

La probabilité d’erreur binaire d’un système de communication à modulation d’amplitude très haut débit en présence de gigue.

Paul MIQUEU^{1,2}, Fabrice BELVÈZE², Jean-Marc BROSSIER¹, Laurent ROS¹

¹Laboratoire Gipsa-lab
11 rue des mathématiques, 38400 Saint Martin d’Hères, France

²ST microélectronics
12 rue Jules Horowitz, 38000 Grenoble, France
paul.miqueu@grenoble-inp.fr, fabrice.belveze@st.com
jean-marc.brossier@grenoble-inp.fr, laurent.ros@grenoble-inp.fr

Résumé – Nous proposons une expression analytique des Probabilités d’Erreur Binaire (PEB) en présence de gigue et de bruit thermique qui affectent une liaison Serializer/Deserializer (SerDes) très haut débit. Nous obtenons la limite théorique supérieure de PEB pour une modulation Pulse Amplitude Modulation (PAM) en fonction du rapport E_b/N_0 , de la variance de la gigue et de l’ordre de modulation. Nous démontrons la pertinence de la PEB théorique en la comparant à des Taux d’Erreur Binaire (TEB), résultats de simulation. La particularité du système réside dans le débit d’information très élevé, de l’ordre de la centaine de Gbps, qui interdit la présence de filtre adapté en réception.

Abstract – We give the analytical expression of the binary error rate (BER) for Pulse Amplitude Modulation of a high speed SerDes link considering two kinds of disturbance, the thermal noise and the jitter. Reliability of the analytical expression is proven by comparing theoretical and practical results. We get a BER upper limit for the system considering the E_b/N_0 ratio, the jitter power and the modulation order. The high data rate prevents the use of a matched filter at the reception making this calculus different from the state of the art.

1 Introduction

Les liaisons SerDes sont un type de liaisons filaires haut débit très répandu dans les circuits microélectroniques. Via le passage parallèle/série et série/parallèle de la donnée entre deux circuits microélectroniques, elles permettent l’économie du nombre de fils employés, l’économie de la place occupée par les fils en parallèle et la réduction des interférences électro-magnétiques entre fils parallèles. Dans le contexte d’accroissement des débits d’information qui concerne tout secteur technologique, les liaisons SerDes haut débit font l’objet de nombreuses études. L’une d’entre elles concerne le choix de l’ordre de modulation, lorsque le système emploie une modulation PAM, ce qui est le cas de la majorité des liaisons SerDes. En effet, accroître l’ordre de modulation de la PAM revient à accroître la résistance du système à une nuisance propre aux liaisons SerDes, la gigue, mais aussi à le rendre plus vulnérable au bruit thermique. Un compromis est à trouver en fonction des paramètres physiques du système tels que le rapport E_b/N_0 de fonctionnement nominal et la variance de la gigue dépendant des oscillateurs utilisés pour concevoir le système. Nous proposons donc une expression analytique de la PEB d’un système en considérant un canal parfait (pas d’interférences entre symboles (IES)) pour avoir une

idée des performances du système pour différents ordres de PAM. L’application visée est un système de communication à débit binaire fixé, de l’ordre de la centaine de GHz, avec des cadences d’horloges telles que l’émission et la réception des symboles de part et d’autre du canal sont soumises à la gigue et la réception se fait sans filtre adapté. C’est ce contexte qui rend le problème différent du cas d’école déjà traité dans [1], par exemple, et justifie un calcul de PEB nouveau à notre connaissance.

Nous présentons dans la partie 2 le modèle de la chaîne de communication que nous considérons. Dans la partie 3, nous présentons les modèles de bruit thermique et de gigue ainsi que les expressions analytiques des PEB qui leur sont associées pour un système sans filtre adapté. Dans la partie 4, nous comparons les résultats prédits par le modèle analytique avec les résultats issus de la simulation. Nous utilisons cette limite pour justifier le choix de l’ordre de modulation en fonction du rapport E_b/N_0 et de l’écart type de la gigue. Enfin, nous concluons dans la partie 5.

2 Modèle du système

Nous considérons le système de communication proposé sur la figure 1. L’information à transmettre est une

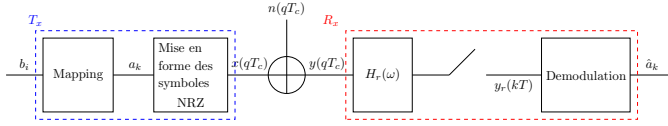


FIGURE 1 – Chaîne de simulation d'une liaison SerDes.

séquence de bits b_i , émis à un débit binaire fixé $D_b = 1/T_b$. Ils sont regroupés en mots de $\log_2(M)$ bits pour une modulation PAM- M . Chaque mot est associé à une valeur sans unité, prise sur la plage $\llbracket -(M-1), M-1 \rrbracket$, maintenue sur la période $T = \log_2(M)T_b$. Il en résulte un signal Non Return to Zero continu $x(t)$ illustré en trait plein sur la figure 2 pour une modulation PAM-4. Dans cette étude, nous comparons les résultats de simulation issus d'une implémentation numérique avec la formule analytique des performances du système simulé. Nous nous plaçons donc dans un contexte de simulation numérique du système où $x(t)$ est représenté par un signal discret composé de F_{osr} échantillons par période binaire. Ce signal discret est représenté par les points noirs sur la figure 2 et s'écrit $\{x(qT_c), q \in \mathbb{Z}\}$ avec $T_c = T_b/F_{osr}$. La bande de fréquence unilatérale B sur laquelle nous considérons la simulation a une largeur de $B = 1/2T_c$. Le Bruit Blanc Additif Gaussien (BBAG) $n(t)$ a une puissance dans la bande de simulation $\sigma_n^2 = N_0B$ avec N_0 la densité spectrale de puissance monolatérale du bruit thermique. Le signal $y(t)$ bruité entre dans le bloc de réception R_x où il est limité en bande par le filtre de spectre $H_r(\omega)$. Le filtre de réponse fréquentielle $H_r(\omega)$ et de réponse temporelle $h_r(t)$ est un passe bas idéal de gain 1 et de largeur $B_{Rx} = \frac{\alpha}{2T_b}$. La limitation de bande simule le caractère passe bas des composants du système réel et limite la puissance du bruit thermique à une valeur finie. Meilleurs sont les composants, plus large est B_{Rx} et moins sont déformées les formes d'ondes lors de leur passage dans le filtre H_r (mais plus importante est la part de bruit thermique intégrée). Dans notre simulation, le filtre limiteur est implémenté grâce à la fonction matlab fir1 en s'assurant que la bande équivalente de bruit du filtre ainsi généré est égale à B_{Rx} . Le système est défini par les équations suivantes :

$$y(t) = x(t) + n(t) \quad (1a)$$

$$y_r(t) = h_r(t) * [x(t) + n(t)] \quad (1b)$$

$$y_r(t) = x_r(t) + b(t) \quad (1c)$$

Après passage dans le filtre limiteur, le signal x_r est, au minimum, sous-échantillonné à un échantillon par temps symbole avant de passer dans le bloc de démodulation.

Maintenant que nous avons introduit le modèle de la chaîne de communication, nous présentons le modèle des bruits qui dégradent ses performances et les PEB qui en découlent.

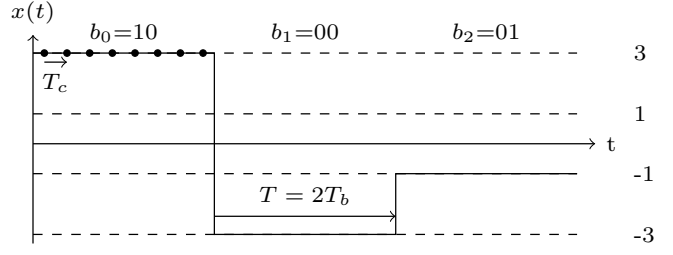


FIGURE 2 – Signal idéal PAM-4 avec $F_{osr} = 4$

3 Expressions analytiques des PEB liés au BBAG et à la gigue.

PEB lié au bruit thermique On suppose que la constellation PAM est constituée de M niveaux homogènement répartis sur la plage $\llbracket -(M-1), M-1 \rrbracket$. La puissance moyenne des symboles centrés s'écrit :

$$\sigma_a^2 = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M/2} (2m-1)^2 = \frac{M^2-1}{3} \quad (2)$$

La durée binaire étant fixée à T_b , on a : $E_b = \sigma_a^2 T_b$ avec E_b l'énergie par bit. Après le filtre en réception, le BBAG a une puissance $\sigma_b^2 = N_0 B_{Rx} = \frac{\alpha N_0}{2T_b}$. Le bruit thermique étant stationnaire :

- Sa puissance est la même que nous considérons $b(t)$ ou sa version sous-échantillonnée
- Le calcul de la probabilité d'erreur ne dépend pas du temps et l'amplitude du bruit thermique est notée b .

Il y a erreur, à la détection, lorsque l'amplitude du signal bruité franchit la limite supérieure ou inférieure associées à un niveau de modulation. Pour le premier niveau du dictionnaire, $a_1 = -M+1$ (respectivement, le dernier niveau $a_M = M-1$), il y a erreur si le niveau du bruit thermique b est supérieur à 1, la limite supérieure (respectivement inférieur à -1, la limite inférieure) à l'instant d'échantillonnage. Pour ces niveaux, la probabilité d'erreur s'exprime comme :

$$\begin{aligned} P_{th,a_1}(b > 1) &= P_{th,a_M}(b < -1) = Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) \\ P_{th,a_1}(b > 1) &= Q\left(\sqrt{\frac{2T_b}{\alpha N_0}}\right) \\ P_{th,a_1}(b > 1) &= Q\left(\sqrt{\frac{6}{\alpha(M^2-1)} \frac{E_b}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

avec $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-\frac{t^2}{2}) dt$. Pour les autres niveaux, $P_{th,a_m}(|b| > 1) = 2P_{th,a_1}(b > 1)$ avec $m \in \llbracket 2, M-1 \rrbracket$. Au final la probabilité d'erreur symbole moyenne s'écrit :

$$P_{th} = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6}{\alpha(M^2-1)} \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (4)$$

Afin d'établir la probabilité d'erreur binaire, nous supposons que la modulation suit un codage de Gray puis nous approximations la probabilité d'erreur binaire via la probabilité d'erreur symbole. Finalement, la PEB s'écrit :

$$PEB_{th} = \frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} Q \left(\sqrt{\frac{6}{\alpha(M^2-1)} \frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (5)$$

Lorsque $\alpha = 1/\log_2(M)$, nous retombons bien sur le résultat de la théorie lorsque il n'y a pas d'IES et lorsque le récepteur est muni d'un filtre adapté avec échantillonnage d'un point par symbole [1] :

$$PEB_{th} = \frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} Q \left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1} \frac{E_s}{N_0}} \right)$$

PEB liée à la gigue La gigue est un bruit causé par la précision finie des oscillateurs qui contrôlent, à l'émission, l'envoi des formes d'ondes dans le canal et, à la réception, leur échantillonnage. A noter que le signal a déjà bénéficié d'une récupération de rythme, qui a compensé les composantes prédictibles basses fréquences de la gigue. Nous considérons donc seulement un bruit de gigue blanc et gaussien qui est le problème prédominant dans un contexte très haut débit [2].

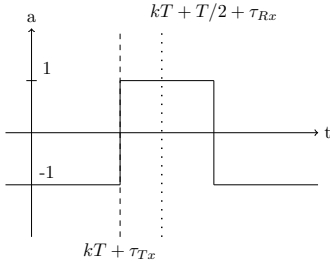


FIGURE 3 – Représentation des gignes d'émission en tirets et de réception en pointillés.

En considérant le schéma 3, l'échantillonnage a lieu trop tôt lorsque $kT + T/2 + \tau_{Rx} < kT + \tau_{Tx}$ ce qui est équivalent à $\tau_{Tx} - \tau_{Rx} > T/2$ avec τ_{Tx} la gigue à l'émission et τ_{Rx} la gigue à la réception. Le problème se rapporte donc à une inégalité entre une variable aléatoire, différence de variables aléatoires gaussiennes indépendantes de puissances respectives σ_{Tx}^2 et σ_{Rx}^2 , et $T/2$. On en déduit que la variable aléatoire $\tau_{Tx} - \tau_{Rx}$ est une gaussienne de variance $\sigma_g^2 = \sigma_{Tx}^2 + \sigma_{Rx}^2$. Le problème est exactement le même lorsque l'on échantillonne trop tard et est à l'origine du coefficient 2 dans l'équation 6. La probabilité d'échantillonner au mauvais endroit, en tenant compte de la gigue à T_X et à R_X , se calcule ainsi :

$$P_g = 2Q \left(\frac{T}{2\sqrt{\sigma_g^2}} \right) \quad (6)$$

Le symbole d'intérêt et son voisin étant indépendants, échantillonner au mauvais endroit, c'est considérer un symbole au hasard dans le dictionnaire. Le nombre moyen de

bits différents entre deux mots de M bits vaut $\sum_{k=1}^M P_{diff}$ avec P_{diff} la probabilité qu'un bit du mot aléatoire soit différent du bit correspondant dans le mot d'intérêt. Avec $P_{diff} = 1/2$ car un bit ne peut prendre que deux valeurs et que les mots sont indépendants. La probabilité d'erreur binaire sachant que l'on échantillonne au mauvais endroit, calculée comme le rapport entre le nombre moyen de bits erronés sur le nombre total de bits pas symbole, vaut $1/2$. Au final, la PEB s'écrit comme :

$$PEB_g = \frac{1}{2} P_g = Q \left(\frac{T}{2\sqrt{\sigma_g^2}} \right) \quad (7)$$

La PEB liée à la gigue ne dépend pas du rapport E_b/N_0 et constitue un plancher de probabilité d'erreur et un plafond de performance.

PEB issu des deux bruits Lorsque nous considérons l'ensemble du système, les deux bruits sont combinés. Afin d'exprimer la PEB totale, nous considérons la PEB lorsque l'échantillonnage est réalisé au bon endroit d'une part et lorsqu'il ne l'est pas d'autre part. On donne à chaque événement un nom afin de mettre les conditions d'erreur sous forme d'équation.

- EB : "erreur de décision au niveau binaire"
- EG : "erreur d'échantillonnage due à la gigue"

avec \overline{EB} et \overline{EG} leurs complémentaires, nous pouvons écrire la PEB comme :

$$PEB = P(EB|\overline{EG})P(\overline{EG}) + P(EB|EG)P(EG) \quad (8)$$

$$PEB = PEB_{th} \times (1 - P_g) + \frac{1}{2} P_g$$

Maintenant que nous avons exprimé la PEB théorique fonction du rapport E_b/N_0 , de σ_g et de M , nous démontrons sa pertinence en la comparant aux résultats de simulation. En effet, nous anticipons des différences entre simulation et théorie car nous avons approximé la PEB liée au bruit thermique via la probabilité d'erreur symbole dans le contexte d'un codage de Gray et nous ne considérons pas les déformations imposées par le canal limité en fréquence sur les formes d'ondes.

4 Simulations

Les résultats de la comparaison entre PEB et simulation sont présentés sur la figure 4 pour le système décrit sur la figure 1 pour une modulation PAM-4, un écart-type de gigue $\sigma_g = 0.44721T_b$, un facteur de sur-échantillonnage $F_{osr} = 2^{10}$ et un coefficient de limitation de bande en réception $\alpha = 2^0$. La bande est ainsi deux fois supérieure à la bande $1/2T$ nécessaire pour éviter l'IES. Le coefficient de limitation de bande est imposé par les caractéristiques du canal réel proposé par le standard [3]. Le choix de F_{osr} est décidé par la précision temporelle nécessaire à la représentation de la gigue dans la simulation. La figure

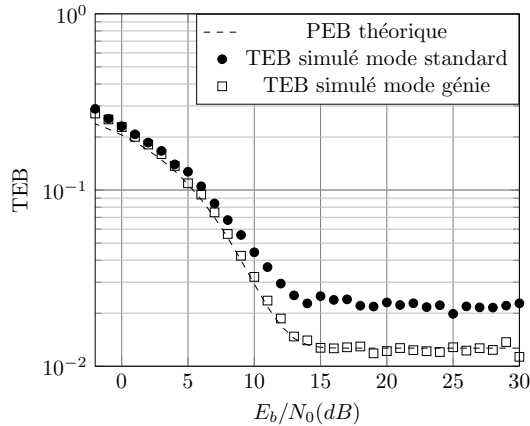


FIGURE 4 – Comparaison pour une modulation PAM-4, $\sigma_g = 0.44721T_b$, $F_{osr} = 2^{10}$ et $\alpha = 2^0$

4 contient trois courbes de PEB en fonction du rapport E_b/N_0 .

- La première est la PEB établie à l'équation (8)
- La deuxième est le TEB issu de la simulation dans le cas où signal utile et bruit thermique sont tous deux filtrés par un filtre $H_r(\omega)$ de largeur $\alpha/2T_b$. On appelle ce mode de simulation le mode standard.
- La troisième est le TEB issu de la simulation dans le cas où seul le bruit thermique est filtré à la réception et le signal utile est passé sans modification. On appelle ce mode de simulation le mode génie.

Nous proposons deux modes de simulation pour mesurer l'impact du filtre de réception. Nous prévoyons une différence de performance entre la simulation standard et la PEB établie due à la déformation des formes d'ondes constitutives du signal utile. Nous proposons la simulation mode génie pour montrer que la PEB est représentative des performances d'un système réel lorsque la déformation imposée par la limitation de bande est négligeable (ou que l'égalisation en aval permet de la rendre telle).

Sur la figure 4, la PEB proposée et le TEB de la simulation standard correspondent pour la plage médiane des rapports E_b/N_0 allant de 0 dB à 8 dB. Pour des E_b/N_0 faibles (<0 dB), la différence est due au fait que l'approximation de la PEB par la probabilité d'erreur symbole lorsque l'on emploie un codage de Gray n'est pas vérifiée. Pour des rapports E_b/N_0 élevés (>8 dB), l'écart constaté entre la théorie et le TEB de la simulation standard est dû à la déformation du signal par le filtre de réception. Dans le cas de la simulation génie, en revanche, bien que l'on observe toujours l'écart pour des rapports E_b/N_0 très faibles, le système atteint bien le plafond de performance prévu par la théorie. La PEB établie est donc à considérer comme une limite de performance dans des conditions de réception idéales.

Nous employons cette limite de performance pour classer les différents ordres de modulation d'après des arguments quantitatifs. Nous anticipons, dans un contexte de

bruit de gigue blanc, qu'un ordre de modulation plus élevé y est moins sensible étant donné que la durée symbole croît avec l'ordre et que l'écart type de la gigue reste proportionnel à la durée binaire. Cependant, une modulation d'ordre élevé est plus sensible au bruit thermique d'après [1]. Nous relevons, pour $M \in \{2, 4, 8, 16\}$, le rapport E_b/N_0 pour lequel le système atteint une PEB de 10^{-4} en fonction de σ_g . Les résultats sont consignés dans le tableau 1.

σ_g/T_b	PAM-2	PAM-4	PAM-8	PAM-16
0	8.4	15.2	21.3	27.2
0.3606	x	x	21.4	27.2
0.5	x	x	x	27.2

TABLE 1 – Rapports E_b/N_0 (dB) tels que PEB = 10^{-4} fonction de σ_g , M et $\alpha = 2^0$ d'après le calcul théorique.

Lorsque le rapport E_b/N_0 est remplacé par un "x", cela signifie que l'ordre de modulation ne permet pas d'atteindre un PEB de 10^{-4} pour l'écart type de gigue considéré. Pour une gigue d'écart type $\sigma_g = 0$, l'ordre de modulation le plus performant est la PAM-2. On retrouve bien que l'ordre de modulation le plus faible est le plus robuste au bruit thermique. En revanche, lorsque l'écart type de la gigue croît, les ordres de modulation les moins élevés ne permettent plus d'atteindre une PEB de 10^{-4} . Dans le cas d'une application telle que $\sigma_g = 0.5T_b$, le seul ordre de modulation, parmi ceux considérés, permettant d'atteindre la PEB cible est la PAM-16, ce qui confirme que la modulation d'ordre supérieur est plus robuste à la gigue.

5 Conclusion

Nous proposons dans cet article une expression analytique de la PEB d'une chaîne de communication filaire très haut débit. Nous avons vérifié que la PEB théorique était en accord avec les résultats issus de la simulation génie, soit le cas où l'on peut négliger les déformations induites par le filtre de réception sur le signal utile. Cette expression est donc à prendre comme une limite haute des performances du système. Elle permet de déterminer quantitativement l'ordre de modulation PAM adéquat, en fonction du rapport E_b/N_0 et de l'écart type de gigue.

Références

- [1] M. Joindot and A. Glavieux, *Introduction aux communications numériques*. Dunod, 2007.
- [2] S. Bicaïs, *Design of the Physical Layer for Future Sub-TeraHertz Communication Systems*. PhD thesis, 2020.
- [3] R. Mellitz, "100 gel c2m flyover host files : Tp0 to tp2 with and without manufacturing variations for losses 9 10 11 12 13 and 14 db," in *IEEE 802.3 100GEL Study Group*, 2018.