

# Borne Barankin vs Borne Cramér-Rao pour la géométrie de réseaux d'antennes en radioastronomie

Jianhua WANG<sup>1</sup>, Lucien BACHARACH<sup>1</sup>, Yassine MHIRI<sup>1</sup>, Mohammed Nabil EL KORSO<sup>2</sup>, Pascal LARZABAL<sup>1</sup>

<sup>1</sup>SATIE, Université Paris Saclay, <sup>2</sup>L2S, Université Paris Saclay

{jianhua.wang}{lucien.bacharach}{yassine.mhiri}@universite-paris-saclay.fr  
{mohammed.el-korso}{pascal.larzabal}@universite-paris-saclay.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous proposons l'utilisation de la borne de Barankin (BB) comme critère d'optimisation de la géométrie d'un réseau d'antennes au lieu de la borne de Cramér-Rao (BCR) qui n'est valable que dans la région asymptotique. La BB fournit un compromis en erreur quadratique moyenne (EQM) entre la largeur du lobe principal et les niveaux des lobes secondaires du diagramme de rayonnement. L'EQM considérée est adaptée au contexte de l'imagerie dans le domaine de la radioastronomie. Nous évaluons et comparons les performances des géométries d'antennes obtenues en évaluant la couverture u-v, le niveau de lobes secondaires et la qualité des images. Les résultats de simulation montrent que le critère basé sur la BB est plus approprié que celui basé sur la BCR pour l'imagerie en radioastronomie.

**Abstract** – In this paper, we propose the use of Barankin Bound (BB) as an alternative optimization criterion, since the Cramér-Rao Bound (CRB) is only valable in the asymptotical region. BB provides a mean square error (MSE) trade-off between mainlobe width and peak sidelobe level (PSL) of the beampattern. The considered MSE is adapted to the context of imaging in the field of radio astronomy. We assess and compare the performance of the obtained array geometries by evaluating the u-v coverage, PSL, and imaging ability. Simulation results illustrate that the BB-based criterion is more appropriate than CRB-based criterion for radio astronomy imaging.

## 1 Introduction

Au cours des dernières décennies, les réseaux de radiotélescopes ont grandi en taille, avec beaucoup plus d'antennes et une étendue spatiale sans précédent. Le nombre accru d'antennes améliore la résolution et la sensibilité de l'interféromètre, comme ceux utilisés dans LOFAR et SKA. Étant donné que la précision d'estimation du réseau d'antennes dépend essentiellement des positions des antennes, la conception de la géométrie du réseau est un problème fondamental.

Dans le domaine de la radioastronomie, la fonction de densité u-v est souvent utilisée pour optimiser la couverture du plan u-v du réseau d'antennes. Cependant, cette méthode n'est applicable qu'avec un nombre élevé d'antennes et ne peut pas refléter directement la qualité d'imagerie. Dans ce cas, les outils statistiques sont plus appropriés pour évaluer les performances du système d'antennes. Les bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne (EQM) sont choisies et utilisées comme critères de sélection d'antennes [1]. Dans le traitement d'antenne, la BCR est couramment utilisée comme critère de conception pour résoudre le problème de placement optimal des antennes [2], en raison de sa simplicité et de la possibilité de l'exprimer sous forme analytique.

Il convient de noter que l'utilité de la BCR est limitée à la région asymptotique. Elle devient imprécise dans la région non asymptotique, en particulier avec un rapport signal sur bruit (RSB) faible ou en présence de lobes secondaires élevés (*peak sidelobe level*, PSL) [3], ce qui entraîne des effets d'ambiguïté. Cette limitation est une préoccupation importante en radioas-

tronomie [4], car elle affecte la précision de l'estimation et peut conduire à une imagerie déformée. La région non asymptotique est délimitée par le seuil de RSB en dessous duquel la performance des estimateurs se dégrade considérablement. La BB est une alternative qui permet de prédire le seuil de RSB et prendre en compte les grandes erreurs d'estimation causées par les effets d'ambiguïté [5]. Par conséquent, il est plus approprié d'utiliser la BB comme critère d'optimisation pour la sélection d'antennes dans le problème d'imagerie en radioastronomie.

Dans cet article, nous allons résoudre le problème de sélection d'antennes en radioastronomie en utilisant des critères basés sur la BCR et la BB. Les performances des deux antennes optimisées seront évaluées et comparées en termes de couverture u-v, du PSL et de la qualité d'imagerie. On montre ainsi que le critère basé sur la BB conduit à de meilleures performances d'imagerie que le critère basé sur la BCR.

## 2 Modèle du système

On considère un réseau d'antennes avec  $p$  capteurs identiques, dans lequel la position de la  $i$ -ème antenne est notée  $\mathbf{r}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ . Une seule source ponctuelle et bande étroite en champ lointain  $s(t)$  centrée à la fréquence  $\omega_c = \frac{2\pi}{\lambda}$  agit sur le réseau. La position de la source est représentée par le vecteur unitaire  $\boldsymbol{\ell} = [l, m, n]^T$ , où  $l$ ,  $m$  et  $n$  sont des cosinus directeurs. Les détails sur les systèmes de coordonnées, qui sont généralement utilisés en radioastronomie comme coordonnées de source, peuvent être trouvés dans [6]. Par conséquent, le vec-

teur de signal du réseau  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^p$  s'écrit comme suit

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(\ell)s(t) + \mathbf{n}(t), \quad (1)$$

où  $\mathbf{n}(t)$  est le vecteur de bruit,  $s(t)$  est le signal de source et  $\mathbf{a}(\ell)$  est le vecteur de signature spatiale

$$\mathbf{a}(\ell) = \left[ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d_1(\ell)}, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d_2(\ell)}, \dots, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d_p(\ell)} \right]^T,$$

dans lequel  $d_i(\ell) = \ell^T \mathbf{r}_i$  est le retard de propagation associé à la  $i$ -ème antenne. Toutes les positions d'antennes peuvent être empilées dans une matrice  $\Xi = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_p]^T \in \mathbb{R}^{p \times 3}$ . Le vecteur de signature spatiale peut alors être réécrit comme  $\mathbf{a}(\ell) = \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}\Xi\ell)$ , où la fonction exponentielle est appliquée élément par élément aux arguments.

Le signal de source et le bruit suivent des distributions gaussiennes complexes. Plus précisément, pour le signal de source, on a  $s(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_s^2)$ , et pour le bruit de l'antenne, on a  $\mathbf{n}(t) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma_n^2 \mathbf{I}_p)$ . Donc, le modèle de la matrice de covariance s'écrit  $\mathbf{R} = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\ell)\mathbf{a}(\ell)^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_p$ .

Dans notre problème, à la fois la position et l'intensité de la source doivent être estimées. Par conséquent, le vecteur de paramètres inconnus contient 4 éléments  $\boldsymbol{\eta} = [l, m, \sigma_s^2, \sigma_n^2]^T$ . Dans la suite,  $\boldsymbol{\eta}_0 = [l_0, m_0, \sigma_{s0}^2, \sigma_{n0}^2]^T$  représente la vraie valeur du vecteur de paramètres inconnus  $\boldsymbol{\eta}$ . La fonction de densité de probabilité jointe pour la réalisation  $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_N)\}$  est exprimée comme suit

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\pi^p |\mathbf{R}|} e^{-\mathbf{x}(t_i)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}(t_i)}, \quad (2)$$

dans lequel  $|\cdot|$  représente le déterminant.

Par soucis de simplicité, mais sans perte de généralité, nous nous concentrerons sur le réseau plan avec  $z_i = 0$  dans la suite de cet article.

### 3 Bornes inférieures de l'EQM

En notant  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  une estimation non biaisée du vecteur de paramètres inconnus, il est démontré dans [7] que

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\eta}}) \geq \mathbf{C}_{\text{BB}} \geq \mathbf{C}_{\text{BCR}}, \quad (3)$$

où  $\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\eta}}) = \mathcal{E}\{(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}_0)(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}_0)^T\}$  représente la matrice de covariance de l'erreur d'estimation,  $\mathbf{C}_{\text{BB}}$  représente la matrice BB,  $\mathbf{C}_{\text{BCR}}$  est la matrice BCR, et l'inégalité entre deux matrices signifie que la différence est une matrice non définie négative. Les expressions sont précisées dans ce qui suit.

**Borne de Cramér-Rao :** La minimisation de la BCR contribue à réduire la largeur du lobe principal dans le diagramme de rayonnement, ce qui se traduit par une meilleure résolution de l'estimateur. Le PSL peut augmenter très fortement si on n'y prend pas garde dans la recherche de réseaux sparses en radioastronomie, ce qui va considérablement dégrader les performances de l'estimateur à faible RSB.

La BCR est l'inverse de la matrice d'information de Fisher (FIM), i.e.,  $\mathbf{C}_{\text{BCR}} = \mathbf{F}^{-1}$ , dans laquelle la FIM est [8]

$$\mathbf{F} = N \left[ \frac{\partial \text{vec}(\mathbf{R})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \Bigg|_{\boldsymbol{\eta}_0} \right]^H (\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{R})^{-1} \frac{\partial \text{vec}(\mathbf{R})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \Bigg|_{\boldsymbol{\eta}_0}, \quad (4)$$

où  $\text{vec}(\mathbf{R}) = (\mathbf{a}^* \odot \mathbf{a}) \sigma_s^2 + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I})$ , le symbole  $\otimes$  est le produit de Kronecker,  $\text{vec}(\cdot)$  représente l'opérateur convertissant une matrice en vecteur en empilant les colonnes de la matrice,  $\odot$  est le produit de Khatri-Rao, et  $*$  désigne la conjugaison complexe. La dérivée peut être écrite comme

$$\frac{\partial \text{vec}(\mathbf{R})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \Bigg|_{\boldsymbol{\eta}_0} = [\mathbf{J}_l, \mathbf{J}_m, \mathbf{J}_{\sigma_s}, \mathbf{J}_{\sigma_n}], \quad (5)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_l &= j \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{D}_x \mathbf{a}^* \odot \mathbf{a} - \mathbf{a}^* \odot \mathbf{D}_x \mathbf{a}) \sigma_s^2, \\ \mathbf{J}_m &= j \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{D}_y \mathbf{a}^* \odot \mathbf{a} - \mathbf{a}^* \odot \mathbf{D}_y \mathbf{a}) \sigma_s^2, \\ \mathbf{J}_{\sigma_s} &= \mathbf{a}^* \odot \mathbf{a}, \quad \mathbf{J}_{\sigma_n} = \text{vec}(\mathbf{I}), \end{aligned} \quad (6)$$

avec  $\mathbf{D}_x = \text{diag}([x_1, \dots, x_p])$ ,  $\mathbf{D}_y = \text{diag}([y_1, \dots, y_p])$ .

**Borne de Barankin :** La contrainte théorique (l'absence de biais pour toutes les valeurs possibles de  $\boldsymbol{\eta}$ ) de la BB originale n'est ni applicable ni calculable en pratique [9]. Comme alternative, l'approximation de la BB est calculée en choisissant judicieusement des points dans l'espace des paramètres inconnus, appelés points test. L'approximation de la BB appliquée dans cet article est la borne de Hammersley-Chapman-Robbins (BHCR) [10] :

$$\mathbf{C}_{\text{BHCR}} = \Phi(\mathbf{B} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1} \Phi^T, \quad (7)$$

où  $\Phi = [\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_0, \dots, \boldsymbol{\eta}_L - \boldsymbol{\eta}_0]$  est la matrice des points test avec  $\boldsymbol{\eta}_i$  désignant le  $i$ -ème point test (pour  $i = 1, 2, \dots, L$ , où l'estimateur est imposé être non biaisé), et  $\mathbf{B}$  est la matrice de Barankin avec la composante  $(i, j)$  définie par [11]

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}]_{i,j} &= \mathcal{E}_{\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta}_0} \left\{ \frac{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta}_i) p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta}_j)}{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta}_0) p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta}_0)} \right\} \\ &= \left( \frac{|\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}_0)|}{|\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}_j)| |\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}_i)| |\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}_j)^{-1} + \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}_i)^{-1} - \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}_0)^{-1}|} \right)^N, \end{aligned} \quad (8)$$

où les points test  $\boldsymbol{\eta}_i$  et  $\boldsymbol{\eta}_j$  sont choisis sur l'espace des paramètres à condition que le déterminant  $|\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}_j)^{-1} + \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}_i)^{-1} - \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}_0)^{-1}|$  au dénominateur ne s'annule pas.

### 4 Méthodologie d'optimisation

Nous traitons ici la conception de l'antenne comme un problème de sélection d'antenne, ce qui signifie que nous cherchons à déterminer l'emplacement de  $K$  antennes de sorte que la performance optimale d'estimation de la position et de l'intensité de la source puisse être atteinte. Le problème de sélection d'antenne peut être formulé comme un problème d'optimisation basé sur certaines mesures de performance prédéfinies, à savoir la BCR ou la BB dans notre cas. Le problème d'optimisation que nous cherchons à résoudre est donc

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & f(\mathbf{C}(\mathbf{w})) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}_p^T \mathbf{w} = K, w_i \in \{0, 1\}, \end{aligned} \quad (9)$$

où  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_p]^T$  est le vecteur de sélection, dans lequel  $w_i$  indique si la  $i$ -ème antenne du réseau initial de  $p$  antennes est sélectionnée (i.e.,  $w_i = 1$ ) ou non (i.e.,  $w_i = 0$ ), et

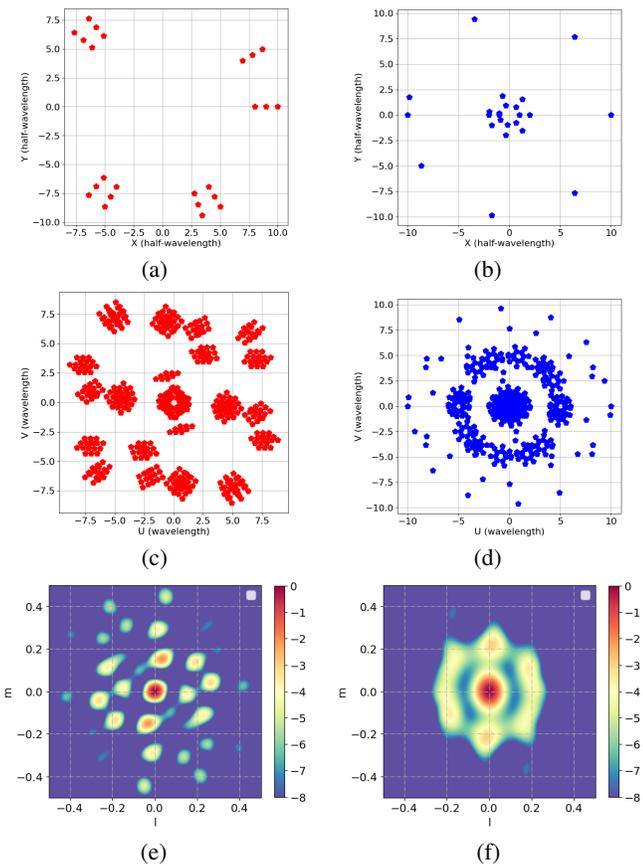


FIGURE 1 – Le réseau d’antennes donné par le critère (a) basé sur BCR ( $A_C$ ) et (b) basé sur BB ( $A_B$ ). La couverture du plan u-v (c) du réseau  $A_C$  comporte 544 échantillons du plan u-v et (d) du réseau  $A_B$  comporte 546 échantillons du plan u-v. Diagramme de rayonnement (e) du réseau  $A_C$  avec PSL de -2,06 dB et (f) du réseau  $A_B$  avec PSL de -2,97 dB.

$f(\mathbf{C}(\mathbf{w}))$  est une fonction de coût liée à la matrice de borne inférieure  $\mathbf{C}(\mathbf{w})$  choisie comme critère d’optimisation. La fonction de coût est minimisée pour sélectionner  $K$  antennes parmi les  $p$  antennes disponibles. Il existe différents types de fonctions de coût [12]. L’*A-optimalité* (i.e.,  $f = \text{tr}\{\mathbf{C}(\mathbf{w})\}$ ) est choisie ici, car elle minimise la variance d’estimation totale des paramètres inconnus. Il est à noter que l’intensité du bruit est un paramètre de nuisance dans notre scénario. De plus, nous considérerons l’estimation simultanée de la position et de l’intensité de la source, et par conséquent, le problème de sélection d’antenne peut être exprimé comme suit

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \text{tr}(\Psi_{lms} \mathbf{C} \Psi_{lms}^T) \\ \text{s.t.} \quad & \|\mathbf{w}\|_1 = K, w_i \in \{0, 1\}, \end{aligned} \quad (10)$$

dans lequel  $\mathbf{C}$  désigne soit  $\mathbf{C}_{\text{BCR}}$  (la borne classique) ou  $\mathbf{C}_{\text{BB}}$  (notre borne recommandée), et  $\Psi_{lms}$  est une matrice de sélection qui extrait les composantes de la borne correspondant à la position  $(l, m)$  et à l’intensité  $\sigma_s^2$  de la source.

En ce qui concerne la méthode d’optimisation, le problème (10) peut généralement être résolu directement et efficacement en utilisant une méthode d’approximation convexe [12] ou des algorithmes gloutons [13]. Cependant, il peut être difficile d’ap-

pliquer les méthodes ci-dessus dans le cas de la BB en raison de la nécessité d’utiliser des points test. Nous définissons donc un problème de petite dimension, et une méthode de recherche exhaustive peut être appliquée dans ce cas.

## 5 Résultats des simulations

**Exemple de sélection d’antenne :** Nous considérons un réseau en étoile à huit branches, dans lequel chaque branche a dix positions candidates espacées d’une demi-longueur d’onde. Le budget de sélection d’antennes est fixé à 3 pour chaque branche, ce qui donne un total budget  $K = 24$  antennes sélectionnées dans le réseau candidat.

Le processus de sélection d’antennes retenu ici pour illustration sera effectué en deux étapes. Dans un premier temps, on travaille sur le réseau symétrique, en optimisant le choix des antennes sur une branche. Dans ce cas, la position de la source est définie à  $(0, 0)$ . Ensuite, on travaille sur l’angle entre les différentes branches, en commençant par fixer la position de la première branche, puis en optimisant l’angle de la deuxième branche. Nous répétons ce processus en fixant les positions des deux premières branches et en optimisant la troisième, jusqu’à ce que toutes les branches soient optimisées.

**Évaluation des performances :** Les résultats de la sélection et de l’optimisation du réseau d’antennes sont présentés dans les figures 1(a) et 1(b). Notamment, toutes les antennes de la géométrie de réseau optimale selon BCR ( $A_C$ ) sont situées sur le bord de chaque branche. Ce résultat correspond bien à la propriété connue selon laquelle la BCR est une borne locale, se concentrant sur la résolution du réseau (ce qui conduit à un lobe principal plus fin). Cependant, ce type de réseau entraîne généralement un PSL plus élevé, comme le montre la figure 1(e). En revanche, le critère BB conduit à une seule antenne placée sur le bord de chaque branche, assurant l’ouverture maximale, les autres étant placées ailleurs pour contrôler le PSL tout en assurant une EQM minimale, comme le montre la figure 1(f). Ceci peut être contrôlé par l’utilisation de plusieurs points test sur l’ensemble de l’espace des paramètres, ce qui prend en compte l’effet d’ambiguïté du réseau.

La couverture du plan u-v des deux géométries  $A_C$  et  $A_B$  est illustrée dans les figures 1(c) et 1(d). Il est évident que la couverture du plan u-v du réseau  $A_B$  est plus concentrique et a une distribution angulaire plus uniforme que celle du réseau  $A_C$ . Par conséquent, le réseau  $A_B$  offre une meilleure couverture du plan u-v que réseau  $A_C$ .

Pour évaluer les performances des géométries  $A_C$  et  $A_B$ , le processus d’imagerie en radioastronomie est effectué. Nous avons sélectionné l’image de test M31, qui est basée sur une région  $H2$  dans la galaxie M31 et a été précédemment utilisée pour étudier des algorithmes d’imagerie pour les radiointerféromètres [14]. Le modèle discret de  $128 \times 128$  pixels de M31 est présenté dans la figure 2. Un algorithme d’imagerie basé sur EM avec une contrainte de parcimonie [15] est appliqué ici. La figure 3 montre les images obtenues par les réseaux  $A_C$  et  $A_B$  pour un seul snapshot. De même, la figure 4 affiche les

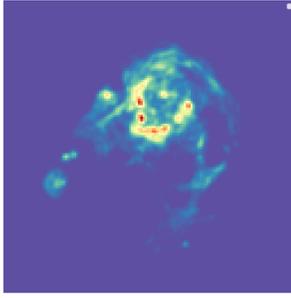


FIGURE 2 – Image du modèle M31.

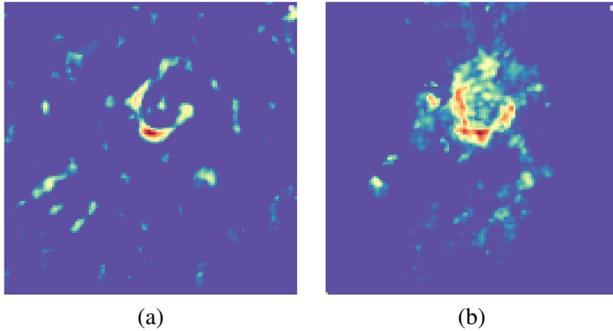


FIGURE 3 – Imagerie avec un snapshot : (a) le réseau  $A_C$  et (b) le réseau  $A_B$ .

images pour plusieurs snapshots en tenant compte de la rotation de la Terre. On remarque que le réseau  $A_B$  fournit une qualité d'image constamment meilleure que l'antenne  $A_C$ . Comme le PSL du réseau  $A_B$  est inférieur à celui du réseau  $A_C$ , le réseau  $A_B$  est capable de fournir une estimation plus précise que le réseau  $A_C$  dans le cas où les sources sont étalées. Par conséquent, le critère BB est plus approprié que le critère BCR pour la conception d'antennes en radioastronomie.

## 6 Conclusion

Dans cet article, le problème de sélection dans un réseau d'antennes dans le domaine de l'imagerie en radioastronomie est étudié en comparant les critères d'optimisation basés sur la BCR et la BB. Les performances des deux géométries de réseau optimisées sont évaluées sur plusieurs critères, notamment la couverture du plan u-v, le PSL et des résultats d'imagerie en radioastronomie réalistes. Les résultats de simulation d'imagerie en radioastronomie montrent de manière cohérente que le critère BB est plus pertinent que le critère BCR. En fait, le BB permet d'obtenir un compromis entre la largeur du lobe principal et le PSL, ce qui résulte de la minimisation de l'EQM d'une source ponctuelle et permet d'obtenir une bonne précision d'estimation tout en réduisant l'ambiguïté. Par conséquent, le critère BB est plus approprié pour l'optimisation de réseau d'antennes dans le problème de l'imagerie en radioastronomie.

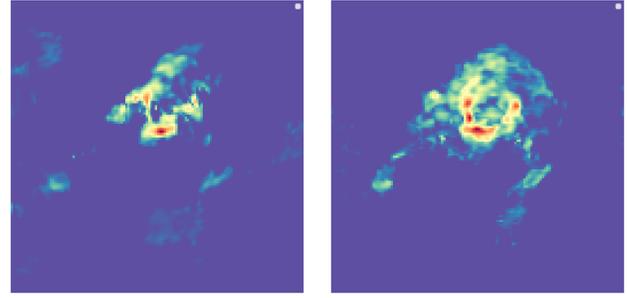


FIGURE 4 – Imagerie exploitant la rotation de la Terre : (a) le réseau  $A_C$  et (b) le réseau  $A_B$ .

## Références

- [1] S. Joshi and S. Boyd, "Sensor selection via convex optimization," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 2, pp. 451–462, 2008.
- [2] J. P. Delmas, M. N. El Korso, H. Gazzah, and M. Castella, "CRB analysis of planar antenna arrays for optimizing near-field source localization," *Signal Processing*, vol. 127, pp. 117–134, 2016.
- [3] M. N. El Korso, A. Renaux, R. Boyer, and S. Marcos, "Deterministic performance bounds on the mean square error for near field source localization," *IEEE transactions on signal processing*, vol. 61, no. 4, pp. 871–877, 2012.
- [4] P. Zarka, M. Tagger, L. Denis, J. Girard, A. Konovalenko, M. Atemkeng, M. Arnaud, S. Azarian, M. Barsuglia, A. Bonafede *et al.*, "NenUFAR : Instrument description and science case," in *2015 International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT)*. IEEE, 2015, pp. 1–6.
- [5] M. Morelande and B. Ristic, "Signal-to-noise ratio threshold effect in track before detect," *IET radar, sonar & navigation*, vol. 3, no. 6, pp. 601–608, 2009.
- [6] A. R. Thompson, J. M. Moran, and G. W. Swenson, *Interferometry and synthesis in radio astronomy*. Springer Nature, 2017.
- [7] R. McAulay and E. Hofstetter, "Barankin bounds on parameter estimation," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 17, no. 6, pp. 669–676, 1971.
- [8] S. J. Wijnholds and A.-J. van der Veen, "Fundamental imaging limits of radio telescope arrays," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 2, no. 5, pp. 613–623, 2008.
- [9] A. Quinlan, E. Chaumette, and P. Larzabal, "A direct method to generate approximations of the Barankin bound," in *2006 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing Proceedings*, vol. 3. IEEE, 2006, pp. 3259–3262.
- [10] J. M. Hammersley, "On estimating restricted parameters," *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 12, no. 2, pp. 192–240, 1950.
- [11] J. Tabrikian and J. L. Krolik, "Barankin bounds for source localization in an uncertain ocean environment," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 11, pp. 2917–2927, 1999.
- [12] S. P. Chepuri and G. Leus, "Sparsity-promoting sensor selection for non-linear measurement models," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 63, no. 3, pp. 684–698, 2014.
- [13] S. Liu, S. P. Chepuri, M. Fardad, E. Maşazade, G. Leus, and P. K. Varshney, "Sensor selection for estimation with correlated measurement noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, no. 13, pp. 3509–3522, 2016.
- [14] R. E. Carrillo, J. D. McEwen, and Y. Wiaux, "Purify : a new approach to radio-interferometric imaging," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 439, no. 4, pp. 3591–3604, 2014.
- [15] Y. Mhiri, M. N. El Korso, A. Breloy, and P. Larzabal, "A robust em algorithm for radio interferometric imaging in the presence of outliers," in *2022 IEEE Workshop on Signal Processing Systems (SIPS)*. IEEE, 2022, pp. 1–5.