

Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique

Nicolas LE BIHAN¹ Julien FLAMANT² Pierre-Olivier AMBLARD¹

¹CNRS, Univ. Grenoble Alpes, Grenoble INP, GIPSA-lab, 38000 Grenoble France

²Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy, France

Résumé – Cet article présente un modèle de signal bivarié paramétrique basé sur la solution d’une équation de type Schrödinger pour un système couplé à deux niveaux. Nous montrons la pertinence de la formulation quaternionique de la solution, de par sa capacité à rendre compte de l’évolution de son état de polarisation au cours du temps. L’existence d’une fréquence d’oscillation périodique entre deux états de polarisation est mise en évidence pour le signal bivarié considéré, qui est connue en physique sous le nom de fréquence de Rabi. Une phase géométrique de Berry-Pancharatnam est également prédite pour ce modèle de signaux bivariés. La richesse de ce modèle de signal est démontrée sur simulations numériques et la potentielle utilisation de la phase géométrique pour la détection de précession des ondes gravitationnelles est présentée sur des simulations réalistes.

Abstract – This paper presents a parametric bivariate signal model based on the solution of a Schrödinger-type equation for a coupled two-level system. We show the relevance of the quaternionic formulation of the solution, due to its ability to account for the evolution of its polarisation state over time. The existence of a periodic oscillation frequency between two polarisation states is demonstrated for the bivariate signal considered, which is known in physics as the Rabi frequency. A geometric Berry-Pancharatnam phase is also predicted for this bivariate signal model. The richness of this signal model is demonstrated on numerical simulations and the potential use of the geometric phase for the detection of gravitational wave precession is presented on realistic simulations.

Propos liminaire. Ce papier constitue un des deux états d’une contribution bivariée au GRETSI. Il est couplé à son état compagnon [1]. Ces deux articles peuvent être lus indépendamment l’un de l’autre, chacun dans son état propre.

1 Introduction

Les signaux bivariés sont d’un intérêt particulier dans de nombreuses applications, incluant les signaux acoustiques ou océaniques [2], optiques [3] ou gravitationnels [4]. Dans certaines de ces applications, il peut être pertinent de posséder un modèle paramétrique de signal bivarié à des fins de détection ou d’estimation. Cet article explore un modèle paramétrique particulier qui possède des propriétés de polarisation originales. Nous nous intéressons au cas où le signal bivarié est solution de l’équation de Schrödinger sur \mathbb{C}^2 , avec un couplage entre les deux états du système. L’hamiltonien est celui d’un système à deux niveaux, pouvant être obtenu par des analogies mécaniques à base d’oscillateurs harmoniques couplés étudiés dans [1]. Une formulation quaternionique de l’équation et de sa solution permet de comprendre le comportement géométrique du signal bivarié complexe obtenu. En particulier, les paramètres de Stokes montrent un effet de précession de l’état de polarisation initial autour d’un axe contrôlé par l’hamiltonien de l’équation de Schrödinger. Cette variation temporelle de l’état de polarisation du signal est périodique et correspond à un phénomène de battement bien connu en physique des systèmes couplés : la fréquence de Rabi [5], [6]. La conséquence est l’apparition sur le signal bivarié d’une *modulation de polarisation* consistant en une oscillation périodique entre deux états de polarisation complètement déterminés par

l’état initial du signal et les paramètres de l’équation. Nous illustrons enfin l’apparition d’une phase géométrique, de type Pancharatnam-Berry, conséquence de la nature géométrique des signaux bivariés. Cette phase ne dépend que du chemin tracé par le signal dans son espace d’état (les paramètres de Stokes et la sphère de Poincaré). Elle permet ainsi la détection d’une modulation de polarisation, dont la pertinence est illustrée par un exemple réaliste d’onde gravitationnelle.

Quaternions \mathbb{H} . Un quaternion $q \in \mathbb{H}$ s’écrit sous forme cartésienne : $q = a + ib + jc + kd$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et i, j, k des imaginaires purs tels que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. La multiplication entre quaternions est non commutative puisque $ij = -ji$. On note \mathbb{H}_0 l’ensemble des quaternions *purs* tels que $a = 0$. Le conjugué \bar{q} de q est $q = a - ib - jc - kd$. Son module $|q|$ est $|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Un quaternion q tel que $|q| = 1$ est dit *unitaire*. L’inverse de $q \in \mathbb{H}$ est noté q^{-1} tel que $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$. La forme polaire de q est $q = |q| \exp(\mu_q \Phi_q) = |q| (\cos \Phi_q + \mu_q \sin \Phi_q)$, avec $\mu_q \in \mathbb{H}_0$ l’axe tel que $\mu_q^2 = -1$ et $\Phi_q \in [0, 2\pi)$ l’angle. Étant donné un quaternion pur $p \in \mathbb{H}_0$ (i.e. un vecteur de \mathbb{R}^3), et un quaternion $q \in \mathbb{H}$ unitaire donné par $q = e^{\mu_q \Phi_q}$, alors le quaternion qpq^{-1} est la rotation 3D d’angle $2\Phi_q$ de p autour de μ_q (l’axe de rotation dans \mathbb{R}^3). On note enfin $\mathbb{C}_j = \mathbb{R} \oplus j\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ le sous-ensemble isomorphe à \mathbb{C} .

Signaux bivariés. Un signal bivarié est défini par ses deux composantes $x_1(t), x_2(t)$ que l’on supposera analytiques et à valeurs dans \mathbb{C}_j^2 . Ainsi un signal bivarié peut être représenté comme le signal vectoriel $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^\top \in \mathbb{C}_j^2$ ou le signal scalaire $x(t) = x_1(t) + ix_2(t) \in \mathbb{H}$, les deux représentations étant équivalentes par isomorphisme entre \mathbb{C}_j^2 et \mathbb{H} . La

Travail soutenu par le projet ANR RICOCHET n° ANR-21-CE48-0013.

représentation quaternionique permet de généraliser la notion de phase et amplitude instantanée au cas des signaux bivariés. Ainsi le signal $x(t) \in \mathbb{H}$ peut s'écrire sous la forme polaire [7]

$$x(t) = a(t)e^{i\theta(t)}e^{-\mathbf{k}\chi(t)}e^{j\phi(t)} \quad (1)$$

où $a(t)$ et $\phi(t)$ sont les paramètres classique d'amplitude et de phase, et où $\theta(t)$ et $\chi(t)$ sont les paramètres d'orientation et d'ellipticité (forme) de l'ellipse de polarisation instantanée décrite par le signal bivarié d'origine $[\text{Re } x_1(t), \text{Re } x_2(t)]^T$ (i.e., avant calcul du signal analytique).

2 Modèle de signal bivarié

Equation de Schrödinger complexe. On s'intéresse au cas où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}_j^2$ est solution de l'équation de Schrödinger définie pour un système quantique à deux niveaux [6]

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{matrix} j(\omega_0 + \Delta) & -\bar{\kappa} \\ \kappa & j(\omega_0 - \Delta) \end{matrix} \mathbf{x}(t) := \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

avec $\omega_0 \in \mathbb{R}$ une pulsation, $\Delta \in \mathbb{R}$ le désaccordage fréquentiel et $\kappa = \text{Re } \kappa + j \text{Im } \kappa \in \mathbb{C}_j$ le couplage entre les deux composantes. Pour κ imaginaire pur, on retrouve l'expression du papier compagnon [1, Eq. (15)] en l'absence d'amortissement. La matrice \mathbf{H} peut être décomposée comme :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 = \begin{matrix} j\omega_0 & 0 \\ 0 & j\omega_0 \end{matrix} + \begin{matrix} j\Delta & -\bar{\kappa} \\ \kappa & -j\Delta \end{matrix} \quad (3)$$

avec \mathbf{H}_0 la matrice correspondant à la partie *isotrope* et \mathbf{H}_1 contenant l'interaction entre les deux états du système. On observe que \mathbf{H}_1 est de la forme $\frac{a}{b} \frac{-\bar{b}}{a}$ avec $a, b \in \mathbb{C}_j$. Cette forme *adjointe* du quaternion $a + ib \in \mathbb{H}$ ($a, b \in \mathbb{C}_j$) permet d'identifier \mathbb{H} avec $\mathbb{C}_j^{2 \times 2}$ muni de la multiplication matricielle usuelle. Cette correspondance permet d'envisager une écriture et une interprétation quaternionique de l'équation (2).

Formulation quaternionique. On montre à présent qu'il est possible de réécrire (2) dans \mathbb{H} grâce à la correspondance $\mathbf{x}(t) \leftrightarrow x(t)$. Cette représentation algébrique a deux avantages : *i*) elle permet d'obtenir directement la solution de l'équation de Schrödinger et *ii*) elle éclaire les nombreuses interprétations géométriques et physiques de cette solution. En utilisant $2x_1(t) = x(t) - jx(t)j$ et $2ix_2(t) = x(t) + jx(t)j$, on obtient l'équation de Schrödinger quaternionique

$$\dot{x}(t) = x(t)\omega_0j + \underbrace{\mu\Omega x(t)}_{\text{géométrie}} \quad (4)$$

où l'on a posé $\mu\Omega = j\Delta + i\kappa \in \mathbb{H}_0$ tel que

$$\mu = \frac{i \text{Re } \kappa + j\Delta + \mathbf{k} \text{Im } \kappa}{\Delta^2 + |\kappa|^2}, \quad (5)$$

$$\Omega = \frac{\rho}{\Delta^2 + |\kappa|^2}.$$

L'équation (4) permet alors de chercher la solution $x(t)$ sous la forme $x(t) = \alpha(t)e^{j\omega_0 t}$, avec $\alpha(t) \in \mathbb{H}$. En injectant $x(t)$ dans (4), on obtient l'équation différentielle quaternionique du premier ordre à coefficients constants $\dot{\alpha}(t) = \mu\Omega \alpha(t)$. La solution est donc de la forme $\alpha(t) = e^{\mu\Omega t}x_0$, avec $x_0 := x(0) \in \mathbb{H}$ la valeur initiale. La solution de l'équation de Schrödinger quaternionique (4) est enfin donnée par :

$$x(t) = e^{\mu\Omega t}x_0e^{j\omega_0 t}. \quad (6)$$

Interprétation. L'évolution temporelle de la solution (6) montre un comportement relativement simple, pouvant être rapproché de la forme générale (1) d'un signal bivarié AM-FM. L'état initial x_0 est multiplié à droite au cours du temps par un terme $\exp(j\omega_0 t)$ qui s'interprète comme la porteuse haute-fréquence du signal. À l'inverse, l'état initial est multiplié à gauche par $\exp(\mu\Omega t)$ qui est directement liée à la partie \mathbf{H}_1 dans (3) et induisant une modulation des paramètres de polarisation instantanés $\theta(t)$ et $\chi(t)$ dans (1).

Par ailleurs, si le terme de couplage $\kappa \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow j\Delta$ de sorte que la solution (6) devient $x(t) = e^{j\Delta t}x_0e^{j\omega_0 t}$. En écrivant $x_0 = x_{01} + ix_{02}$ avec $x_{01}, x_{02} \in \mathbb{C}_j$ on obtient

$$x(t) = |x_{01}|e^{j(\omega_0 + \Delta)t + j \arg x_{01}} + i|x_{02}|e^{j(\omega_0 - \Delta)t + j \arg x_{02}},$$

i.e., $x(t)$ s'écrit comme la somme de deux fréquences pures à $\omega_0 \pm \Delta$ et de polarisation constantes et orthogonales, respectivement linéaires horizontale ($\theta = \chi = 0$) et verticale ($\chi = 0, \theta = \pi/2$), cf. (1). On note enfin également qu'en l'absence d'interaction (i.e. $\mathbf{H}_1 = 0$), on a $\Omega = 0$ et donc $x(t) = x_0 \exp(j\omega_0 t)$. C'est un signal de polarisation constante, complètement définie par x_0 . Dans le cas général où $\kappa, \Delta \neq 0$, la compréhension des propriétés de polarisation de $x(t)$ est mise en lumière en considérant les paramètres de Stokes instantanés [7] du signal $x(t)$.

3 Paramètres de Stokes instantanés et fréquence de Rabi

Paramètres de Stokes La description du comportement en polarisation d'un signal $x(t) \in \mathbb{H}$ au cours du temps peut se faire via l'étude de l'évolution de quantités d'ordre deux [7] connues sous le nom de paramètres de Stokes. Le premier paramètre de Stokes $S_0(t)$ est une quantité exclusivement énergétique (réelle positive) et s'interprète comme l'énergie instantanée du signal $x(t)$, i.e.,

$$S_0(t) = |x(t)|^2. \quad (7)$$

La seconde quantité est le *quaternion pur* $\mathbb{S}(t) \in \mathbb{H}_0$ formé des trois autres paramètres de Stokes :

$$\mathbb{S}(t) = iS_3(t) + jS_1(t) + \mathbf{k}S_2(t) = x(t)j\overline{x(t)}, \quad (8)$$

qui décrit l'état de polarisation instantané du signal $x(t)$. Comme $|\mathbb{S}(t)| = S_0(t)$ le vecteur de Stokes normalisé $\mathbb{S}(t)/S_0(t)$ s'interprète comme un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 vivant sur une sphère appelée sphère de Poincaré¹ [3].

Modulation de polarisation à la Rabi De retour à la solution (6) de l'équation de Schrödinger (4), on obtient

$$\begin{matrix} S_0(t) = |x_0|^2, \\ \mathbb{S}(t) = e^{\mu\Omega t}x_0j\overline{x_0}e^{-\mu\Omega t} \end{matrix} \quad (9)$$

L'amplitude $S_0(t)$ dans (9) est constante : c'est l'amplitude de l'état initial du signal en $t = 0$. C'est une conséquence

¹La sphère de Poincaré établit la relation entre les angles θ, χ de (1) et les paramètres de Stokes normalisés, ces derniers définissant les coordonnées cartésiennes du point de coordonnées sphériques $(2\theta, 2\chi)$.

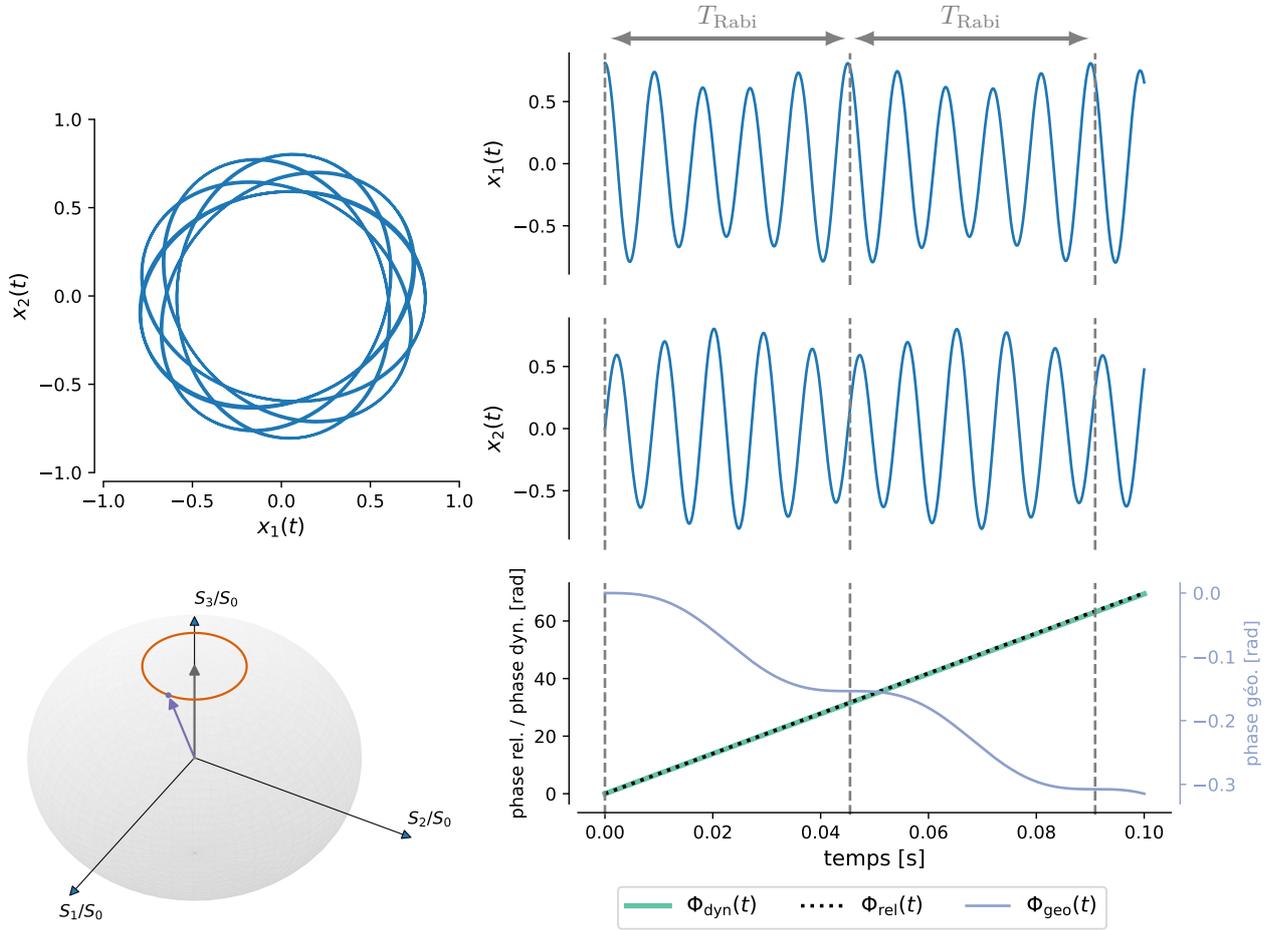


FIGURE 1 : Exemple de signal bivarié modulé en polarisation généré par (6). Ici, l'axe de rotation est $\mu = i$ (i.e., suivant S_3/S_0) et l'état initial est choisi tel que $x_0 = \exp(-k\pi/5)$. Le signal $x(t)$ décrit un parcours cyclique sur la sphère de Poincaré de période T_{Rabi} , ce qui génère l'apparition d'une phase géométrique, dont la valeur évolue au cours des cycles.

du caractère conservatif de l'équation de Schrödinger (4). La partie "vectorielle" $\mathbb{S}(t)$ en (9) s'interprète directement comme la rotation au cours du temps de l'état de polarisation initial $x_0 \mathbf{j} \bar{x}_0 \in \mathbb{H}_0$. En effet, en notant $\mathbb{S}(0) = x_0 \mathbf{j} \bar{x}_0$, l'équation (9) devient $\mathbb{S}(t) = e^{\mu \Omega t} \mathbb{S}(0) e^{-\mu \Omega t}$. Autrement dit, $\mathbb{S}(t)$ est donné par rotation de l'état de polarisation initial $\mathbb{S}(0)$ autour de l'axe μ et d'angle $2\Omega t$, parcours qui peut être visualisé sur la sphère de Poincaré en Fig. 1. L'état de polarisation $\mathbb{S}(t)$ présente ainsi une périodicité $T_{\text{Rabi}} = \pi/\Omega$. Ce phénomène est connu en physique sous le nom de *fréquence ou d'oscillations de Rabi* dans le cadre de l'étude de systèmes à deux niveaux et particules de spin 1/2 [6, Chap. IV]. La Fig. 1 permet de visualiser l'effet de la modulation de polarisation sur les traces temporelles des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, ainsi que l'évolution de la trace dans le plan 2D. Le même état de polarisation est retrouvé au bout d'une période T_{Rabi} (lignes pointillées). Un léger décalage de phase peut être perçu : c'est l'objet de la section suivante.

4 Phase de Pancharatnam-Berry

L'évolution de l'état de polarisation du signal $x(t)$ au cours du temps entraîne l'apparition d'une *phase géométrique* de type Pancharatnam-Berry [3], [8]. Cette phase est une conséquence du chemin continu parcouru par $\mathbb{S}(t)$ sur la sphère de Poincaré.

Suivant un raisonnement identique à [9], on peut montrer cette phase $\Phi_{\text{geo}}(t)$ dépend du temps et est cumulative, et vient se rajouter à la phase "dynamique" classique (i.e. une multiplication à droite de $x(t)$ par $\exp(j\Phi_{\text{geo}})$). Après m rotations autour de l'axe μ , le signal $x(t)$ aura accumulé une phase de $m\Phi_{\text{geo}}(T_{\text{Rabi}})$, où la valeur de $\Phi_{\text{geo}}(T_{\text{Rabi}})$ est la moitié de l'aire entourée sur la sphère de Poincaré au cours du temps, i.e. la calotte sphérique sous-tendue par les vecteur μ et $\mathbb{S}(0)$ pour le signal $x(t)$, voir Fig. 1.

D'un point de vue pratique, la phase géométrique peut se calculer comme la différence entre la *phase relative* $\Phi_{\text{rel}}(t)$ et la *phase dynamique* $\Phi_{\text{dyn}}(t)$, définies dans \mathbb{C}_j^2 et \mathbb{H} par

$$\Phi_{\text{rel}}(t) = \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) \rangle_{\mathbb{C}^2} = -\arctan \frac{\text{Re } x(t) \mathbf{j} \overline{x(0)}}{\text{Re } x(t) x(0)},$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$ le produit scalaire sur \mathbb{C}^2 et

$$\Phi_{\text{dyn}}(t) = \int_0^t \omega_{\mathbf{x}}(u) du, \quad (10)$$

où $\omega_{\mathbf{x}}(t)$ est le moment instantané du signal vectoriel $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^2$ donné par :

$$\omega_{\mathbf{x}}(t) = \frac{\text{Im} \langle \mathbf{x}(t), d\mathbf{x}/dt \rangle_{\mathbb{C}^2}}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} = -\frac{\text{Re } x(t) \mathbf{j} \overline{(dx/dt)}}{|x_0|^2}. \quad (11)$$

