

# Régularisation par la variation totale pour l'identification du support d'images constantes par morceaux

Yohann DE CASTRO<sup>1</sup> Vincent DUVAL<sup>2,3</sup> Romain PETIT<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Institut Camille Jordan, CNRS UMR 5208, École Centrale de Lyon, F-69134 Écully, France

<sup>2</sup>CEREMADE, CNRS, UMR 7534, Université Paris-Dauphine, PSL University, 75016 Paris, France

<sup>3</sup>INRIA-Paris, MOKAPLAN, 75012 Paris, France

<sup>4</sup>MaLGA Center, Department of Mathematics, University of Genoa, 16146 Genoa, Italy

**Résumé** – On étudie la reconstruction d'images constantes par morceaux à partir de mesures linéaires bruitées. Plus précisément, on s'intéresse à la robustesse au bruit d'une méthode de reconstruction variationnelle. Celle-ci repose sur l'utilisation d'un régulariseur spécifique : la variation totale (du gradient). On montre que, sous certaines hypothèses, si l'image inconnue est la superposition de quelques formes simples, les reconstructions obtenues dans un régime de faible bruit ont la même structure : elles sont composées du même nombre de formes, chacune étant une déformation régulière d'une des formes inconnues.

**Abstract** – We consider the recovery of piecewise constant images from noisy linear measurements. We study the noise robustness of a variational reconstruction method, which is based on total (gradient) variation regularization. We show that, under suitable assumptions, if the unknown image is the superposition of a few simple shapes, then in a low noise regime the reconstructed images have the same structure: they are composed of the same number of shapes, each a smooth deformation of one of the unknown shapes.

## 1 Introduction

**Problèmes inverses en imagerie.** Dans ce travail, on s'intéresse à la reconstruction d'une image inconnue  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$  à partir de mesures linéaires bruitées  $y = \Phi u_0 + w \in \mathcal{H}$ , où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert séparable (typiquement  $\mathbb{R}^m$  ou  $L^2(\mathbb{R}^2)$ ). L'opérateur  $\Phi : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}$ , que nous supposons linéaire continu, modélise le processus d'acquisition des observations, et  $w \in \mathcal{H}$  est un bruit additif. La résolution d'un tel problème inverse est d'un intérêt pratique certain. Elle permet par exemple, si  $\Phi$  est un opérateur de convolution, de retrouver les détails fins d'une image à partir d'une version floutée et bruitée de cette dernière.

En général, le principal obstacle à la résolution du problème inverse est la non-injectivité de  $\Phi$ , ou le mauvais conditionnement du système  $\Phi u = y_0$ . Pour surmonter ces difficultés, on peut faire l'hypothèse que l'image inconnue a une structure particulière. Dans ce travail, on s'intéresse au cas où celle-ci est constante par morceaux :  $u_0$  est une combinaison linéaire de quelques fonctions caractéristiques d'ensembles « simples ». De telles images apparaissent naturellement, par exemple, en imagerie cellulaire. Pour exploiter cette hypothèse, on considère une méthode de reconstruction variationnelle qui utilise la variation totale (du gradient) comme régulariseur.

**Régularisation par la variation totale.** En 1992, Rudin Osher et Fatemi [11] ont introduit une méthode de débruitage maintenant célèbre. Celle-ci repose sur l'utilisation d'un régulariseur spécifique, la variation totale (du gradient), que nous noterons TV et qui est défini pour tout  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$  par

$$\text{TV}(u) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \\ \text{s.t. } \|\phi\|_\infty \leq 1}} - \int_{\mathbb{R}^2} u \operatorname{div}(\phi).$$

Dans notre contexte, les travaux [1, 5] suggèrent de produire une approximation de  $u_0$  à partir de  $y$  en résolvant

$$\min_{u \in L^2(\mathbb{R}^2)} \frac{1}{2} \|\Phi u - y\|^2 + \lambda \text{TV}(u). \quad (\mathcal{P}_\lambda(y))$$

Nous nous intéressons à la robustesse au bruit de cette méthode : si le bruit  $w$  est faible et  $\lambda$  est bien choisi, peut-on garantir que toute solution  $u_{\lambda, w}$  de  $(\mathcal{P}_\lambda(y_0 + w))$  est proche de  $u_0$ ? Les résultats de [3, 8, 4, 9] garantissent que, sous certaines conditions,  $u_{\lambda, w}$  est en effet proche d'une solution de

$$\min_{u \in L^2(\mathbb{R}^2)} \text{TV}(u) \quad \text{s.t.} \quad \Phi u = y_0. \quad (\mathcal{P}_0(y_0))$$

Si  $u_0$  est l'unique solution de  $(\mathcal{P}_0(y_0))$  (dans ce cas, on dit que  $u_0$  est *identifiable*), on obtient ainsi un résultat de robustesse au bruit. Soulignons qu'à notre connaissance, en dehors du cas spécifique traité dans [2], garantir l'identifiabilité de  $u_0$  est un problème ouvert.

**Contributions.** Les travaux mentionnés ci-dessus ne permettent pas de répondre à la question suivante : si  $u_0$  est identifiable et est la superposition de quelques formes simples, dans un régime de faible bruit, toute solution  $u_{\lambda, w}$  de  $(\mathcal{P}_\lambda(y_0 + w))$  a-t-elle la même structure? Notre principale contribution est de montrer que, sous certaines hypothèses,  $u_{\lambda, w}$  est effectivement composée du même nombre de formes que  $u_0$ , chacune étant une déformation régulière d'une des formes apparaissant dans  $u_0$  (voir la Figure 1 pour une illustration). Dans ce document, on présente la preuve du résultat dans le cas où l'image inconnue est composée d'une seule forme « simple ». Notre analyse repose notamment sur une hypothèse de régularité sur  $\Phi$  : dans toute la suite, on suppose que  $\Phi : u \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \varphi u$  avec  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{H})$ .

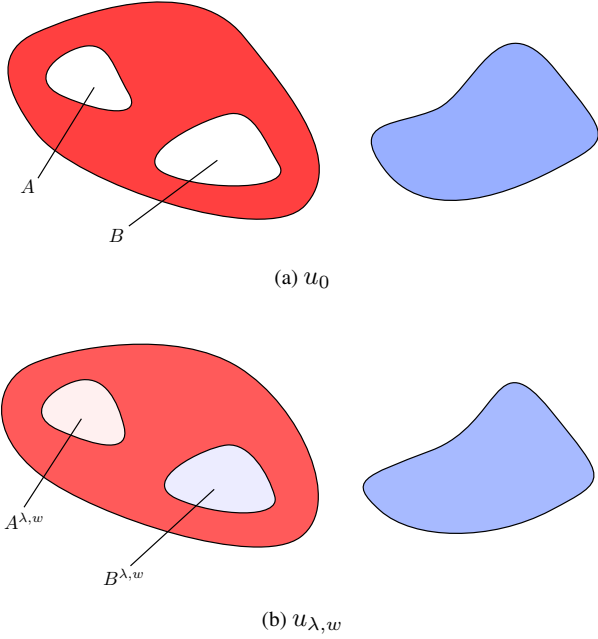


FIGURE 1 – Illustration du résultat d'identification du support. Ici,  $u_0$  est égale à zéro sur  $A$  et  $B$ . Les valeurs prises par  $u_{\lambda, w}$  sur  $A^{\lambda, w}$  et  $B^{\lambda, w}$  sont proches de zéro, mais pas nécessairement nulles.

## 2 Conditions d'optimalité

Notre résultat (ainsi que ceux de [3, 8, 4, 9]) repose sur la relation entre les solutions de  $(\mathcal{P}_0(y_0))$  et  $(\mathcal{P}_\lambda(y))$  et celles de leurs problèmes duaux. Nous la décrivons dans cette section.

**Sous-différentiel de la variation totale.** Nous rappelons ici quelques propriétés du sous-différentiel de TV, qui seront utiles pour décrire et analyser les problèmes duaux mentionnés ci-dessus. Pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , on a :

$$\partial\text{TV}(u) = \left\{ \eta \in \partial\text{TV}(0) \mid \int_{\mathbb{R}^2} \eta u = \text{TV}(u) \right\}$$

avec  $\partial\text{TV}(0)$  l'ensemble des fonctions  $\eta \in L^2(\mathbb{R}^2)$  tel que  $|\int_{\mathbb{R}^2} \eta u| \leq \text{TV}(u)$  pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . On a aussi que  $\partial\text{TV}(0)$  est l'ensemble des fonctions de la forme  $\text{div } z$  avec  $z \in L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ,  $\text{div } z \in L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $\|z\|_\infty \leq 1$ .

**Problèmes et certificats duaux.** Les problèmes duaux de  $(\mathcal{P}_0(y_0))$  et  $(\mathcal{P}_\lambda(y))$  (au sens de Fenchel-Rockafellar) sont respectivement

$$\sup_{p \in \mathcal{H}} \langle p, y_0 \rangle \text{ s.t. } \Phi^* p \in \partial\text{TV}(0), \quad (\mathcal{D}_0(y_0))$$

$$\sup_{p \in \mathcal{H}} \langle p, y \rangle - \frac{\lambda}{2} \|p\|^2 \text{ s.t. } \Phi^* p \in \partial\text{TV}(0). \quad (\mathcal{D}_\lambda(y))$$

Si l'existence de solutions à  $(\mathcal{D}_0(y_0))$  n'est pas garantie, le problème  $(\mathcal{D}_\lambda(y))$  a toujours une unique solution. On a que  $(\mathcal{P}_0(y_0))$  et  $(\mathcal{D}_0(y_0))$  ont la même valeur. De plus, s'il existe une solution  $p$  de  $(\mathcal{D}_0(y_0))$ , pour toute solution  $u$  de  $(\mathcal{P}_0(y_0))$  on a  $\Phi^* p \in \partial\text{TV}(u)$ . Réciproquement, si  $u$  et  $p$  vérifient cette relation et  $\Phi u = y_0$ , alors ils sont respectivement solution de  $(\mathcal{P}_0(y_0))$  et  $(\mathcal{D}_0(y_0))$ . On dit dans ce cas

que  $\Phi^* p$  est un *certificat dual* associé à  $u$ . Pour garantir que  $u_0$  soit solution de  $(\mathcal{P}_0(y_0))$ , on voit donc qu'il est suffisant de supposer l'existence d'un certificat dual associé à  $u_0$ . Cette condition est appelée *condition de source* dans la littérature. Les problèmes  $(\mathcal{P}_\lambda(y))$  et  $(\mathcal{D}_\lambda(y))$  ont également la même valeur. De plus, en notant  $p$  l'unique solution de  $(\mathcal{D}_\lambda(y))$ , pour toute solution  $u$  de  $(\mathcal{P}_\lambda(y))$  on a  $\Phi u = y - \lambda p$  et  $\Phi^* p \in \partial\text{TV}(u)$ . Réciproquement, si ces relations sont vérifiées, alors  $u$  et  $p$  sont respectivement solutions de  $(\mathcal{P}_\lambda(y))$  et  $(\mathcal{D}_\lambda(y))$ , et on appelle également  $p$  *certificat dual* associé à  $u$ . Lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  et  $\|w\|/\lambda \rightarrow 0$ , l'unique solution  $p_{\lambda, w}$  de  $(\mathcal{D}_\lambda(y_0 + w))$  converge fortement vers la solution  $p_0$  de  $(\mathcal{D}_0(y_0))$  de norme minimale, et on appelle  $\eta_0 = \Phi^* p_0$  le *certificat dual de norme minimale*. On notera aussi  $\eta_{\lambda, w} = \Phi^* p_{\lambda, w}$ , et on obtient donc  $\eta_{\lambda, w} \rightarrow \eta_0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $C^1(\mathbb{R}^2)$ .

## 3 Problème à courbure prescrite

En utilisant la formule de la co-aire, on peut montrer que, si  $u$  et  $\eta$  sont dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , alors  $\eta \in \partial\text{TV}(u)$  si et seulement si

$$\forall t > 0, \{u \geq t\} \in \underset{E \subset \mathbb{R}^2, |E| < +\infty}{\text{Argmin}} P(E) - \int_E \eta, \quad (1)$$

$$\forall t < 0, \{u \leq t\} \in \underset{E \subset \mathbb{R}^2, |E| < +\infty}{\text{Argmin}} P(E) + \int_E \eta, \quad (2)$$

où  $P(E) \stackrel{\text{def}}{=} \text{TV}(\mathbf{1}_E)$  est le périmètre de  $E$ . Le problème variationnel géométrique apparaissant dans (1) est appelé *problème à courbure prescrite* associé à  $\eta$ , nous le noterons  $(\mathcal{PC}(\eta))$ . En combinant les conditions d'optimalité de la section précédente avec (1) et (2), on obtient que les ensembles de niveau de toute solution de  $(\mathcal{P}_\lambda(y_0 + w))$  sont solutions de  $(\mathcal{PC}(\pm\eta_{\lambda, w}))$ , et de même pour  $(\mathcal{P}_0(y_0))$  et  $(\mathcal{PC}(\pm\eta_0))$ . Cette optimalité est l'ingrédient principal de notre résultat. Puisque  $\eta_{\lambda, w}$  converge vers  $\eta_0$  dans le régime de faible bruit considéré, on est naturellement amené à étudier le comportement des solutions de  $(\mathcal{PC}(\eta))$  lorsque  $\eta$  varie au voisinage de  $\eta_0$ . C'est l'objet du reste de cette section.

**Convergence des minimiseurs et stabilité.** Les certificats duaux introduits dans la Section 2 appartiennent à  $\text{Im } \Phi^*$ , et sont donc d'après nos hypothèses sur  $\Phi$  de classe  $C^1$ . On peut ainsi se restreindre à l'étude de  $(\mathcal{PC}(\eta))$  pour des fonctions  $\eta$  ayant cette régularité. Dans ce cadre, toutes les solutions de  $(\mathcal{PC}(\eta))$  sont des ensembles bornés de classe  $C^3$  (i.e. ils sont localement l'épigraphe d'une fonction de classe  $C^3$ ).

On prouve d'abord que, si  $\eta$  est proche de  $\eta_0$ , toute solution de  $(\mathcal{PC}(\eta))$  est proche (en termes de déformations normales de classe  $C^2$ ) d'une solution de  $(\mathcal{PC}(\eta_0))$ . Ce résultat repose sur des arguments de compacité pour les suites uniformes de quasi-minimiseurs du périmètre (voir [10, Section 21.5]) et sur les conditions d'optimalité d'ordre un pour  $(\mathcal{PC}(\eta))$ . Dans toute la suite on note  $\|\cdot\|_{C^k} = \sum_{i=0}^k \|D^i \cdot\|_\infty$  avec  $D^i$  la différentielle d'ordre  $i$ .

**Proposition 1.** *Soit  $\eta_0 \in \partial\text{TV}(0) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $r > 0$  tel que, pour tout  $\eta \in \partial\text{TV}(0) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$  vérifiant  $\|\eta - \eta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\eta - \eta_0\|_{C^1(\mathbb{R}^2)} \leq r$ , on a la propriété suivante : pour toute solution non vide  $F$  de  $(\mathcal{PC}(\eta))$  il existe une solution non vide  $E$  de  $(\mathcal{PC}(\eta_0))$  et  $\varphi : \partial E \rightarrow \mathbb{R}$  tel que*

$$\partial F = (\text{Id} + \varphi \nu_E)(\partial E) \text{ et } \|\varphi\|_{C^2(\partial E)} \leq \epsilon.$$

On voudrait maintenant savoir, pour  $\eta$  proche de  $\eta_0$ , combien de solutions de  $(\mathcal{PC}(\eta))$  peuvent se trouver au voisinage (en termes de déformations normales de classe  $C^2$ ) d'une solution donnée de  $(\mathcal{PC}(\eta_0))$ . Cette question est étroitement liée à la stabilité des minimiseurs de  $(\mathcal{PC}(\eta_0))$ , qu'on définit ci-dessous suivant [6].

**Définition 2.** Soit  $\eta \in \partial\text{TV}(0) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$  et  $E$  une solution non vide de  $(\mathcal{PC}(\eta))$ . On dit que  $E$  est strictement stable si, pour tout  $\psi \in H^1(\partial E) \setminus \{0\}$  on a

$$\int_{\partial E} \left[ |\nabla_E \psi|^2 - \left( H_E \eta + \frac{\partial \eta}{\partial \nu_E} \right) \psi^2 \right] d\sigma > 0, \quad (3)$$

avec  $\sigma$  la mesure surfacique sur  $\partial E$ ,  $\nu_E$  et  $H_E$  la normale sortante et la courbure de  $E$ , et  $\nabla_E \psi = \nabla \psi - (\nabla \psi \cdot \nu_E) \nu_E$  le gradient tangentiel de  $\psi$  par rapport à  $E$ .

Avec cette définition, on peut à présent énoncer la proposition suivante. Sa preuve consiste à adapter le raisonnement suivant à notre fonctionnelle géométrique : si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$  et  $x_0$  est un minimiseur strictement stable de  $f$  (i.e.  $f''(x_0) > 0$ ), alors  $f$  est strictement convexe au voisinage de  $x_0$ , et toute fonction  $g$  proche de  $f$  en norme  $C^2$  est également strictement convexe sur ce voisinage.

**Proposition 3.** Soit  $\eta_0 \in \partial\text{TV}(0) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$  et  $E$  une solution strictement stable de  $(\mathcal{PC}(\eta_0))$ . Il existe  $\epsilon > 0$  et  $r > 0$  tel que, pour tout  $\eta \in \partial\text{TV}(0) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$  vérifiant  $\|\eta - \eta_0\|_{C^1(\mathbb{R}^2)} \leq r$ , il existe au plus une solution  $F$  de  $(\mathcal{PC}(\eta))$  tel que

$$\partial F = (\text{Id} + \varphi \nu_E)(\partial E) \text{ avec } \|\varphi\|_{C^2(\partial E)} \leq \epsilon.$$

**Condition suffisante de stabilité stricte.** Etant donné une solution non vide  $E$  de  $(\mathcal{PC}(\eta))$ , il n'est pas évident de vérifier sa stabilité stricte. On peut néanmoins montrer par un calcul direct que la condition géométrique suivante est suffisante :

$$\sup_{x \in \partial E} \left[ H_E^2(x) + \frac{\partial \eta}{\partial \nu_E}(x) \right] < 0.$$

Cette condition n'est a priori pas nécessaire, mais, en utilisant une inégalité de Poincaré, on peut montrer que, si  $H_E^2 + \frac{\partial \eta}{\partial \nu_E}$  est supérieur à une constante positive « pas trop proche de zéro » sur une portion de  $\partial E$  « pas trop petite », alors  $E$  n'est pas strictement stable.

## 4 Condition de source non-dégénérée

Grâce à l'analyse menée dans la Section 3, on peut maintenant introduire ce que nous nommons, d'après [7], la *condition de source non-dégénérée*. Sous cette dernière, on peut démontrer le résultat d'identification du support annoncé. Nous traitons ici seulement le cas où  $u_0$  est proportionnelle à  $\mathbf{1}_E$ , avec  $E$  un ensemble *simple*, au sens défini ci-dessous.

**Ensembles simples.** Si  $E \subset \mathbb{R}^2$  est de périmètre fini, on dit que  $E$  est *décomposable* si il existe une partition de  $E$  en deux ensembles de mesure non nulle  $A$  et  $B$  tel que  $P(E) = P(A) + P(B)$ . Si un ensemble n'est pas décomposable, on dit qu'il est *indécomposable*. Un ensemble de mesure finie est dit *simple* si  $E$  et  $\mathbb{R}^2 \setminus E$  sont indécomposables.

**Définition 4.** Soit  $u_0 = a\mathbf{1}_E$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $E$  un ensemble simple de mesure non nulle. On dit que  $u_0$  satisfait la condition de source non-dégénérée si  $E$  est l'unique solution (modulo un ensemble de mesure nulle) non vide de  $(\mathcal{PC}(\text{sign}(a)\eta_0))$ , et que  $E$  est de plus strictement stable.

**Vérification numérique.** Dans le reste de cette section, on s'intéresse au cas où  $u_0 = \mathbf{1}_E$  avec  $E = B(0, 1)$  un disque de rayon 1 et  $\Phi$  est la convolution avec une gaussienne de variance  $\sigma > 0$ , i.e.  $\varphi(x) = \exp(-\|x\|^2/(2\sigma^2))$  et

$$\Phi u = \left[ x \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x-y)u(y)dy \right] \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

On cherche à montrer numériquement que la condition de source non-dégénérée est bien vérifiée dans ce cas simple. Pour ce faire, on adapte à notre cadre la notion de *pré-certificat*, introduite dans [7, Section 4]. Si  $\Phi^*p$  est un certificat dual associé à  $u_0$ , alors  $E$  est solution de  $(\mathcal{PC}(\Phi^*p))$ . On a donc  $P(E) = \int_E \Phi^*p$ , et on peut de plus montrer que la condition d'optimalité d'ordre un donne  $\Phi^*p = H_E$  sur  $\partial E$ . En utilisant la formule de Gauss-Bonnet, on obtient en particulier  $\int_{\partial E} \Phi^*p = \int_{\partial E} H_E = 2\pi$ . Ces deux conditions peuvent se réécrire

$$\left\langle p, \int_E \varphi \right\rangle = P(E) = 2\pi, \quad \left\langle p, \int_{\partial E} \varphi \right\rangle = 2\pi. \quad (4)$$

Intéressons-nous à présent à la solution de (4) de norme minimale, que nous notons  $p_v$ . On peut montrer que  $p_v$  s'écrit en fait  $p_v = \alpha f + \beta g$  avec  $f = \int_E \varphi$ ,  $g = \int_{\partial E} \varphi$  et  $\alpha, \beta$  des coefficients déterminés par (4). En utilisant le fait que, si  $u_0$  est solution de  $(\mathcal{P}_0(y_0))$ , toute solution  $p$  de  $(\mathcal{D}_0(y_0))$  est solution de (4), on obtient la proposition suivante.

**Proposition 5.** Si  $\eta_v = \Phi^*p_v$  est tel que  $\eta_v \in \partial\text{TV}(0)$ , alors  $\eta_v$  est le certificat dual de norme minimale et la condition de source est vérifiée.

Pour montrer que  $\eta_v \in \partial\text{TV}(0)$ , il suffit d'exhiber un champ de vecteurs  $z$  tel que  $\text{div } z = \eta_v$  et  $\|z\|_\infty \leq 1$ . Puisque  $\Phi^*f$  et  $\Phi^*g$  sont radiales, il est naturel de chercher  $z$  sous la forme  $z(x) = z_r(\|x\|)x/\|x\|$ . Dans ce cas on a  $\text{div } z = \eta_v$  si et seulement si  $\tilde{\eta}_v(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r z_r)(r)$  pour tout  $r > 0$ , avec  $\eta_v(x) = \tilde{\eta}_v(\|x\|)$ . Il suffit donc de vérifier que  $f_v : r \mapsto \frac{1}{r} \int_0^r \tilde{\eta}_v(s) s ds$  prend ses valeurs dans  $[-1, 1]$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Le graphe de  $f_v$  est donné Figure 2 pour plusieurs valeurs de  $\sigma$ . On remarque que si  $\sigma \leq 0.75$ , alors  $\eta_v$  est bien le certificat dual de norme minimale. On peut également montrer que  $E$  est l'unique solution de  $(\mathcal{PC}(\eta_0))$  dès que que  $f_v(r) < 1$  pour tout  $r \neq 1$ . De plus,  $H_E$  est constante égale à 1 et, puisque  $\eta_0$  est radiale,  $\frac{\partial \eta_0}{\partial \nu_E}$  est constante sur  $\partial E$ . On a donc que la condition de source non-dégénérée est vérifiée dès que  $f_v(r) < 1$  pour tout  $r \neq 1$  et  $\frac{\eta_v}{\partial r}(1) < -1$ . En calculant numériquement  $\frac{\eta_v}{\partial r}(1)$ , on remarque que ces conditions sont toujours vérifiées pour  $\sigma \leq 0.75$ , et que la condition de source non-dégénérée est donc vérifiée dans ce régime.

## 5 Identification du support

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre résultat d'identification du support. Celui-ci montre comme annoncé

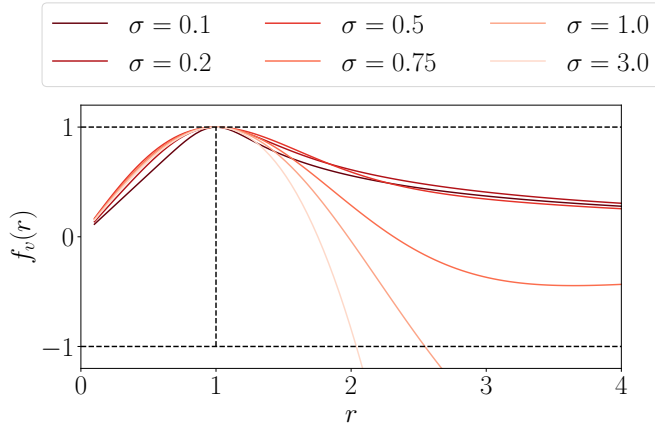


FIGURE 2 – Graphe de  $f_v$ .

que, sous certaines hypothèses, si l’image inconnue est composée d’une seule forme simple, alors les reconstructions obtenues dans un régime de faible bruit ont la même structure (voir la Figure 1 pour une illustration). De plus, lorsque le bruit tend vers zéro, la forme reconstruite converge vers la forme inconnue.

**Théorème 6.** Soit  $u_0 = a\mathbf{1}_E$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $E$  un ensemble simple de mesure non nulle. Supposons que  $u_0$  satisfait la condition de source non-dégénérée et que  $b \mapsto \Phi(b\mathbf{1}_E)$  est injectif. Alors il existe  $\alpha, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$  tel que, pour tout  $(\lambda, w) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^m$  vérifiant  $\lambda \leq \lambda_0$  et  $\|w\|/\lambda \leq \alpha$ , toute solution  $u_{\lambda,w}$  de  $(\mathcal{P}_\lambda(y_0+w))$  s’écrit  $u_{\lambda,w} = a_{\lambda,w}\mathbf{1}_{E_{\lambda,w}}$  avec

$$\partial E_{\lambda,w} = (Id + \varphi_{\lambda,w} \nu_E)(\partial E) \text{ et } \varphi_{\lambda,w} \in C^2(\partial E).$$

De plus, pour tout  $\epsilon > 0$ , quitte à réduire  $\alpha$  et  $\lambda_0$ , on a :

$$|a_{\lambda,w} - a| \leq \epsilon \text{ et } \|\varphi_{\lambda,w}\|_{C^2(\partial E)} \leq \epsilon.$$

**Extension.** Le résultat peut être étendu au cas où l’image inconnue est composée de plusieurs formes simples. La classe d’images constantes par morceaux avec laquelle on est naturellement amené à travailler est celle des fonctions s’écrivant  $\sum_{i=1}^N a_i \mathbf{1}_{E_i}$  avec les  $E_i$  simples et tel que  $\partial E_i \cap \partial E_j = \emptyset$  pour tout  $i \neq j$ .

## 6 Conclusion et perspectives

Nous avons prouvé un résultat de robustesse au bruit pour la méthode variationnelle considérée. Il permet d’affirmer que, sous certaines conditions, les reconstructions obtenues ont la même structure que l’image inconnue. L’hypothèse clé sur laquelle il repose est la condition de source non-dégénérée. Nous avons montré numériquement sa validité dans le cas de la déconvolution du disque. Naturellement, il serait souhaitable d’approfondir l’étude de cette condition et de son domaine de validité. Un premier pas dans cette direction serait de comprendre quelles images composées d’une seule forme simple la vérifient. Dans un second temps, si l’image inconnue est composée de plusieurs formes, on pourrait chercher à étudier l’impact de leur position relative sur la validité de la condition. Enfin, le résultat que nous prouvons est seulement qualitatif, et il serait naturel de chercher à obtenir des vitesses de convergence en fonction du niveau de bruit.

## Remerciements

Ce projet a bénéficié du soutien de la région Île-de-France, de l’agence nationale de la recherche (CIPRESSI, ANR-19-CE48-0017-01), et du conseil européen de la recherche (ERC, SAMPDE, 101041040). Les points de vue et opinions exprimés par les auteurs ne reflètent pas nécessairement ceux de l’Union européenne ou du Conseil européen de la recherche, qui ne peuvent donc en être tenus responsable.

## Références

- [1] R ACAR et C R VOGEL : Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, 10(6):1217, dec 1994.
- [2] Kristian BREDIES et David VICENTE : A perfect reconstruction property for PDE-constrained total-variation minimization with application in Quantitative Susceptibility Mapping. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 25:83, 2019.
- [3] Martin BURGER et Stanley OSHER : Convergence rates of convex variational regularization. *Inverse Problems*, 20(5):1411–1421, juillet 2004.
- [4] Antonin CHAMBOLLE, Vincent DUVAL, Gabriel PEYRÉ et Clarice POON : Geometric properties of solutions to the total variation denoising problem. *Inverse Problems*, 33(1):015002, décembre 2016.
- [5] CHAVENT, G. et KUNISCH, K. : Regularization of linear least squares problems by total bounded variation. *ESAIM : COCV*, 2:359–376, 1997.
- [6] M. DAMBRINE et J. LAMBOLEY : Stability in shape optimization with second variation. *Journal of Differential Equations*, 267(5):3009–3045, août 2019.
- [7] Vincent DUVAL et Gabriel PEYRÉ : Exact Support Recovery for Sparse Spikes Deconvolution. *Foundations of Computational Mathematics*, 15(5):1315–1355, octobre 2015.
- [8] B. HOFMANN, B. KALTENBACHER, C. PÖSCHL et O. SCHERZER : A convergence rates result for Tikhonov regularization in Banach spaces with non-smooth operators. *Inverse Problems*, 23(3):987–1010, avril 2007.
- [9] José A. IGLESIAS, Gwenael MERCIER et Otmar SCHERZER : A note on convergence of solutions of total variation regularized linear inverse problems. *Inverse Problems*, 34(5):055011, avril 2018.
- [10] Francesco MAGGI : *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems : An Introduction to Geometric Measure Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [11] Leonid I. RUDIN, Stanley OSHER et Emad FATEMI : Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 60(1):259–268, novembre 1992.