

# Estimation de la ligne de base d'images hyperspectrales

Said SADEG<sup>1</sup> Jean CAUZID<sup>1</sup> El-Hadi DJERMOUNE<sup>2</sup> Cécile FABRE<sup>1</sup> Yingying SONG<sup>3</sup> David BRIE<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université de Lorraine, CNRS, GeoRessource, F-54000 Nancy, France

<sup>2</sup>Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy, France

<sup>3</sup>Chengdu University of Technology, Chengdu, Chine

**Résumé** – Cet article présente une méthode d'estimation de la tendance associée à la ligne de base pour les images hyperspectrales. La méthode est fondée sur l'optimisation d'un critère intégrant un terme robuste et non quadratique de fidélité aux données et des termes de régularisation spatiale et spectrale. Contrairement à l'approche classique basée sur une correction de ligne de base pixel par pixel, l'algorithme proposé exploite conjointement les informations spatiales et spectrales et offre une complexité linéaire en fonction de la taille de l'image. L'efficacité de l'algorithme est démontrée à l'aide de données simulées et d'une image géologique réelle en spectrométrie de fluorescence des rayons X (XRF).

**Abstract** – This paper introduces a baseline correction method for hyperspectral images. The method is based on the optimization of a criterion incorporating a non-quadratic robust data fidelity term and both spatial and spectral regularization terms to enforce baseline smoothness. Unlike the classical approach based on a pixel-by-pixel baseline correction, the proposed algorithm exploits jointly the spatial and spectral information and enjoys an efficient implementation. Its effectiveness is demonstrated using simulated and real-world X-ray fluorescence (XRF) geological hyperspectral images.

## 1 Introduction

L'imagerie hyperspectrale a suscité un immense intérêt ces dernières années car elle revêt une importance majeure dans de nombreuses applications telles que l'imagerie médicale [8], la télédétection [15] et la caractérisation chimique des matériaux [5]. Cette méthode permet d'obtenir des informations plus détaillées que celles fournies par les techniques d'imagerie classiques basées sur trois canaux de couleur ou sur quelques bandes spectrales.

Les informations spectrales et spatiales fournies par les systèmes d'imagerie hyperspectrale sont souvent porteuses de ce que l'on appelle « la ligne de base » qui est liée au système d'acquisition ou au matériau analysé. Cette ligne apparaît comme une courbe lisse qui relève l'intensité du spectre. Plusieurs méthodes ont été proposées pour soustraire cette ligne de base des spectres bruts. L'algorithme *Asymmetric Least Squares* (ALS) [2] cherche à estimer de manière itérative la ligne de base en utilisant des poids qui pénalisent les changements rapides. Une amélioration de cette méthode, nommée *Adaptive Iteratively Reweighted Penalized Least Squares* (airPLS), utilise une pondération exponentielle des résidus négatifs [17]. Une autre amélioration nommée *Improved Asymmetrically Reweighted Penalized Least Squares* (iarPLS) a été récemment proposée par Ye *et al.* [16]. Elle utilise une formule de pondération ajustée pour améliorer l'estimation lors de l'ajustement des petits pics du spectre. Parmi les autres approches, on peut citer les algorithmes *Iterative Reweighted Spline Quantile Regression* [3] et *Statistics-sensitive Non-linear Iterative Peak-clipping* (SNIP) [10]. La méthode proposée dans [9] approche la ligne de base avec une fonction polynomiale dont les coefficients sont estimés en minimisant une fonction de coût non quadratique. Récemment, des approches fondées sur l'apprentissage profond ont également été proposées [13].

Toutes ces méthodes visent à ajuster une ligne de base à un

seul spectre. Intuitivement, un traitement conjoint de tous les pixels d'une image hyperspectrale permet d'améliorer la qualité d'estimation de la ligne de base. Il convient de mentionner que l'algorithme présenté dans [12] est capable d'effectuer une correction de la ligne de base à partir de plusieurs spectres collectés plusieurs fois pour le même échantillon. L'objectif de cet article est de présenter un algorithme adapté aux images hyperspectrales dans lequel l'estimation de la ligne de base tient compte de la similarité entre pixels voisins. Nous proposons également un schéma de mise en œuvre permettant d'éviter l'inversion directe des grandes matrices sous-jacentes.

Ce papier est organisé comme suit. Dans la section 2.1, nous présentons une stratégie de régularisation non quadratique pour estimer la ligne de base d'un spectre unidimensionnel. Cette stratégie est ensuite étendue dans la section 2.2 pour traiter des images hyperspectrales avec des régularisations spectrales et spatiales. Les résultats obtenus en utilisant des images hyperspectrales simulées et réelles sont détaillés dans la section 3. Enfin, les conclusions sont tirées dans la section 4.

## 2 Estimation de la ligne de base : position du problème et solution

### 2.1 Principe général

Soit  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  un spectre à  $p$  points. Chaque point correspond à une bande spectrale notée  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . On suppose que  $\mathbf{y}$  est une superposition d'une ligne de base régulière  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ , d'un spectre utile composé de pics dont la position et l'intensité dépend de l'échantillon étudié et d'un bruit. L'estimation de la ligne de base peut être formulée par la minimisation de la fonction de coût suivante :

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \varphi(y_i - x_i) + \alpha \|\mathbf{D}_p \mathbf{x}\|_2^2, \quad (1)$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme euclidienne,  $\mathbf{D}_p \in \mathbb{R}^{(p-1) \times p}$  est une matrice de différences finies d'ordre 1 ( $\mathbf{D}_p(i, i) = -1$ ,  $\mathbf{D}_p(i, i+1) = 1$ , et  $\mathbf{D}_p(i, j) = 0$  pour  $j > i+1$ ) et  $\alpha > 0$  est un paramètre qui permet de contrôler la douceur de la ligne de base. La fonction  $\varphi(x)$  est asymétrique et non quadratique, ce qui pénalise fortement les valeurs négatives de  $x$  et dont le coût est moindre pour les grandes valeurs. Cette propriété permet d'obtenir un estimateur robuste car le minimiseur est moins sensible aux valeurs aberrantes et/ou aux pics spectraux de forte intensité. Dans cet article, nous utilisons la fonction convexe de Huber définie comme suit :  $\varphi(x) = x^2$  si  $x < s$  et  $\varphi(x) = 2sx - s^2$  si  $x \geq s$ . Pour minimiser le critère (1), nous utilisons une minimisation semi-quadratique en introduisant une variable auxiliaire  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_p]^\top$  dans un nouveau critère  $K(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  qui admet le même minimum que  $J(\mathbf{x})$  :

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^p [(y_i - x_i - z_i)^2 + u(z_i)] + \alpha \|\mathbf{D}_p \mathbf{x}\|_2^2, \quad (2)$$

où  $u(z) = \sup_x (c\varphi(x) - (x - z)^2/2)$  et  $c = 1/2$  [9]. Le minimiseur  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$  est calculé en utilisant une approche alternée : pour un  $\mathbf{x}$  donné, on cherche le minimiseur sur  $\mathbf{z}$ , et avec cette valeur le critère est alors minimisé par rapport à  $\mathbf{x}$ . Soit  $(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)})$  la solution à l'itération  $k$  et  $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{z}^{(0)})$  le point initial. À l'itération  $(k+1)$  on calcule :

$$z_i^{(k+1)} = -(y_i - x_i^{(k)}) + c\varphi'(y_i - x_i^{(k)}), i = 1, \dots, p \quad (3)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{I}_p + \alpha \mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_p)^{-1} (\mathbf{y} + \mathbf{z}^{(k)}), \quad (4)$$

avec  $\varphi'(x) = 2 \cdot \min(x, s)$  et  $\mathbf{I}_p$  est la matrice identité de dimension  $p$ . On supposera que la convergence est atteinte lorsque  $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2 / \|\mathbf{x}^{(k+1)}\|_2 < \epsilon$ , où  $\epsilon = 10^{-6}$ .

## 2.2 Formulation dans le cas tridimensionnel

Dans cette section, nous présentons une méthode pour estimer la ligne de base d'un cube de données entier. Au lieu de prendre chaque spectre indépendamment des autres, nous empilons ces spectres dans un tenseur  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n \times p}$  le long de la troisième dimension tandis que les deux premières sont les dimensions spatiales. On note  $\mathcal{A} \bullet_d \mathbf{B}$  le produit selon le mode  $d$  du tenseur  $\mathcal{A}$  et la matrice  $\mathbf{B}$  [7]. Dans ce produit, la sommation est faite sur le deuxième indice de la matrice  $\mathbf{B}$ , par exemple, si  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times n \times p}$  et  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{q \times m}$ , alors  $\mathcal{A} \bullet_1 \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{q \times n \times p}$  avec  $[\mathcal{A} \bullet_1 \mathbf{B}]_{ijk} = \sum_{\ell=1}^m \mathcal{A}_{\ell j k} B_{i \ell}$ . Pour estimer la ligne de base  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{m \times n \times p}$ , nous proposons la fonction de coût suivante :

$$J(\mathcal{X}) = \phi(\mathcal{Y} - \mathcal{X}) + \alpha \|\mathcal{X} \bullet_3 \mathbf{D}_p\|_F^2 + \beta (\|\mathcal{X} \bullet_1 \mathbf{D}_m\|_F^2 + \|\mathcal{X} \bullet_2 \mathbf{D}_n\|_F^2), \quad (5)$$

où  $\|\cdot\|_F$  est la norme de Frobenius et  $\beta$  est le paramètre qui contrôle la douceur spatiale de la ligne de base. Avec un léger abus de notation, on note :  $\phi(\mathcal{Y} - \mathcal{X}) = \sum_{i,j,k} \varphi(\mathcal{Y}_{ijk} - \mathcal{X}_{ijk})$ . Le dernier terme du côté droit de (5) pénalise les grandes variations de la ligne de base entre pixels spatialement voisins les uns des autres. Notons aussi que cette pénalité est séparable selon les deux dimensions spatiales. Ce choix est motivé par la nécessité de concevoir un algorithme rapide capable de traiter de grands cubes de données.

On pose  $\mathbf{x} = \text{vec}(\mathcal{X})$  et  $\mathbf{y} = \text{vec}(\mathcal{Y})$ , où  $\text{vec}(\cdot)$  est l'opérateur de vectorisation appliqué à une matrice ou un tenseur.

On note  $\mathbf{X}_{(d)}$  la matricisation (c.-à-d. dépliage matriciel) selon le mode  $d$  du tenseur  $\mathcal{X}$ ; cette opération arrange les fibres du mode  $d$  pour qu'elles soient les colonnes de la matrice résultante [7]. La propriété suivante va nous permettre d'exprimer l'opération de matricisation par des produits de Kronecker [6] :

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \bullet_1 \mathbf{A}_1 \cdots \bullet_N \mathbf{A}_N \iff \mathbf{Y}_{(d)} = \mathbf{A}_d \mathbf{X}_{(d)} (\mathbf{A}_N \otimes \cdots \otimes \mathbf{A}_{d+1} \otimes \mathbf{A}_{d-1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{A}_1)^\top, \quad (6)$$

où  $\otimes$  représente le produit de Kronecker. La forme vectorielle du premier terme de l'équation (5) peut être exprimé par :

$$\text{vec}(\mathcal{Y} - \mathcal{X}) = \mathbf{y} - \mathbf{x}. \quad (7)$$

De plus, en utilisant la propriété (6) et le fait que  $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^\top \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B})$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathcal{X} \bullet_3 \mathbf{D}_p) &= \text{vec}(\mathcal{X} \bullet_1 \mathbf{I}_m \bullet_2 \mathbf{I}_n \bullet_3 \mathbf{D}_p) \\ &= \text{vec}(\mathbf{I}_m \mathbf{X}_{(1)} (\mathbf{D}_p \otimes \mathbf{I}_n)^\top) \\ &= (\mathbf{D}_p \otimes \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (8)$$

En procédant de la même manière pour  $(\mathcal{X} \bullet_1 \mathbf{D}_m)$  et  $(\mathcal{X} \bullet_2 \mathbf{D}_n)$ , on obtient :

$$\text{vec}(\mathcal{X} \bullet_1 \mathbf{D}_m) = (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{D}_m) \mathbf{x}, \quad (9)$$

$$\text{vec}(\mathcal{X} \bullet_2 \mathbf{D}_n) = (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{D}_n \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{x}. \quad (10)$$

Finalement, l'équation (5) devient :

$$J(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \alpha \|(\mathbf{D}_p \otimes \mathbf{I}_{mn}) \mathbf{x}\|_2^2 + \beta \|(\mathbf{I}_{np} \otimes \mathbf{D}_m) \mathbf{x}\|_2^2 + \beta \|(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{D}_n \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{x}\|_2^2. \quad (11)$$

Par conséquent, le minimiseur de  $J(\mathbf{x})$  peut être calculé comme dans le cas unidimensionnel. La version hyperspectrale de l'itération dans (4) s'écrit alors :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{y} + \mathbf{z}^{(k)}), \quad (12)$$

sauf qu'ici  $\mathbf{z}^{(k)} \in \mathbb{R}^{mnp}$  et

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{I}_{mnp} + \alpha (\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_p) \otimes \mathbf{I}_{mn} + \beta \mathbf{I}_{np} \otimes (\mathbf{D}_m^\top \mathbf{D}_m) \\ &\quad + \beta \mathbf{I}_p \otimes (\mathbf{D}_n^\top \mathbf{D}_n) \otimes \mathbf{I}_m. \end{aligned} \quad (13)$$

## 2.3 Implémentation

Comme la plupart des algorithmes de correction de ligne de base, le schéma proposé ici nécessite l'inversion de la matrice  $\mathbf{A}$  donnée dans l'équation (13). Cette dernière étant de taille  $mnp \times mnp$ , son stockage et le temps de calcul de son inverse est un problème délicat pour traiter des images hyperspectrales de très grande dimension. Comme la matrice  $\mathbf{A}$  est creuse, symétrique et définie positive, il existe des techniques itératives efficaces<sup>1</sup> pour résoudre un système d'équations linéaires de la forme  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  et qui convergent en un nombre fini d'itérations. On peut citer par exemple les algorithmes du gradient conjugué [4] et de Lanczos [1, 11] tout comme l'algorithme de Wiedemann [14]. Dans cet article, seuls les éléments non nuls de la matrice  $\mathbf{A}$  sont stockés en mémoire et nous utilisons la méthode du gradient conjugué pré-conditionné. L'implémentation Matlab de l'algorithme proposé peut être téléchargée sur le site de l'un des auteurs<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Le coût en mémoire et en calcul de ces méthodes est une fonction linéaire du nombre d'éléments non nuls de  $\mathbf{A}$ , i.e.  $O(mnp)$ .

<sup>2</sup><http://w3.cran.univ-lorraine.fr/el-hadi.djermoune/?q=content/publications>

### 3 Résultats expérimentaux

#### 3.1 Simulation

Dans cette partie, l'objectif est de montrer les performances de l'algorithme dans un environnement contrôlé, *i.e.* quand la ligne de base est parfaitement connue. Nous prenons une image hyperspectrale de taille  $10 \times 10 \times 1000$ . Chaque pixel est un spectre composé de quatre pics gaussiens étroits superposés à une ligne de base, représentée par une fonction gaussienne plus large, et un bruit blanc de moyenne nulle. Les spectres sans et avec bruit (de rapport signal-sur-bruit, RSB, de 10 dB) sont représentés en figure 1(a). La ligne de base subit un décalage aléatoire d'un pixel à l'autre ; l'amplitude de ce décalage suit une loi uniforme dans l'intervalle  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ . Le niveau de bruit varie de telle sorte que le RSB soit compris entre -10 et 30 dB. La qualité d'estimation de la ligne de base est mesurée par le RMSE (*root mean square error*) défini par :  $RMSE = \|\hat{\mathcal{X}} - \mathcal{X}\|_F / \sqrt{mnp}$ , où  $\hat{\mathcal{X}}$  et  $\mathcal{X}$  sont les lignes de base estimées et leurs moyennes sur tous les pixels, respectivement. Le paramètre  $\alpha$  (régularisation spectrale) est fixé à 1500. Comme le paramètre  $s$  dépend du niveau de bruit, il est fixé à chaque valeur de RSB de façon à obtenir le meilleur ajustement. Les distributions des lignes de bases obtenues sur tous les spectres de l'image à 10 dB sont représentées sur la figure 1(a), pour  $\beta = 0$  (sans régularisation spatiale) et  $\beta = 15$ . La figure 1(b) montre que le RMSE décroît au fur et à mesure que le RSB augmente. Le RMSE obtenu avec une régularisation spatiale est plus faible que celui sans régularisation, y compris à un faible RSB. Enfin, comme prévu, le temps de calcul de l'algorithme représenté en figure 1(c) augmente linéairement avec la taille de l'image hyperspectrale (résultat pour un RSB de 10 dB et  $\beta = 15$ ).

#### 3.2 Application à l'imagerie XRF

Nous présentons ici les résultats obtenus sur une image hyperspectrale en  $\mu$ -XRF (fluorescence X en micro-faisceau) d'une lame mince issue du gisement étain-tungstène (Sn-W) de Saint-Mélany dans le Massif Central. La ligne de base du signal  $\mu$ -XRF contient des informations sur la densité des minéraux, laquelle est d'intérêt en géologie. L'échantillon est composé d'un cristal de wolframite au centre, de deux cristaux de cassitérite et d'autres minéraux en faible quantité, le tout englobé dans une matrice de quartz, *cf.* figure 3(b). L'acquisition des données a été réalisée avec un spectromètre Bruker Tornado M4 équipé d'un tube de rhodium travaillant sous une tension de 50 kV et une intensité de 300 mA. La détection est effectuée avec deux détecteurs XFlash SDD de 30 mm<sup>2</sup>. La taille d'un pixel a été fixée à 20  $\mu$ m avec un temps d'acquisition de 20 ms/pixel. En raison du faible RSB, nous avons effectué un regroupement spatial (*spatial binning*) de taille  $6 \times 6$  et un regroupement spectral de taille 2, ce qui a transformé l'image originale de taille  $1650 \times 1169 \times 4096$  en une image de taille  $194 \times 195 \times 2048$ . Les paramètres utilisés sont  $s = 2.5$ ,  $\alpha = 1500$  et  $\beta \in \{0, 1.5\}$ .

La figure 2 montre les résultats typiques sur deux spectres de l'image : un pixel de quartz et un pixel de wolframite. Globalement, la régularisation spatiale conduit à un meilleur ajustement de la ligne de base dans les pixels associés à la wolframite car la ligne de base est moins régulière. Une fois que la ligne de base est corrigée, nous avons effectué un clustering

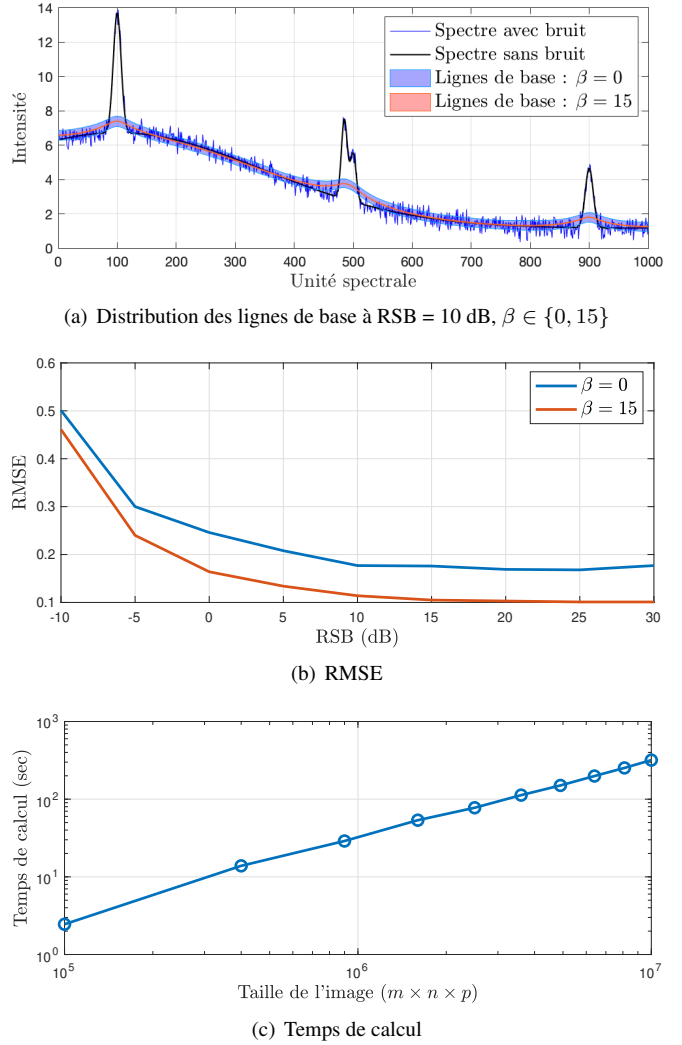


FIGURE 1 : Qualité de l'ajustement de la ligne de base associée à un pixel et temps de traitement de l'image simulée

K-means pour vérifier si l'information de fluorescence a été préservée. Nous avons choisi de partitionner les pixels en 5 groupes : wolframite, quartz, cassitérite, résidus de colle sur la lame, et autres minéraux en faible quantité. Une représentation de l'ensemble des lignes de base sur 4 des cinq clusters est donnée en figure 3(a). On constate en particulier que les lignes de base correspondant à la wolframite et la cassitérite sont moins régulières que celles du quartz. Le résultat du clustering montre qu'une part importante de l'information de fluorescence est bien conservée vue la similitude des figures 3(b)-(c).

### 4 Conclusion

Nous avons proposé un algorithme permettant de corriger la ligne de base des images hyperspectrales. L'algorithme gère les régularités spatiale et spectrale de manière conjointe. La complexité de l'algorithme est linéaire par rapport au nombre de données ; il est de ce fait capable de traiter de grandes images hyperspectrales, sous réserve que celles-ci puissent être stockées en mémoire. Le choix des paramètres de régularisation reste un défi important. Dans un cas pratique, ces paramètres doivent être manipulés avec soin pour éviter de grandes fluctuations de la ligne de base. En termes de perspec-

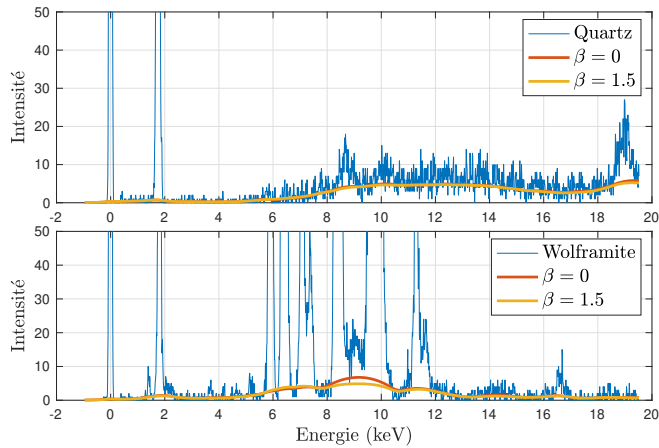
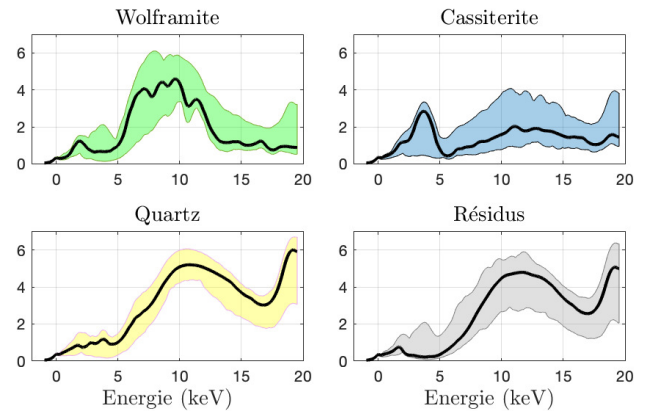


FIGURE 2 : Exemples de lignes de base obtenues sur deux pixels de l'image hyperspectrale XRF. Un spectre de quartz (en haut) et un spectre de wolframite (en bas)

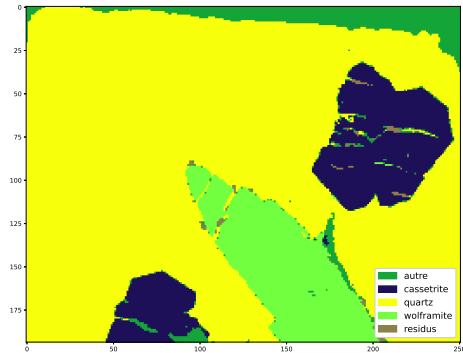
tive, notre objectif est d'obtenir des informations de densité à partir de la ligne de base des spectres afin de propager l'information de surface obtenue par  $\mu$ -XRF vers la troisième dimension spatiale accessible en tomographie à rayons X qui, en première approximation, produit un signal dépendant de la densité de l'échantillon.

## Références

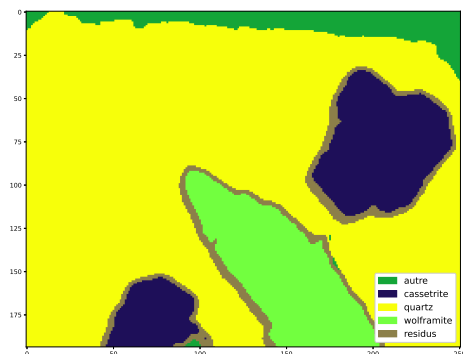
- [1] D. COPPERSMITH, A. ODLYZKO et R. SCHROEPEL : Discrete logarithms in GF(p). *Algorithmica*, 1:1–15, 1985.
- [2] P. EILERS et H. BOELEN : Baseline correction with asymmetric least squares smoothing. Rapport technique, Leiden University Medical Centre Report, 11 2005.
- [3] Q. HAN, S. PENG, Q. XIE, Y. WU et G. ZHANG : Iterative reweighted quantile regression using augmented Lagrangian optimization for baseline correction. In *5th Int. Conf. ICISCE*, pages 280–284, Los Alamitos, CA, USA, juillet 2018.
- [4] M. R. HESTENES et E. STIEFEL : Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49(6):409–436, 1952.
- [5] J. J. KIM, F. T. LING, D. A. PLATTENBERGER, A. F. CLARENS, A. LANZIROTTI, M. NEWVILLE et C. A. PETERS : Smart mineral mapping : Synchrotron-based machine learning approach for 2D characterization with coupled micro XRF-XRD. *Chemom. Intell. Lab. Syst.*, 156, 2021.
- [6] T. G. KOLDA : Multilinear operators for higher-order decompositions. Rapport technique SAND2006-2081, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, Livermore, CA, 2006.
- [7] T. G. KOLDA et B. W. BADER : Tensor decompositions and applications. *SIAM Review*, 51(3):455–500, 2009.
- [8] G. LU et B. FEI : Medical hyperspectral imaging : A review. *Journal of Biomedical Optics*, 19(1):010901, 2014.
- [9] V. MAZET, C. CARTERET, D. BRIE, J. IDIER et B. HUMBERT : Background removal from spectra by designing and minimising a non-quadratic cost function. *Chemom. Intell. Lab. Syst.*, 76(2):121–133, 2005.
- [10] M. MORHÁČ, J. KLIMAN, V. MATOUŠEK, M. VESELSKÝ et I. TURZO : Background elimination methods for multidimensional coincidence  $\gamma$ -ray spectra. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, 401(1):113–132, 1997.
- [11] A. M. ODLYZKO : Discrete logarithms in finite fields and their cryptographic significance. In T. BETH, N. COT et I. INGEMARSSON, éditeurs : *Advances in Cryptology*, pages 224–314, Berlin, Heidelberg, 1985. Springer-Verlag.
- [12] J. PENG, A. JIANG S. PENG, J. WEI, C. LI et J. TAN : Asymmetric least squares for multiple spectra baseline correction. *Analytica Chimica Acta*, 683(1):63–68, 2021.



(a) Distribution des lignes de base dans 4 clusters



(b) Clustering sur les données originales



(c) Clustering sur les lignes de base

FIGURE 3 : Distribution des lignes de base ( $\beta = 1.5$ ) et clustering de l'image hyperspectrale XRF

- [13] M. N. SCHMIDT, T. S. ALSTROM, M. SVENDSTORP et J. LARSEN : Peak detection and baseline correction using a convolutional neural network. In *IEEE ICASSP*, pages 2757–2761, 2019.
- [14] D. H. WIEDEMANN : Solving sparse linear equations over finite fields. *IEEE Trans. Information Theory*, 32:54–62, 1986.
- [15] W. L. WOLFE : *Introduction to imaging spectrometers*. SPIE Press, 1997.
- [16] J. YE, Z. TIAN, H. FEI et Y. LI : Baseline correction method based on improved asymmetrically reweighted penalized least squares for the Raman spectrum. *Applied Optics*, 59(34):10933–10943, 2020.
- [17] Z. M. ZHANG, S. CHEN et Y. Z. LIANG : Baseline correction using adaptive iteratively reweighted penalized least squares. *Analyt.*, 135(5): 1138–1146, 2010.