

# Borne de Cramér-Rao sur groupe de Lie avec observations sur groupe de Lie : application à $SO(2)$

Samy LABSIR<sup>1</sup> Alexandre RENAUX<sup>2</sup> Jordi VILÀ-VALLS<sup>3</sup> Eric CHAUMETTE<sup>3</sup>

<sup>1</sup>IPSA/Laboratoire TéSA, 40, boulevard de la Marquette, 31000, Toulouse, France

<sup>2</sup>Université Paris-Saclay, 3, rue Joliot Curie, 91190, Gif-sur-Yvette, France

<sup>3</sup>ISAE-SUPAERO, 10, avenue Edouard Belin, 31400, Toulouse, France

**Résumé** – Dans cette communication, nous dérivons une nouvelle borne de Cramér-Rao intrinsèque pour paramètres et observations vivant sur groupes de Lie. L’expression est obtenue en utilisant les propriétés inhérentes à leur structure. De plus, une expression exacte est obtenue dans le cas où paramètres et observations sont sur  $SO(2)$ , le groupe de Lie des matrices de rotations en 2D. La borne proposée est alors validée numériquement pour un modèle gaussien définie sur le groupe de Lie  $SO(2)$ .

**Abstract** – In this communication, we derive a new intrinsic Cramér-Rao bound for both parameters and observations lying on Lie groups. The expression is obtained by using the intrinsic properties of Lie groups. An exact expression is obtained for the case where parameters and observations are in  $SO(2)$ , Lie group of 2D rotation. To support the discussion, the proposed bound is numerically validated for a Lie group Gaussian model on  $SO(2)$ .

## 1 Introduction

Les bornes de performance d’estimation sont cruciales dans divers domaines du traitement du signal. En effet, étant donné un modèle statistique, ces bornes fournissent l’erreur quadratique moyenne (EQM) minimale qu’un estimateur peut s’attendre à atteindre. Dans de nombreuses applications, le vecteur des paramètres inconnus est contraint à respecter certaines propriétés géométriques, et par conséquent de vivre sur une variété riemannienne. L’estimation des paramètres appartenant à ce type de une variété est devenue un enjeu crucial au cours des dernières décennies [18, 7]. Variétés typiques d’intérêt : (1) *La variété des matrices symétriques définies positives (SPD)*. Par exemple, en pistage de cible radar [19], la covariance du modèle statistique est souvent inconnue et peut être estimée sur une telle variété. En traitement d’image, les pixels peuvent être modélisés par une matrice SPD [16, 17] et la moyenne de ces données doit être estimée sur l’espace SPD. (2) *La variété de Stiefel*. Dans le cadre de la séparation aveugle des sources, le démixage consiste à estimer une matrice orthonormée reposant sur la variété de Stiefel [12]. (3) *Groupes de Lie matriciels (LG)*. Ils sont utilisés dans le domaine de la robotique et de la navigation, pour estimer l’attitude d’un robot sur  $SO(2)$  ou  $SO(3)$  [3], ou directement sa pose sur  $SO(2)$  ou  $SE(3)$ , pour la localisation et la cartographie simultanées [10, 21].

Pour évaluer les performances d’un problème d’estimation sur une variété, il est fondamental de définir d’abord une MSE intrinsèque prenant en compte les propriétés de la variété en question. Des bornes de Cramér-Rao intrinsèques (BCRI) ont en particulier été dérivées dans le cadre de la variété riemannienne des matrices SPD [9]. Dans ce travail, nous nous focalisons sur le développement de bornes intrinsèques pour des paramètres vivant sur groupes de Lie matriciels (GdL). Différentes bornes ont été proposée sur GdL. Dans [5], une BCRI non bayésienne est développée pour des observations euclidiennes et aboutit à une forme analytique et approchée pour  $SO(3)$  dans le

contexte du problème de Wabha [20]. Dans [11, 8], une BCRI plus générique est établie mais uniquement valable pour des densité de probabilité symétriques ou isotropes. Dans un cadre bayésien, une borne a posteriori intrinsèque a également été proposé pour des LGs unimodulaires[13].

Dans cet article, nous nous focalisons sur des paramètres déterministes dépendant d’observations vivant sur GdL. Il est important de souligner que les bornes non bayésiennes précédemment dérivées sont restrictives. En effet, dans certaines applications, par exemple en vision par ordinateur, les observations sont souvent contraintes sur groupe de Lie [15]. De plus, les bornes existantes n’admettent des expressions analytiques qu’uniquement pour  $SO(3)$ , alors que d’autres LGs, en particulier  $SO(2)$  (le groupe semi-direct des translations et rotations dans l’espace 2D) [14], doit aussi être étudié. Pour cela, nous proposons la généralisation suivante : nous calculons d’abord une borne de Cramér-Rao non bayésienne (BCRI), qui contrairement à [5], s’applique pour des observations sur GdL. En particulier, la démonstration est effectuée en tirant parti de la condition sans biais des estimateurs sur GdL. Ensuite, nous fournissons une expression exacte pour le GdL  $SO(2)$ . Grâce aux propriétés de ce dernier, nous en déduisons une expression analytique lorsque des observations distribuées selon une loi gaussienne vivent également sur  $SO(2)$ .

La communication est organisée comme suit : dans un premier temps, nous fournissons un prérequis sur la théorie des groupe de Lie. Deuxièmement, nous développons la BCRI et donnons son expression explicite dans le cas de  $SO(2)$ . Dans la dernière section, la borne proposée est validée numériquement pour un modèle gaussien avec observations sur  $SO(2)$ .

## 2 Groupe de Lie : éléments théoriques

### 2.1 Définitions

Un GdL matriciel  $G \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  est un espace matriciel muni d’une structure de variété différentielle et de groupe. Sa struc-

ture de variété différentielle permet de définir des opérations d'intégration et de dérivation. Ainsi, nous pouvons définir la notion d'espace tangent en fonction de chaque élément de  $G$ . Sa structure de groupe permet de définir une loi interne qui agit entre chaque élément de  $G$ . Par conséquent, il existe un élément neutre (matrice identité) tel que chaque élément de  $G$  puisse être inversé. De plus, nous pouvons tirer parti de cette loi interne pour lier chaque élément de l'espace tangent identité à l'espace tangent de tout élément. L'espace tangent identité est dénommé l'algèbre de Lie et noté  $\mathfrak{g}$ .

Chaque élément de  $G$  et de l'algèbre de Lie sont reliés entre eux, par les applications logarithmiques et exponentielles définies, respectivement, par  $\text{Exp}_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$  et  $\text{Log}_G : G \rightarrow \mathfrak{g}$ , comme illustrée sur la figure 1.  $\mathfrak{g}$  étant isomorphe à  $\mathbb{R}^m$ , nous pouvons définir deux bijections  $[\cdot]^\wedge : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{g}$  et  $[\cdot]^\vee : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . De cette manière, nous redéfinissons les applications exponentielles et logarithmiques telles que :  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\text{Exp}_G^\wedge(\mathbf{a}) = \text{Exp}([\mathbf{a}]_G^\wedge)$  et  $\forall \mathbf{M} \in G$ ,  $[\text{Log}_G(\mathbf{M})]_G^\vee = \text{Log}_G^\vee(\mathbf{M})$ .

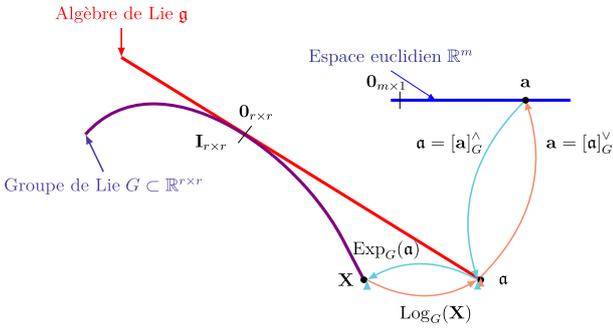


FIGURE 1 : Relation entre  $\mathbb{R}^m$ ,  $G$  and  $\mathfrak{g}$

Afin d'établir la borne proposée, la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) est nécessaire. Il s'agit d'une relation exprimant la non-commutativité générale d'un GdL.  $\forall \mathbf{c}, \mathbf{d} \in (\mathbb{R}^m)^2$  :

$$\text{Log}_G^\vee(\text{Exp}_G^\wedge(\mathbf{b}) \text{Exp}_G^\wedge(\mathbf{c})) = \mathbf{b} + \psi_G(\mathbf{c}) \mathbf{b} + O(\|\mathbf{c}\|^2), \quad (1)$$

où  $\psi_G(\mathbf{c})$  désigne l'inverse de la matrice jacobienne gauche de  $G$ , les coefficients  $\{B_n\}_{n=0}^\infty$  sont les nombres de Bernoulli [1] et  $\text{ad}_G(\mathbf{d})$  est la représentation adjointe sur  $\mathfrak{g}$  de  $\mathbf{d}$ . Dans ce qui suit, nous supposons que  $G$  est un GdL ayant son algèbre de Lie isomorphe à  $\mathbb{R}^m$ .

## 2.2 Statistiques sur les groupes de Lie

Considérons une observation aléatoire  $\mathbf{Z}$ , appartenant à un GdL  $G'$ , dépendant d'un paramètre inconnu  $\mathbf{M} \in G$  et construite à partir de la vraisemblance  $p(\mathbf{Z}|\mathbf{M})$ . Sur GdL, l'écart entre deux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  peut être quantifié en utilisant la métrique  $l_{\mathbf{G}\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} = \text{Log}_G^\vee(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$  et permet de mesurer le chemin entre  $\mathbf{M}$  et un estimateur  $\widehat{\mathbf{M}}$ . Soit  $\lambda_G(\cdot)$  la mesure de Haar. La moyenne  $\mathbf{M}_{\widehat{\mathbf{M}}} \in G$  est définie de telle sorte que<sup>1</sup> :

$$\int_{G'} l_{\mathbf{G}\widehat{\mathbf{M}}}^{\widehat{\mathbf{M}}} p(\mathbf{Z}|\mathbf{M}) \lambda_{G'}(d\mathbf{Z}) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

son biais intrinsèque  $\mathbf{b}_{\mathbf{Z}|\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^m$  donné par [6] :

$$\mathbf{b}_{\mathbf{Z}|\mathbf{M}}(\mathbf{M}, \widehat{\mathbf{M}}) = \int_{G'} l_{\mathbf{G}\widehat{\mathbf{M}}}^{\mathbf{M}} p(\mathbf{Z}|\mathbf{M}) \lambda_{G'}(d\mathbf{Z}), \quad (3)$$

<sup>1</sup>Pour une matrice aléatoire sur groupe de Lie,  $\mathbb{E}(f(\mathbf{X})) = \int p(\mathbf{X}) f(\mathbf{X}) \lambda_G(d\mathbf{X})$  où  $\lambda_G(\cdot)$  est une mesure de Haar

et son EQM intrinsèque (EQMI)  $\mathbf{C}_{\mathbf{Z}|\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  définie par [11] :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Z}|\mathbf{M}}(\mathbf{M}, \widehat{\mathbf{M}}) = \int_{G'} l_{\mathbf{G}\widehat{\mathbf{M}}}^{\mathbf{M}} l_{\mathbf{G}\widehat{\mathbf{M}}}^{\mathbf{M}^\top} p(\mathbf{Z}|\mathbf{M}) \lambda_{G'}(d\mathbf{Z}). \quad (4)$$

Il est à souligner que ce terme ne définit pas à proprement parler une distance géodésique. En effet, il n'est pas construit à partir d'une métrique de groupe de Lie sauf pour le cas particulier de  $SO(2)$  et  $SO(3)$ . Néanmoins, il spécifie un bon indicateur du chemin intrinsèque parcouru entre  $\mathbf{M}$  et  $\widehat{\mathbf{M}}$ , et est classiquement utilisé dans la littérature d'estimation sur GdL [6][4].

## 3 Bornes de Cramér-Rao intrinsèque

### 3.1 Expression générale

**Theorem 3.1.1.** Supposons un ensemble d'observations  $\mathbf{Z} \in G'$  dépendant d'un paramètre inconnu  $\mathbf{M} \in G$  par la vraisemblance  $p(\mathbf{Z}|\mathbf{M})$ . De plus, considérons que  $\widehat{\mathbf{M}}$  est un estimateur sans biais de  $\mathbf{M}$  au sens où,

$$\mathbf{b}_{\mathbf{Z}|\mathbf{M}}(\mathbf{M}, \widehat{\mathbf{M}}) = \mathbf{0}. \quad (5)$$

L'EQMI vérifie,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Z}|\mathbf{M}}(\mathbf{M}, \widehat{\mathbf{M}}) \succeq \mathbf{P} \quad (6)$$

avec,

$$\mathbf{P} = \mathbb{E} \left( \psi_G \left( l_{\mathbf{G}\widehat{\mathbf{M}}}^{\mathbf{M}} \right) \right) \mathcal{I}_G^{-1} \mathbb{E} \left( \psi_G \left( l_{\mathbf{G}\widehat{\mathbf{M}}}^{\mathbf{M}} \right)^\top \right) \quad (7)$$

et,

$$\mathcal{I}_G = \mathbb{E} \left( \left. \frac{\partial p(\mathbf{Z}|\mathbf{M}, \delta_1)}{\partial \delta_1} \frac{\partial p(\mathbf{Z}|\mathbf{M}, \delta_2)}{\partial \delta_2} \right|_{\delta_1, \delta_2 = \mathbf{0}} \right)^\top, \quad (8)$$

avec  $lp(\mathbf{Z}|\mathbf{M}, \delta) = \log p(\mathbf{Z}|\mathbf{M} \text{Exp}_G^\wedge(\delta))$  Si  $\delta \rightarrow lp(\mathbf{Z}|\mathbf{M}, \delta)$  est suffisamment régulière, alors :

$$\mathcal{I}_G = -\mathbb{E} \left( \left. \frac{\partial^2 \log p(\mathbf{Z}|\mathbf{M} \text{Exp}_G^\wedge(\delta_1) \text{Exp}_G^\wedge(\delta_2))}{\partial \delta_1 \partial \delta_2} \right|_{\delta_1, \delta_2 = \mathbf{0}} \right). \quad (9)$$

Preuve :

De la même manière que la démonstration euclidienne, nous définissons le vecteur suivant,

$$\mathbf{s} = \left[ l_{\mathbf{G}\widehat{\mathbf{M}}}^{\mathbf{M}^\top}, \nabla_{\mathbf{M}} L_p^\top \right]^\top. \quad (10)$$

avec

$$\nabla_{\mathbf{M}} L_p = \left. \frac{\partial \log p(\mathbf{Z}|\mathbf{M} \text{Exp}_G^\wedge(\delta))}{\partial \delta} \right|_{\delta = \mathbf{0}}. \quad (11)$$

La matrice de corrélation  $\mathbf{R} = \mathbb{E}(\mathbf{s} \mathbf{s}^\top)$  peut être décomposée comme,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbb{E} \left( l_{\mathbf{G}\widehat{\mathbf{M}}}^{\mathbf{M}} l_{\mathbf{G}\widehat{\mathbf{M}}}^{\mathbf{M}^\top} \right) & \mathbb{E} \left( l_{\mathbf{G}\widehat{\mathbf{M}}}^{\mathbf{M}} \nabla_{\mathbf{M}} L_p^\top \right) \\ \mathbb{E} \left( \nabla_{\mathbf{M}} L_p l_{\mathbf{G}\widehat{\mathbf{M}}}^{\mathbf{M}^\top} \right) & \mathbb{E} \left( \nabla_{\mathbf{M}} L_p \nabla_{\mathbf{M}} L_p^\top \right) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$\mathbf{R}$  étant semi-défini positive, son complément de Schur vérifie également cette propriété. Il s'ensuit :

$$\mathbb{E} \left( \mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}}{\widehat{\mathbf{M}}} \mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}^\top}{\widehat{\mathbf{M}}} \right) \succeq \mathbf{L} \quad (13)$$

avec

$$\mathbf{L} = \mathbb{E} \left( \mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}}{\widehat{\mathbf{M}}} \nabla_{\mathbf{M}} L_p^\top \right) \mathbb{E} \left( \nabla_{\mathbf{M}} L_p \nabla_{\mathbf{M}} L_p^\top \right)^{-1} \mathbb{E} \left( \nabla_{\mathbf{M}} L_p \mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}^\top}{\widehat{\mathbf{M}}} \right). \quad (14)$$

Expression de  $\mathbb{E} \left( \mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}}{\widehat{\mathbf{M}}} \nabla_{\mathbf{M}} L_p^\top \right)$  :

En exploitant la condition sans biais (5), nous obtenons :

$$\left. \left( \frac{\partial}{\partial \delta} \int_{G'} \mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}^{\text{Exp}_G^\wedge(\delta)}}{\widehat{\mathbf{M}}} p(\mathbf{Z}|\mathbf{M} \text{Exp}_G^\wedge(\delta)) \lambda_{G'}(d\mathbf{Z}) \right) \right|_{\delta=0} = \mathbf{0} \quad (15)$$

En supposant que  $\mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}^{\text{Exp}_G^\wedge(\delta)}}{\widehat{\mathbf{M}}} p(\mathbf{Z}|\mathbf{M} \text{Exp}_G^\wedge(\delta))$  est borné par une fonction mesurable, il est possible d'inverser l'intégrale et les opérateurs dérivés. En utilisant la dérivée classique des fonctions,

$$\left. \left( \int_{G'} \frac{\partial}{\partial \delta} \mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}^{\text{Exp}_G^\wedge(\delta)}}{\widehat{\mathbf{M}}} p(\mathbf{Z}|\mathbf{M} \text{Exp}_G^\wedge(\delta)) \lambda_{G'}(d\mathbf{Z}) + \int_{G'} \mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}^{\text{Exp}_G^\wedge(\delta)}}{\widehat{\mathbf{M}}} \frac{\partial}{\partial \delta} p(\mathbf{Z}|\mathbf{M} \text{Exp}_G^\wedge(\delta))^\top \lambda_{G'}(d\mathbf{Z}) \right) \right|_{\delta=0} = \mathbf{0} \quad (16)$$

Cette expression peut être simplifiée en utilisant deux astuces : d'abord, le terme  $\mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}^{\text{Exp}_G^\wedge(\delta)}}{\widehat{\mathbf{M}}}$  peut être explicité par la formule BCH et :

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}^{\text{Exp}_G^\wedge(\delta)}}{\widehat{\mathbf{M}}} = -\psi_G(\mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}}{\widehat{\mathbf{M}}}). \quad (17)$$

Ensuite, nous savons que,

$$\frac{\partial}{\partial \delta} p(\mathbf{Z}|\mathbf{M} \text{Exp}_G^\wedge(\delta)) = \frac{\partial}{\partial \delta} \ln p(\mathbf{Z}, \mathbf{M}, \delta) p(\mathbf{Z}|\mathbf{M} \text{Exp}_G^\wedge(\delta)), \quad (18)$$

et en utilisant (16),

$$\int_{G'} \psi_G(\mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}^{\text{Exp}_G^\wedge(\delta)}}{\widehat{\mathbf{M}}}) p(\mathbf{Z}|\mathbf{M}) \lambda_{G'}(d\mathbf{Z}) + \int_{G'} \mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}}{\widehat{\mathbf{M}}} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln p(\mathbf{Z}|\mathbf{M}, \delta) \Big|_{\delta=0}^\top p(\mathbf{Z}|\mathbf{M}) \lambda_{G'}(d\mathbf{Z}) = \mathbf{0}. \quad (19)$$

En isolant l'intégrale de droite, on obtient,

$$\mathbb{E} \left( \mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}}{\widehat{\mathbf{M}}} \nabla_{\mathbf{M}} L_p^\top \right) = \mathbb{E} \left( \psi_G \left( \mathbf{l}_G \frac{\mathbf{M}}{\widehat{\mathbf{M}}} \right) \right) \quad (20)$$

En injectant cette dernière équation dans (14), nous en déduisons la formule (7).

### 3.2 Application à un modèle Gaussien-Groupe de Lie sur $SO(2)$

Afin de définir un modèle statistique avec observations sur GdL, nous pouvons nous appuyer sur les distributions gaussiennes concentrées (CGD), introduites dans [2] et généralisant le concept de distribution multivariée gaussienne euclidienne. Si  $\epsilon \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{S})$  et  $\mu$  une matrice définie sur un GdL  $G$ , alors  $\mathbf{X} = \mu \text{Exp}_G^\wedge(\epsilon)$  est distribué selon une CGD à gauche sur  $G$ , de paramètres  $\mu \in G$  et  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Si  $\mu$  est proche de  $\mathbf{I}$ ,

$$p(\mathbf{X}) \simeq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{S}|}} \exp^{-\frac{1}{2} \|\text{Log}_G^\vee(\mu^{-1} \mathbf{X})\|_{\mathbf{S}}^2}. \quad (21)$$

Supposons que nous avons accès à des observations  $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N$  distribuées selon un CGD sur  $SO(2)$  et reliées au paramètre inconnu  $\mathbf{M} \in SO(2)$  :

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{M} \text{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon_i) \quad \epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (22)$$

Considérons la matrice d'observation complète  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N\}$  et  $p(\mathbf{Z}|\mathbf{M})$  la vraisemblance associée. Il convient de noter que l'expression de  $\mathbf{P}$  peut être simplifiée dans ce cas. En effet,  $SO(2)$  est commutatif, par conséquent, l'opérateur adjoint est égal à  $\mathbf{0}$ . Ainsi,  $\psi_{SO(2)}(\cdot) = \mathbf{I}$  et,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Z}|\mathbf{M}}(\mathbf{M}, \widehat{\mathbf{M}}) \succeq \mathcal{I}_{SO(2)}^{-1}, \quad (23)$$

où  $\widehat{\mathbf{M}}$  désigne un estimateur sans biais de  $\mathbf{M}$ . Selon l'expression de la CGD, nous avons :

$$\begin{aligned} \log p \left( \mathbf{Z}|\mathbf{M} \text{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon_1) \text{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon_2) \right) &= \overbrace{K}^{\in \mathbb{R}} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\| \mathbf{l}_{SO(2)} \frac{\mathbf{Z}_i}{\widehat{\mathbf{M}}} \text{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon_1) \text{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon_2) \right\|_{\Sigma}^2 \end{aligned} \quad (24)$$

De plus, la formule BCH fournit :

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{SO(2)}(\mathbf{M} \text{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon_1) \text{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon_2), \mathbf{Z}_i) &= \mathbf{l}_{SO(2)} \frac{\mathbf{Z}_i}{\widehat{\mathbf{M}}} \\ &- \underbrace{\psi_{SO(2)}(\mathbf{l}_{SO(2)} \frac{\mathbf{Z}_i}{\widehat{\mathbf{M}}})}_{=\mathbf{I}} (\epsilon_1 + \epsilon_2) + O(\|\epsilon_1 + \epsilon_2\|^2). \end{aligned} \quad (25)$$

En différenciant l'expression précédente selon  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  et en prenant leurs valeurs à zéro, on obtient  $\mathcal{I}_{SO(2)} = N \Sigma^{-1}$  et  $\mathbf{P} = N^{-1} \Sigma$ .

## 4 Résultats de simulation

Dans cette section, la borne proposée est validée dans le cas du modèle d'observation LG-Gaussien (22) pour  $SO(2)$ , par comparaison avec l'EQMI dont l'expression est donnée par la trace de (4). Comme cette dernière n'est pas calculable théoriquement, elle peut être approximée par Monte-Carlo par :

$$\frac{1}{N_{mc}} \sum_{t=1}^{N_{mc}} \left\| \mathbf{l}_{SO(2)} \frac{\widehat{\mathbf{X}}_0^t}{\mathbf{X}_0} \right\|^2, \quad (26)$$

où  $N_{mc}$  est le nombre de réalisations et  $\widehat{\mathbf{X}}_0^t$  la  $t^{th}$  réalisation de l'estimateur. Ce dernier est obtenu en déterminant le maximum de vraisemblance de  $p(\mathbf{Z}|\mathbf{M})$ . Concernant la BCRI, elle est obtenue en calculant la trace de  $\mathbf{P}$ .

Pour valider la cohérence de cette dernière, nous la comparons avec l'EQMI pour différent nombre d'observations et différentes valeurs de  $\sigma^2$

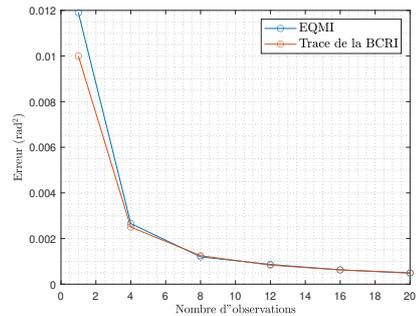


FIGURE 2 : Évolution de l'EQMI et de la BCRI en fonction de  $N$  avec  $\sigma^2 = 0.01^2 \text{rad}^2$  et  $N_{mc} = 500$ .

Sur la figure 2, nous observons que la BCRI proposée est consistante puisqu'elle minore l'EQMI quelle que soit la valeur de  $N$ . De plus, nous remarquons que cette dernière converge rapidement vers la BCRI pour un faible nombre d'observations ( $\simeq 10$ ). Le comportement observé en fonction de la valeur de  $\sigma^2$  est également cohérent. En particulier, l'EQMI converge vers la BCRI pour de faibles valeurs de  $\sigma^2$ . Il est intéressant de noter que l'on retrouve un comportement similaire au cas du modèle gaussien euclidien. Ceci s'explique par le fait que  $SO(2)$  est un espace plat car commutatif.

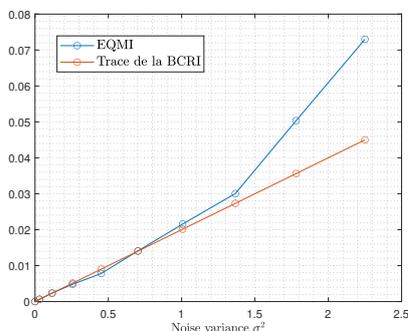


FIGURE 3 : Evolution de l'EQMI et de la BCRI en fonction de  $\sigma^2$  avec  $N = 50$  et  $N_{mc} = 500$ .

## 5 Conclusions

Dans cette communication, nous avons dérivé une borne de Cramér-Rao intrinsèque sur LG s'appliquant à des observations appartenant également à un LG, ce qui généralise les résultats connus dans la littérature. De plus, nous avons obtenu une expression exacte dans le cas d'un modèle gaussien sur GdL avec observations et paramètre vivant sur  $SO(2)$ . La cohérence de la borne proposée a été validée par simulations numériques.

## Remerciements

Ce travail a été partiellement financé par les projets DGA/AID 2022.65.0082 et 2021.65.0070.

## Références

- [1] T. ARAKAWA, T. IBUKIYAMA et M. KANEKO : *Bernoulli numbers and zeta functions*. Springer, 2014.
- [2] T. D. BARFOOT et P.-T. FURGALE : Associating uncertainty with three-dimensional poses for use in estimation problem. *IEEE Transactions On Robotics*, 30:679–693, 2014.
- [3] A. BARRAU et S. BONNABEL : Intrinsic filtering on Lie groups with applications to attitude estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(2):436–449, 2015.
- [4] A. BARRAU et S. BONNABEL : Intrinsic filtering on Lie groups with applications to attitude estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(2):436–449, 2015.
- [5] S. BONNABEL et A. BARRAU : An intrinsic Cramér-Rao bound on  $SO(3)$  for dynamic attitude filtering. *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 2158–2163, 2015.
- [6] S. BONNABEL et A. BARRAU : An intrinsic Cramér-Rao bound on Lie groups. *In International Conference on Networked Geometric Science of Information*, pages 664–672, 2015.
- [7] N. BOUMAL : *Optimization and estimation on manifolds*. Thèse de doctorat, Louvain university, 2014.
- [8] N. BOUMAL, A. SINGER, P.-A. ABSIL et V. D. BLONDELU : Cramér-Rao bounds for synchronization of rotations. *Information and Inference : A Journal of the IMA*, 3:1–39, 2014.
- [9] A. BRELOY, G. GINOLHAC, A. RENAUX et F. BOUCHARD : Intrinsic Cramér-Rao Bounds for Scatter and Shape Matrices Estimation in CES Distributions. *IEEE Sig. Proc. Letters*, 26(2):262–266, 2019.
- [10] M. BROSSARD, S. BONNABEL et A. BARRAU : Invariant Kalman Filtering for Visual Inertial SLAM. *In 21st International Conference on Information Fusion*, Cambridge, United Kingdom, Jul 2018. University of Cambridge.
- [11] G. CHIRIKJIAN : *Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups, Volume 2*, pages 129–154. Jan 2012.
- [12] W. JIANWEI : A completed adaptive de-mixing algorithm on stiefel manifold for ICA. *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 3(9):608 – 610, 2009.
- [13] S. LABSIR, A. GIREMUS, B. YVER et T. BENOUDIBACAMPANINI : An intrinsic posterior Cramér-Rao bound for estimators on matrix Lie groups. *Preprint*, 2021.
- [14] L. LIANG et Y. MING : Joint localization based on split covariance intersection on the Lie group. *IEEE Transactions on Robotics*, 37(5):1508–1524, 2021.
- [15] X. LU : A review of solutions for perspective-n-point problem in camera pose estimation. *Journal of Physics : Conference Series*, 1087:052009, Sep 2018.
- [16] X. PENNEC : Intrinsic statistics on Riemannian manifolds : basic tools for geometric measurements. *J. Math. Imaging and Vision*, 25:127–155, 2006.
- [17] S. SAID, L. BOMBRUN et Y. BERTHOUMIEU : Texture Classification Using Rao's Distance on the Space of Covariance Matrices. *In Geometric Science of Information*, pages 371–378, Paris, France, 2015.
- [18] S. T. SMITH : Covariance, subspace, and intrinsic Cramér-Rao bounds. *IEEE Trans. Signal Process.*, 53:1610–1630, 2005.
- [19] H. SNOUSSI et A. MOHAMMAD-DJAFARI : Particle filtering on manifolds. *In AIP Conference Proceeding*, 2006.
- [20] G. WAHBA : A least squares estimate of satellite attitude. *SIAM Review*, 7(3):409–409, 1965.
- [21] J. ČESIĆ, I. MARKOVIĆ, M. BUKAL et I. PETROVIĆ : Extended information filter on matrix Lie groups. *Automatica*, 82:226–234, 2017.