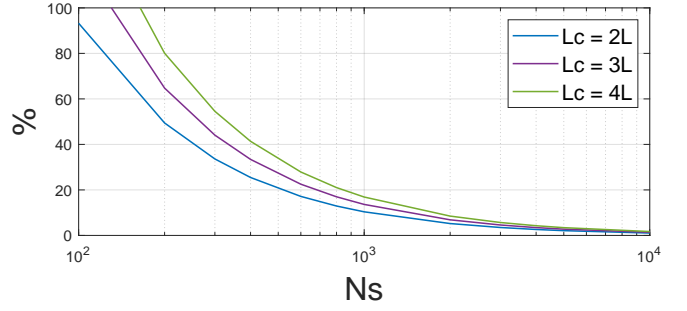


FIGURE 1 : Pourcentage de complexité de l'EP simplifié

Tronquer les colonnes de petites valeurs va créer une certaine erreur d'estimation qui risque de s'amplifier lors du filtrage de (4) quand, à fort SNR, la covariance du bruit  $\sigma^2\mathbf{I}$  tend vers 0, et que le récepteur se comporte comme si il n'y avait pas de bruit. Nous proposons de modéliser l'erreur comme un bruit de covariance  $\sigma_b^2\mathbf{I}$  tel que la covariance totale du canal vue par l'égaliseur soit égale à  $(\sigma^2 + \sigma_b^2)\mathbf{I}$ . Un  $\sigma_b^2$  sous-estimé retarderait l'amplification de l'erreur à fort SNR, une sur-estimation l'amplifierait d'autant plus.

La distribution extrinsèque du  $k^{\text{ième}}$  symbole calculée au niveau de l'égaliseur MMSE est donnée en remplaçant  $\Sigma_t^{-1}\mathbf{G}$  par  $\hat{\Upsilon}_t$  dans (4) pour  $t > 0$ . L'Algorithme 1 décrit le récepteur basé EP avec simplification par l'identité de Woodbury.

---

#### Algorithme 1 : Egaliseur EP bloc temporel simplifié

---

- 1 Entrées :  $\Upsilon_{t-1}, \mathbf{x}_t^d, \mathbf{v}_t^d, \mathbf{v}_{t-1}^d, \mathbf{G}, \mathbf{r}, L$
  - 2 pour  $k = 1 \dots N_s$  faire
  - 3     1) Choisir bande  $L_b$
  - 4     2) Calculer  $\hat{\Upsilon}^{(k)}$  avec (9)
  - 5 fin
  - 6 3) Calculer  $\mathbf{x}^e, \mathbf{v}^e$  avec (4) et  $\hat{\Upsilon}_t$
  - 7 Sorties :  $\mathbf{x}_t^e, \mathbf{v}_t^e, \Upsilon_t$
- 

## 5 Analyse de complexité

Pour évaluer la complexité des récepteurs, nous calculons le nombre de FLOPs (*Floating-Point Operations*). Nous considérons 3 opérations de base : une addition réelle  $A_r$  d'une valeur de 1 FLOP, une multiplication réelle  $M_r$  d'une valeur de 1 FLOP ainsi qu'une division réelle  $D_r$  d'une valeur de 10 FLOPs. La table 1 présente les calculs de complexité de l'égaliseur basé EP de [4], noté Ref. dans la table, de l'égaliseur basé EP avec simplification par l'identité de Woodbury avec approximation, noté Prop.

TABLE 1 : Complexité des différents égaliseurs

	FLOPs
Ref.	$\frac{2}{3}N_s^3 + 10N_s^2 + (\frac{7}{2}L + \frac{19}{3})N_s$
Prop.	$2(L_c + L + 2)N_s^2 + (14L + 32)N_s + 4L(L - 1)$

La Figure 1 présente les courbes de pourcentages de complexité de l'algorithme EP simplifié par rapport à l'algorithme de [4] pour différentes valeurs de  $L_c$  et pour  $L = 11$ . Le pourcentage de complexité de l'algorithme simplifié par rapport à l'algorithme de référence est donné en fonction de  $N_s$ . Nous pouvons voir, pour  $N_s = 1000$  symboles transmis, que la réduction de complexité est d'environ 83% pour  $L_c = 4L$ , et peut aller jusque 90% pour  $L_c = 2L$ .

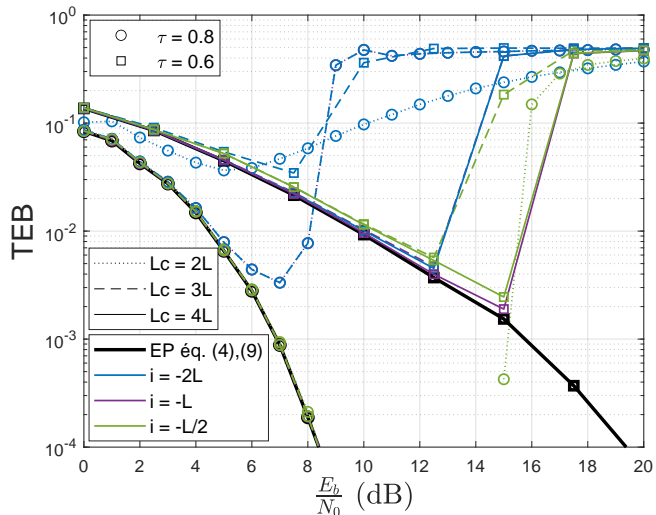


FIGURE 2 : Performances de l'algorithme EP simplifié

## 6 Performances des récepteurs

Nous évaluons par simulation et sur canal AWGN les performances des récepteurs à complexité réduite par l'identité de Woodbury avec approximation sur les  $L_c$  colonnes. Nous affichons le TEB en fonction du SNR par bit noté  $\frac{E_b}{N_0}$ . Nous considérons  $N_b = 1024$  bits, une modulation QPSK, et un filtre de mise en forme en racine de cosinus surélevé avec  $\beta = 0.4$  tronqué à  $L = 11$  échantillons. L'égalisation du canal est réalisée avec une itération EP, c'est-à-dire que le module d'égalisation est appliqué deux fois. Le nombre de colonnes  $L_c$  varie de  $2L$  à  $4L$ , pour  $i$  variant de  $-2L$  à  $-L/2$ .

La Figure 2 présente les résultats des simulations pour des compressions FTN  $\tau = 0.8$  et  $\tau = 0.6$ . La courbe noire représente les performances de l'égaliseur EP de [4], qui est strictement équivalent à l'égaliseur de l'équation (9) en terme de performances. Pour  $\tau = 0.8$  partir d'une largeur de  $L_b = 3L$  et un début à  $2k - L$ , il n'y a pas de dégradation significative des performances des algorithmes approximatifs par rapport à l'algorithme non approximé jusque  $\frac{E_b}{N_0} = 15dB$ . Le décrochage de l'égaliseur avec approximation de la bande  $L_c = 2L$  pour  $i \in \{-2L, -L\}$  et  $L_b = 3L$  pour  $i = -2L$  est dû à un trop grand nombre de coefficients portant l'information ignoré dans la matrice  $\Upsilon$ . Pour  $\tau = 0.6$ , une largeur de bande  $L_c = 4L$  et  $i \in \{-L, -L/2\}$  est nécessaire pour ne pas observer de dégradation significative des performances jusque  $\frac{E_b}{N_0} = 15dB$  par rapport au récepteur sans approximation. Pour  $L_c = 3L, i \in \{-L, -L/2\}$  et  $L_c = 4L, i = -2L$ , il n'y a pas de dégradation significative des performances jusque  $\frac{E_b}{N_0} = 12.5dB$ . Hormis les approximations  $L_c = 2L, i \in \{-2L, -L\}$  et  $L_c = 3L, i = -2L$  pour  $\tau = 0.8$  et  $L_c = 3L, i = -2L$  pour  $\tau = 0.6$  qui dégradent fortement les performances quel que soit le  $\frac{E_b}{N_0}$  testé, toutes les autres approximations décrochent à fort SNR, soit entre 12.5 dB et 15 dB.

La Figure 3 présente les performances des récepteurs avec une compression  $\tau = 0.6$ . Nous cherchons à modéliser l'erreur d'approximation afin de maximiser les performances. Nous choisissons une variance égale à  $-15dB$ . La prise en compte de cette erreur dans la covariance du bruit vue par l'égaliseur permet de la contrôler à fort rapport signal à bruit afin de créer un plancher d'erreur rattrapable par un code correcteur d'erreurs fonctionnant dans le même régime.

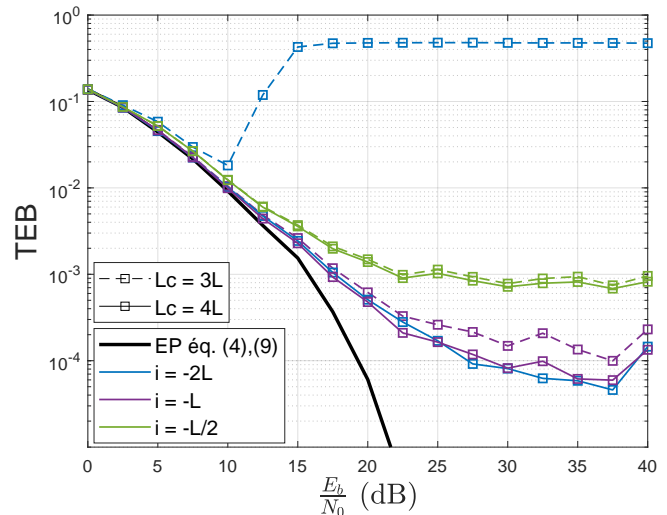


FIGURE 3 : Performances pour  $\tau = 0.6$  avec estimation de  $\sigma_b^2$

## 7 Conclusion

L'égaliseur EP pour le FTN simplifié par l'identité de Woodbury permet de passer d'une complexité de  $O(N_s^3)$  à  $O(N_s^2)$  en mettant à jour des matrices de rang 1 approximées par des matrices parcimonieuses. Pour des compressions allant de 0.8 à 1, un nombre de colonnes  $L_c = 3L$  est suffisant pour bénéficier de la réduction de complexité sans affecter les performances. Pour de plus fortes compressions, et à fort rapport signal à bruit, l'erreur d'approximation est amplifiée par l'égaliseur, et une forte dégradation des performances est constatée. L'ajout d'un bruit fictif vu par l'égaliseur permet de contrôler l'erreur d'approximation, et de créer un plancher d'erreurs qui pourrait être rattrapé par un code correcteur d'erreurs. La simplification du récepteur bloc temporel par l'identité de Woodbury pourrait être comparée avec d'autres techniques de réduction de coût calculatoire comme la factorisation de Cholesky.

## Références

- [1] J. E. MAZO. *Faster-than-nyquist signaling*. Nokia Bell Labs, The Bell System Technical Journal ( Volume : 54, Issue : 8), 1975.
- [2] L. Bahl et al. *Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate*. IEEE Trans. on Inf. Theory, v.20, n. 2, p. 284-287, 1974.
- [3] G. Colavolpe et al. *Novel SISO Detection Algorithms for Nonlinear Satellite Channels*. IEEE Wireless Communications Letters ( Volume : 1, Issue : 1), 2012.
- [4] Titouan PETITPIED. *Faster-Than-Nyquist communication systems : from single-carrier to multi-carrier signaling*. Université de Bordeaux, 2021.
- [5] Thomas MINKA. *Expectation Propagation for approximate Bayesian inference*. Preprint at <https://arxiv.org/abs/1301.2294>, 2013.
- [6] C. Laot et al. *Turbo equalization : adaptive equalization and channel decoding jointly optimized*. IEEE Journal on Selected Areas in Communications ( Volume : 19, Issue : 9), 2001.