

Mesure d'incomplétude tomographique pour les géométries de scanner

Matthieu LAURENDEAU^{1,2,3} Laurent DESBAT¹ Frédéric JOLIVET² Guillaume BERNARD² Sébastien GORGES² Simon RIT³

¹Univ. Grenoble Alpes, CNRS, UMR 5525, VetAgro Sup, Grenoble INP, TIMC, 38000 Grenoble, France

²Thales AVS, Moirans, France

³Univ Lyon, INSA-Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, UJM-Saint Étienne, CNRS, Inserm, CREATIS UMR 5220, U1294, F-69373, Lyon, France

Résumé – La nouvelle génération de sources de rayons X basée sur les nanotubes de carbones permet la conception de scanners multi-sources. Les scanners de ce type sont souvent limités par le nombre de sources et de projections. En tomographie, la théorie donne des conditions nécessaires pour une reconstruction stable d'un objet en trois dimensions (3D), acquis à partir d'une trajectoire continue des sources et sans troncation. Dans ce papier, nous définissons une métrique d'incomplétude tomographique réaliste considérant un nombre limité de sources et les contraintes physiques des détecteurs. De plus, nous calculons une carte 3D prédisant la qualité de reconstruction produite par une architecture de scanner. Nous illustrons cette métrique avec un fantôme spécifique dont les images reconstruites correspondent aux résultats prédits par les cartes d'incomplétude tomographique réaliste.

Abstract – The new generation of X-ray sources based on carbon nanotubes enables the design of multi-source computed tomography scanners. Such scanners often use a limited number of stationary sources and projections. In tomography, the theory gives the necessary condition for a stable three dimensional (3D) reconstruction of an object, scanned from a continuous source trajectory and without truncation. In this paper, we define a realistic tomographic incompleteness metric considering a limited number of sources and the physical constraints of the detectors. Moreover, we derive 3D maps predicting the reconstruction quality of a scanner architecture. We illustrate this metric with a dedicated phantom in which the reconstructed images match the results predicted by the realistic tomographic incompleteness map.

1 Introduction

La tomodensitométrie, aussi appelée *computed tomography* (CT) en anglais, est l'une des techniques d'imagerie les plus utilisées pour la reconstruction en trois dimensions (3D) dans les domaines médicaux et industriels. Ces dernières années, de nouvelles sources de rayons X ont été développées basées sur les nanotubes de carbone. Leur petite taille permet la conception de scanners tomographiques bénéficiant à la fois au contrôle non destructif avec des systèmes moins chers et sans contraintes mécaniques de mouvement et aux applications médicales avec des scanners légers et mobiles qui pourraient être emmenés sur les sites d'urgence.

Dans un contexte 3D, les scanners tomographiques peuvent être séparés en deux catégories : les architectures non-stationnaires avec des sources en mouvement et les architectures stationnaires avec des sources fixes. Les architectures non-stationnaires sont les plus communes avec notamment les trajectoires de source hélicoïdales, pour le diagnostic, ou circulaire, pour l'interventionnel avec les scanners *C-arm*. Les micro-sources ont ouvert de nouveaux horizons pour les scanners avec des architectures stationnaires. L'idée est de placer plusieurs sources immobiles autour de la région à scanner. Par exemple, Gonzales *et al.* [2] ont proposé un système stationnaire pour le contrôle de bagages dans les aéroports.

La conception d'une nouvelle géométrie de scanner peut se reposer sur la condition théorique de Tuy [8] permettant de vérifier si une trajectoire source continue permet de reconstruire une région ouverte Ω en supposant que les projections ne sont pas tronquées. La condition peut être énoncée comme suit : *Tous les plans qui coupent la région imagée Ω doivent inter-*

secter la trajectoire source au moins une fois. Par exemple, en ne supposant aucune troncation sur les projections, la trajectoire circulaire continue ne respecte pas la condition de Tuy. En effet, pour un point à reconstruire en dehors du plan de la trajectoire circulaire, un plan passant par ce point et parallèle au cercle n'intersecte pas la trajectoire source. Seule l'intersection du plan de la trajectoire circulaire et de Ω peut être reconstruite. Au contraire, une trajectoire hélicoïdale continue respecte la condition de Tuy et permet d'obtenir une reconstruction stable de toute la région imagée s'il n'y a aucune troncation. En pratique, tous les scanners sont limités par un détecteur de taille finie et par un nombre fini de sources, et la condition de Tuy ne peut pas être satisfaite.

Plusieurs métriques ont été étudiées afin de quantifier l'impact de l'incomplétude tomographique, c.à.d. lorsque les conditions de Tuy ne sont pas satisfaites. En vérifiant les hypothèses de Tuy, avec une trajectoire source continue et un détecteur infini, Liu *et al.* [5] calculent le pourcentage de plans passant par un voxel et coupant la trajectoire parmi un nombre fini de plans échantillonné sur la sphère unité. Les auteurs indiquent qu'il est difficile de prédire la qualité de la reconstruction à partir de leur métrique. En effet, 3% de plans qui ne coupent pas la trajectoire source peut engendrer une reconstruction de plus mauvaise qualité que 6% d'autres plans. Clackdoyle et Noo [1] mesurent l'incomplétude d'un point dans une certaine direction à partir d'une trajectoire discrète de source. Ils ne considèrent aucune troncation dans leurs calculs, équivalent à un détecteur de taille infini. Sun *et al.* [7] s'éloignent des hypothèses de Tuy en ne tenant compte dans son critère que des sources X dont les rayons intersectent la surface du détecteur (de taille finie) pour une trajectoire hélicoïdale.

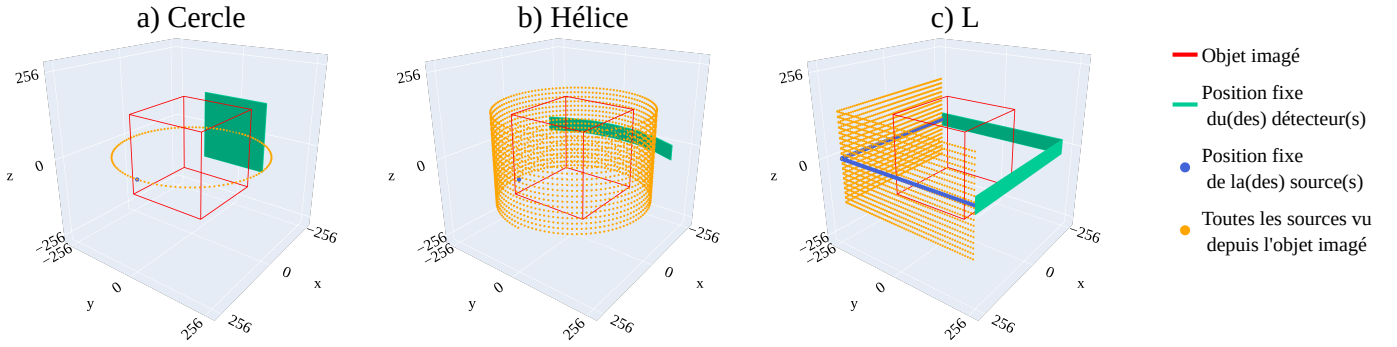


FIGURE 1 : Les trois géométries étudiées avec une représentation à la fois des sources et détecteurs à une position fixe du système et de toutes les sources dans le système de coordonnées de l'objet imagé. a) le Cercle consiste en une source en face d'un détecteur plan en rotation circulaire. L'objet est statique alors qu'il a un mouvement de translation dans la direction Z pour les géométries b) et c). b) est constitué d'un détecteur multi-ligne courbé et le couple source-détecteur tourne autour de l'axe de translation Z ce qui résulte en une trajectoire hélicoïdale. c) a une forme en L avec des sources placées sur deux segments orthogonaux en face de deux détecteurs. Le L n'est plus dans un plan orthogonal à l'axe de translation et se répète en fonction de la vitesse de translation de l'objet.

Notre travail vise à évaluer l'incomplétude tomographique pratique pour concevoir de nouvelles architectures de scanner. Nous nous basons sur notre précédente étude [4] fondée à partir de la métrique [1] en supposant une trajectoire discrète de sources. Nous étendons ce calcul en considérant des détecteurs de taille finie et les collimations source-détecteurs et cherchons la direction la moins complète en chaque point de la région imagée. Nous démontrons l'intérêt de la carte d'incomplétude tomographique réaliste en reconstruisant un fantôme de plusieurs billes pour trois géométries et montrons que la qualité de reconstruction des billes reflète les directions et valeurs d'incomplétude.

2 Méthodologie

2.1 Trajectoires de la source

Les cartes d'incomplétudes sont calculées à partir des positions et des collimations des couples source-détecteur. Nous avons choisi trois géométries de scanner et nous nous intéressons à imagier un objet contenu dans la région Ω , définie comme un cube de 256^3 mm³. La Fig. 1 illustre les trois géométries de scanner : Cercle, Hélice et L.

Le Cercle et l'Hélice sont deux architectures non-stationnaires conventionnelles. Ici, nous nous intéressons à la forme discrète de leurs trajectoires. Elles sont composées d'une source à rayon X en face d'un détecteur en rotation circulaire. Pour l'Hélice, l'objet à imagier translate axialement dans la direction orthogonale au cercle ce qui produit une trajectoire hélicoïdale du point de vue de l'objet. Nous avons choisi un détecteur plan de taille finie (240x240 mm) pour le Cercle et un détecteur multi-ligne courbé (60°x48 mm) pour l'Hélice comme ce qui est fait traditionnellement.

La dernière architecture est stationnaire. La géométrie L est l'une des premières architectures stationnaires commercialisées pour la sûreté aéroportuaire [2]. Il s'agit de plusieurs micro-source X placées sur deux segments perpendiculaires permettant de placer deux détecteurs multi-lignes sur les côtés

opposés (48 mm de hauteur). De même que l'Hélice, l'objet imagé se déplace à travers l'arche ce qui implique que du point de vue de l'objet, le motif de sources est en forme de L oblique, qui se répète selon la vitesse de l'objet.

Afin de comparer les résultats de ces géométries, nous avons choisi de simuler 120 positions de sources pour le Cercle, pour chaque tour complet de l'Hélice et pour les deux segments du L. De même, nous avons choisi un rayon de 240 mm pour les trois trajectoires.

2.2 Incomplétude tomographique réaliste

Clackdoyle et Noo [1] définissent leur métrique d'incomplétude directionnelle locale $I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \in \mathbb{R}^+$ à la position $\mathbf{x} \in \Omega$ et la direction $\mathbf{n} \in S^2$, où S^2 est la sphère unité, pour une trajectoire source $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_l\} \in \mathbb{R}^{3 \times l}$ comme suit

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \min \left\{ \frac{\|\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_i\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|} : i = 1, \dots, l \right\} \quad (1)$$

où $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$ est la projection de la source \mathbf{s}_i sur le plan $\Pi_{\mathbf{x}, \mathbf{n}}$ défini par le point \mathbf{x} et la co-direction \mathbf{n} :

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{s}_i - ((\mathbf{s}_i - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (2)$$

Ce critère évalue la tangente minimum des angles définis par le plan $\Pi_{\mathbf{x}, \mathbf{n}}$ et les rayons X, c.à.d. les lignes passant par le point \mathbf{x} et les points source, comme illustré sur la Fig. 2. Si $I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = 0$, alors le plan contient (au moins) une source. Si $\forall \mathbf{n} \in S^2, I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = 0$, le point \mathbf{x} satisfait la condition de Tuy et peut être reconstruit si les projections acquises ne sont pas tronquées. Au contraire, si $\exists \mathbf{n} \in S^2, I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \neq 0$, le plan $\Pi_{\mathbf{x}, \mathbf{n}}$ ne coupe pas la trajectoire et la condition de Tuy n'est pas satisfaite.

Nous souhaitons rendre cette métrique plus concrète en se rapprochant des hypothèses plus réalistes d'un scanner. Ainsi, comme [7], en plus de considérer une trajectoire discrète de source, nous prenons aussi en compte la taille du détecteur (qui ne sera plus considéré infini), les angles d'ouverture des

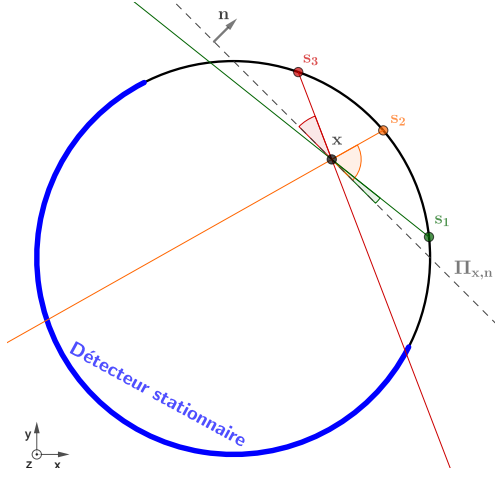


FIGURE 2 : Illustration des deux critères d'incomplétude tomographique I (Eq. 1) et \hat{I} (Eq. 3). Trois points sources stationnaires s_1 , s_2 et s_3 sont sur une trajectoire circulaire en face d'un détecteur fixe schématisé en bleu. Nous évaluons l'incomplétude au point \mathbf{x} et dans la direction \mathbf{n} ; le plan $\Pi_{\mathbf{x},\mathbf{n}}$ est représenté en pointillé et le point de vue de la figure est orthogonal à \mathbf{n} . I cherche le plus petit angle entre le plan $\Pi_{\mathbf{x},\mathbf{n}}$ et l'une des trois sources, ici : s_1 . Cependant, s_1 ne projette pas \mathbf{x} sur le détecteur schématisé en bleu. \hat{I} prend seulement en compte les sources qui permettent de voir le point \mathbf{x} , c.à.d. s_2 et s_3 . Dans ce cas, le résultat du plus petit angle sera celui engendré par le plan $\Pi_{\mathbf{x},\mathbf{n}}$ et la source s_3 .

sources X , les collimations de sources et les grilles d'anti-diffusion des détecteurs. Cela a pour conséquence que certaines sous-régions de Ω ne seront plus visibles à chaque projection. Pour chaque source, nous évaluons si la projection correspondante permet de voir le point \mathbf{x} étudié. Nous notons $m(\mathbf{x}, s_i)$ la valeur binaire suivant que \mathbf{x} est vu ou non par le détecteur illuminé par la source s_i . Si $m(\mathbf{x}, s_i) = 1$, alors s_i permet de voir le point \mathbf{x} et nous pouvons utiliser cette position de source pour la recherche d'incomplétude. Si $m(\mathbf{x}, s_i) = 0$ nous ne prenons pas en compte la source pour le calcul. On définit alors la métrique d'incomplétude réaliste $\hat{I}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \in \mathbb{R}^+$ comme suit :

$$\hat{I}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \min \left\{ \frac{\|s_i - \mathbf{p}_i\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|} : i = 1, \dots, l \mid m(\mathbf{x}, s_i) = 1 \right\}. \quad (3)$$

Le résultat obtenu est supérieur ou égal à celui de l'Eq. 1 puisque la source la plus proche du plan $\Pi_{\mathbf{x},\mathbf{n}}$ peut ne plus être utilisée. La Fig. 2 illustre les deux critères d'incomplétudes I et \hat{I} .

Nous utilisons les Eq. 1 et 3 pour évaluer l'incomplétude tomographique globale d'une région imagée Ω . Puisque nous cherchons à identifier la zone et la direction où il manque le plus d'information, nous calculons les cartes des pires directions $\mathbf{n}_\infty : \Omega \rightarrow S^2$ et des pires directions réalistes $\hat{\mathbf{n}}_\infty : \Omega \rightarrow S^2$:

$$\mathbf{n}_\infty(\mathbf{x}) = \arg \max_{\mathbf{n} \in S^2} I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_\infty(\mathbf{x}) = \arg \max_{\mathbf{n} \in S^2} \hat{I}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (5)$$

et les cartes des valeurs d'incomplétude correspondantes, $I_\infty : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $\hat{I}_\infty : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$I_\infty(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}, \mathbf{n}_\infty(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6)$$

$$\hat{I}_\infty(\mathbf{x}) = \hat{I}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}_\infty(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (7)$$

En pratique, \mathbf{n}_∞ , I_∞ , $\hat{\mathbf{n}}_\infty$ et \hat{I}_∞ sont calculées numériquement sur GPU en discrétisant la sphère unité S^2 et l'espace objet Ω . Un seul hémisphère est suffisant grâce à la symétrie $\Pi_{\mathbf{x},\mathbf{n}} = \Pi_{\mathbf{x},-\mathbf{n}}$. Nous avons échantillonné 6000 directions en utilisant la méthode du treillis de Fibonacci [3] qui place des points le long d'une spirale sphérique de manière homogène (chaque nouveau point est placé au centre du plus grand trou créé par les points précédents).

2.3 Simulation

Afin de vérifier nos cartes d'incomplétude, nous avons simulé un même fantôme pour chacune des trois géométries. Le fantôme est composé de 9^3 billes de rayon de 8 mm placées régulièrement dans le cube Ω . Les images sont reconstruites en utilisant RTK [6] avec une reconstruction itérative des moindres carrés minimisée par gradient conjugué sans régularisation. Nous avons utilisé 99 itérations qui nous semblent visuellement un bon compromis entre convergence et qualité d'image.

3 Résultats

3.1 Cartes d'incomplétude tomographique

La Fig. 3 affiche les résultats des cartes des deux critères d'incomplétude tomographique calculées pour chaque géométrie. Une carte montre la combinaison des résultats des pires directions et des pires valeurs d'incomplétude. À chaque position \mathbf{x} représentée dans la région imagée, les valeurs $I_\infty(\mathbf{x})$ et $\hat{I}_\infty(\mathbf{x})$ et leurs pires directions associées $\mathbf{n}_\infty(\mathbf{x})$ et $\hat{\mathbf{n}}_\infty(\mathbf{x})$ sont illustrées en utilisant respectivement les couleurs et des cônes 3D. Les incomplétudes du Cercle et de l'Hélice confirment la théorie. En effet, en ne considérant aucune troncation, l'incomplétude à l'intérieur de l'enveloppe convexe de la trajectoire source est très faible $\min_{\mathbf{x} \in \Omega} I_\infty(\mathbf{x}) \simeq 0.02$ pour le Cercle et $0.01 \leq I_\infty(\mathbf{x}) \leq 0.02$ pour l'Hélice. Les pires co-directions affichées sont liées à l'échantillonnage des sources le long des trajectoires. L'incomplétude augmente dans les plans qui s'éloignent de celui de la trajectoire circulaire $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} I_\infty(\mathbf{x}) \simeq 0.67$ où les pires directions indiquent bien les plans parallèles au Cercle. Lorsque l'on calcule l'incomplétude tomographique réaliste, avec un détecteur de taille finie, la région extérieure au champ de vue est plus incomplète : $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \hat{I}_\infty(\mathbf{x}) \simeq 2872.68$ pour le Cercle et $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \hat{I}_\infty(\mathbf{x}) \simeq 1.18$ pour l'Hélice. Enfin, comme attendu, la géométrie stationnaire L présente une incomplétude très symétrique. Lorsque l'on considère un détecteur de taille infini, toute la région proche des sources est très peu incomplète $\min_{\mathbf{x} \in \Omega} I_\infty(\mathbf{x}) \simeq 0.01$ et est plus grande à l'opposé $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} I_\infty(\mathbf{x}) \simeq 0.52$. Lorsque les détecteurs ont une taille raisonnable, seule la diagonale de la région imagée, qui est vue par le plus de sources, est peu incomplète $\min_{\mathbf{x} \in \Omega} \hat{I}_\infty(\mathbf{x}) \simeq 0.01$, alors qu'en-dehors de la diagonale,

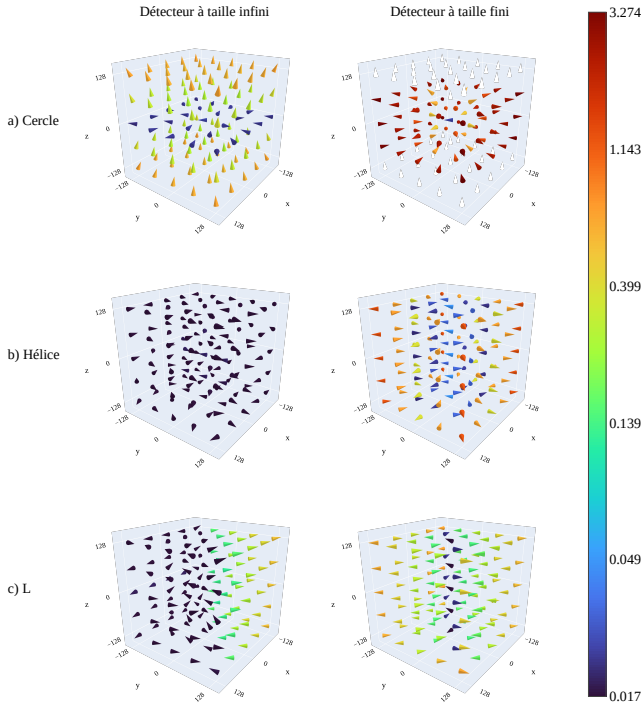


FIGURE 3 : Les deux cartes d'incomplétude tomographique, idéale à gauche et réaliste à droite, pour les trois géométries. Chaque carte montre la région Ω (représentée en rouge dans la Fig. 1). La direction et la couleur de chaque cône représentent respectivement les pires directions \mathbf{n}_∞ et $\hat{\mathbf{n}}_\infty$ et leurs valeurs d'incomplétude I_∞ et \hat{I}_∞ correspondantes. L'échelle des couleurs est logarithmique et le blanc signifie que la position n'est pas scannée par le système.

l'incomplétude augmente $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \hat{I}_\infty(\mathbf{x}) \simeq 13.39$. Les pires directions sont bien les co-directions des plans tangents à l'enveloppe convexe de la trajectoire source. Cela montre qu'une architecture stationnaire, permettant d'engendrer des géométries d'acquisition plus complexes, peut être compétitive par rapport à une architecture non-stationnaire si un nombre de points source équivalent est utilisé.

3.2 Simulation

Les reconstructions des fantômes de billes sont illustrées en Fig. 4 avec les coupes axiales et coronales passant par le centre de Ω . On retrouve bien les billes présentant une très faible incomplétude dans les géométries Cercle et Hélice. Plus les billes sont éloignées du champ de vue, plus la qualité se dégrade confirmant les cartes montrées en Fig. 3. De même, pour la géométrie L, la diagonale du fantôme vue par le plus de sources est mieux reconstruite que les billes éloignées de cette diagonale et la qualité d'image globale est moins bonne que pour l'Hélice qui est généralement plus complète dans la région imagée.

4 Discussion et conclusion

Ce travail définit un critère d'incomplétude tomographique réaliste représenté sur des cartes 3D montrant à chaque position la pire direction et sa valeur associée. Ce critère peut s'appliquer

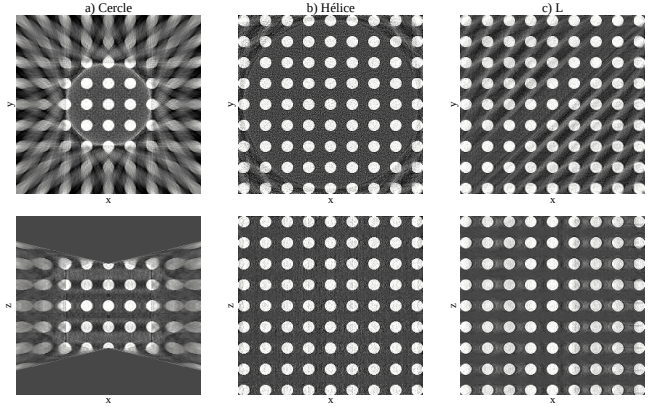


FIGURE 4 : Reconstruction par maximum de vraisemblance (sous hypothèses de bruit gaussien) du même fantôme de 9^3 sphères pour chaque géométrie. Les vues axiales et coronales sont représentées.

à n'importe quelle géométrie de scanner et tient compte des propriétés du système telles qu'un nombre limité de sources, une taille finie de détecteur et les collimations source-détecteur. Bien que nous effectuons une discrétisation de la sphère pour calculer les pires directions, l'incomplétude semble être suffisamment lisse pour que notre échantillonnage homogène avec 6000 points suffise. Les résultats calculés sur trois systèmes montrent que l'incomplétude permet de prédire correctement la qualité de reconstruction d'un fantôme de manière directionnelle et quantitative coïncidant avec la condition théorique de Tuy. Les cartes d'incomplétudes réalistes peuvent être utilisées afin de concevoir de nouvelles géométries compactes avec un nombre de sources limité en minimisant l'incomplétude dans une région scannée.

Références

- [1] Rolf CLACKDOYLE et Frederic NOO : Quantification of tomographic incompleteness in cone-beam reconstruction. 4(1):63–80, janvier 2020.
- [2] Brian GONZALES, Derrek SPRONK, Yuan CHENG, Zheng ZHANG, Xiaochuan PAN, Moritz BECKMANN, Otto ZHOU et Jianping LU : Rectangular computed tomography using a stationary array of CNT emitters : initial experimental results. In Robert M. NISHIKAWA et Bruce R. WHITING, éditeurs : *Medical Imaging 2013 : Physics of Medical Imaging*. SPIE, mar 2013.
- [3] Alvaro GONZALEZ : Measurement of areas on a sphere using fibonacci and latitude–longitude lattices. *Mathematical Geosciences*, 42(1):49–64, nov 2009.
- [4] Matthieu LAURENDEAU, Laurent DESBAT, Guillaume BERNARD, Frédéric JOLIVET, Sébastien GORGES, Fanny MORIN, et Simon RIT : Three-dimensional maps of the tomographic incompleteness of cone-beam ct scanner geometries. 2023 (**accepted**).
- [5] Baodong LIU, James BENNETT, Ge WANG, Bruno De MAN, Kai ZENG, Zhye YIN, Paul FITZGERALD et Hengyong YU : Completeness map evaluation demonstrated with candidate next-generation cardiac CT architectures. *Medical Physics*, 39(5): 2405–2416, apr 2012.
- [6] S RIT, M Vila OLIVA, S BROUSMICHE, R LABARBE, D SARRUT et G C SHARP : The reconstruction toolkit (RTK), an open-source cone-beam CT reconstruction toolkit based on the insight toolkit (ITK). *Journal of Physics : Conference Series*, 489:012079, mar 2014.
- [7] Tao SUN, Rolf CLACKDOYLE, Jung-Ha KIM, Roger FULTON et Johan NUYTS : Estimation of local data-insufficiency in motion-corrected helical CT. *IEEE Transactions on Radiation and Plasma Medical Sciences*, 1(4):346–357, jul 2017.
- [8] Heang K. TUY : An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 43(3):546–552, juin 1983.