

# Décomposition tensorielle en termes blocs contrainte pour la mesure non invasive de la complexité de la fibrillation atriale persistante

Vicente ZARZOSO<sup>1</sup> Lucas ABDALAH<sup>2</sup> Pedro M. R. DE OLIVEIRA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Université Côte d'Azur, CNRS, Laboratoire I3S, UMR 7271, Les Algorithmes, Euclide-B, 2000 route des Lucioles, 06903 Sophia Antipolis, France

<sup>2</sup>Departamento de Engenharia de Teleinformática, Bloco 725, Universidade Federal do Ceará, Acesso Público, 725 - s/n - Pici, 60455-970, Fortaleza - CE, Brésil

<sup>3</sup>BioSerenity, 20 Rue Berbier du Mets, 75013 Paris, France

**Résumé** – Les décompositions tensorielles sont devenues un outil incontournable dans l'analyse de données multidimensionnelles. Récemment, un nouvel algorithme appelé lasso groupé alterné contraint (*constrained alternating group lasso*, CAGL) a été proposé pour calculer la décomposition en termes blocs (*block term decomposition*, BTM), permettant à la fois d'identifier la structure du modèle tensoriel et les facteurs de la décomposition. CAGL a été appliqué avec succès à la séparation de la source d'activité atriale à partir de l'électrocardiogramme (ECG) pour l'étude non invasive de la fibrillation atriale (FA) persistante, l'arythmie cardiaque soutenue la plus fréquente. La présente contribution se penche sur l'interprétation physiologique et l'intérêt clinique des résultats fournis par CAGL dans le cadre de l'ablation par cathéter, une thérapie de plus en plus utilisée pour le traitement de la FA. Sur une base de données composée de 59 segments ECG provenant de 20 patients atteints de FA persistante ayant subi une ablation, CAGL montre sa capacité, d'une part, à quantifier la complexité de la FA en cohérence avec l'évolution attendue au cours de l'intervention et, d'autre part, à prédire la récurrence de la FA après ablation. Ces résultats sont obtenus à partir de segments ECG très courts, d'à peine un battement cardiaque, permettant le suivi non invasif temps-réel de l'intervention.

**Abstract** – Tensor decompositions have become a key tool in multidimensional data analysis. Recently, a novel algorithm called constrained alternating group lasso (CAGL) has been put forward to compute the block term decomposition (BTM), allowing simultaneous tensor model structure identification and factor estimation. CAGL has been successfully applied to separate the atrial activity source from electrocardiogram (ECG) records for the noninvasive study of persistent atrial fibrillation, the most frequent sustained cardiac arrhythmia. The present contribution analyzes the physiological interpretation and clinical interest of CAGL's results in the framework of catheter ablation, an increasingly used therapy for treating AF. On a database composed of 59 ECG segments from 20 persistent AF patients undergoing ablation, CAGL shows its ability to quantify AF complexity in coherence with its expected evolution during the intervention and to predict AF recurrence after ablation. These results are obtained from very short ECG segments, of around a single heartbeat, allowing the real-time noninvasive monitoring of the intervention.

## 1 Introduction

Les décompositions tensorielles sont de plus en plus utilisées en traitement du signal, apprentissage statistique et, plus généralement, analyse de données, en raison de leur capacité à représenter des données multidimensionnelles et à révéler des relations entre les variables sous-jacentes. La décomposition en termes blocs (*block term decomposition*, BTM), notamment la LL1-BTM, permet la séparation de sources lorsque celles-ci peuvent être modélisées par des sommes d'exponentielles ou des fonctions rationnelles [1]. Le qualité de la décomposition dépend de l'identification préalable de la structure du modèle, c'est-à-dire du nombre de termes et du rang multilinéaire de chaque terme. Des écarts entre la vraie structure et la structure supposée peuvent nuire fortement à l'estimation des facteurs du modèle. Pour contourner cette difficulté, une famille d'algorithmes robustes a été proposée pour estimer à la fois la structure et les facteurs de la BTM [2]. Cette famille est basée sur un critère d'optimisation composé d'une norme mixte L2-L1, pénalisant les facteurs qui présentent un nombre significatif de colonnes à norme non nulle. Le critère est optimisé à l'aide d'un algorithme de descente par blocs de coordon-

nées, incluant un terme proximal pour garantir la convexité stricte des problèmes de minimisation associés. Une variante sous contrainte de l'algorithme est aussi développée, visant à imposer une structure particulière, p.ex., de Hankel, pour les facteurs matriciels au moyen d'approximations structurées de rang faible. Cette variante est appelée lasso groupé alterné contraint (*constrained alternating group lasso*, CAGL). L'algorithme a été appliqué avec succès à la séparation de la source d'activité atriale à partir de l'électrocardiogramme (ECG) de surface pour l'étude non invasive de la fibrillation atriale (FA) persistante, l'arythmie cardiaque soutenue la plus fréquente et une cause majeure d'accidents vasculaires cérébraux.

Si les résultats de séparation de sources fournis par l'approche tensorielle sont prometteurs, leur interprétation physiologique et intérêt clinique restent à confirmer. La présente contribution vise à approfondir ces aspects applicatifs potentiellement de grand intérêt en cardiologie. Pour ce faire, nous analysons à l'aide de CAGL une base de données d'une vingtaine de patients atteints de FA persistante ayant subi une ablation par cathéter, et évaluons le rang du facteur matriciel associé à l'activité atriale avant, après et au cours de l'intervention.

## 2 Notations

Nous adoptons les conventions mathématiques d'usage en traitement du signal. Les scalaires, vecteur, matrices et tenseurs sont représentés par des caractères minuscules ( $a, b, \dots$ ), minuscules gras ( $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ ), majuscules gras ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ ) et caligraphiques ( $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$ ), respectivement. L'opérateur transposition est noté  $(\cdot)^T$ ,  $\|\cdot\|_F$  est la norme de Frobenius et  $\circ$  le produit extérieur. Le symbole  $\mathbf{I}_N$  dénote la matrice identité de dimensions  $N \times N$ . Un tenseur  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$  d'ordre 3 à entrées  $a_{i_1 i_2 i_3}$  a comme tranches frontales les matrices  $\mathbf{A}_{\cdot i_3} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2}$ . Une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2}$  à entrées  $a_{i_1 i_2}$  a comme  $i_1$ ème ligne et  $i_2$ ème colonne les vecteurs  $\mathbf{a}_{i_1}$  et  $\mathbf{a}_{i_2}$ , respectivement. Le symbole  $\|\cdot\|$  dénote la norme L2 et  $\|\cdot\|_{2,1}$  la norme mixte L2-L1, définie pour une matrice arbitraire  $\mathbf{A}$  avec  $I_2$  colonnes comme :

$$\|\mathbf{A}\|_{2,1} = \sum_{i_2=1}^{I_2} \|\mathbf{a}_{i_2}\|.$$

## 3 BTD-CAGL

### 3.1 Décomposition tensorielle en termes blocs

Un enregistrement ECG multi-électrode composé de  $K$  voies et  $N$  échantillons temporels peut être stocké de manière assez naturelle sous forme de matrice  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{K \times N}$ , dont l'entrée  $(i, j)$  est donnée par le  $j$ ème échantillon de la  $i$ ème voie ECG. Dans un cadre de séparation de sources, cette matrice peut s'exprimer comme la factorisation :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{S}^T = \sum_{r=1}^R \mathbf{m}_r \mathbf{s}_r^T \quad (1)$$

où les colonnes du facteur matriciel  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N \times R}$ , notées  $\mathbf{s}_r$ , représentent les variations temporelles ou signaux sources contribuant à l'ECG multi-électrode à travers les facteurs spatiaux  $\mathbf{m}_r$ , les colonnes de la matrice de mélange  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{K \times R}$ ,  $1 \leq r \leq R$ , modélisant la propagation des sources électriques cardiaques entre le cœur et la surface du corps du patient.

Sans autres hypothèses, l'unicité du modèle (1) n'est pas garantie. Des techniques matricielles telles que l'analyse en composantes principales ou indépendantes (PCA, ICA) contournent le problème en imposant certaines contraintes structurelles et statistiques sur la matrice de mélange (orthogonalité des colonnes) et les sources (décorrélation, indépendance). Si elles sont intéressantes du point de vue mathématique, ces contraintes peuvent manquer de consistance physiologique.

Le modèle de séparation de sources (1) admet aussi une formalisation tensorielle garantissant l'unicité sans hypothèses additionnelles. Pour y aboutir, chaque ligne de la matrice d'observation  $\mathbf{Y}$  est d'abord transformée en une matrice dite de Hankel :

$$\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathbf{H}_Y^{(k)} \in \mathbb{R}^{I \times J}$$

$$[\mathbf{H}_Y^{(k)}]_{ij} \triangleq y_{k, i+j-1}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J$$

avec  $I = J = \frac{N+1}{2}$  pour  $N$  impair ou  $I = \frac{N}{2}$  and  $J = \frac{N}{2} + 1$  pour  $N$  pair. Un tenseur  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$  d'ordre 3 peut alors être construit en rangeant les matrices de Hankel  $\mathbf{H}_Y^{(k)}$  des

différentes voies sur les tranches matricielles du mode 3, c-à-d frontales, du tenseur :

$$\mathcal{Y}_{\cdot \cdot k} = \mathbf{H}_Y^{(k)} \quad 1 \leq k \leq K.$$

Par linéarité de la bijection de Hankel, il s'avère que

$$\mathbf{H}_Y^{(k)} = \sum_{r=1}^R m_{kr} \mathbf{H}_S^{(r)}$$

et, après quelques manipulations algébriques, le tenseur ECG peut s'exprimer comme :

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \mathbf{H}_S^{(r)} \circ \mathbf{m}_r. \quad (2)$$

Supposant que  $\text{rang}(\mathbf{H}_S^{(r)}) = L_r$ , l'éqn. (2) définit la LL1-BTD du tenseur  $\mathcal{Y}$ , ou décomposition en termes blocs avec rang multilinéaire  $(L_r, L_r, 1)$ ,  $1 \leq r \leq R$ . Les conditions d'unicité de la BTD ont été étudiées ailleurs dans la littérature [1], et ne seront pas détaillées ici. Il suffira de mentionner qu'elles sont vraisemblablement respectées dans l'application biomédicale à laquelle on s'intéresse.

### 3.2 Algorithme lasso groupé contraint

En raison de leur rang, les facteurs matriciels  $\mathbf{H}_S^{(r)}$  admettent la factorisation  $\mathbf{H}_S^{(r)} = \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T$ , où  $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{I \times L_r}$  et  $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{I_2 \times L_r}$  ont rang colonne complet  $L_r$ . La BTD approximée peut être calculée par la minimisation de la distance euclidienne entre le tenseur observé  $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$  et un modèle avec structure fixée à l'avance :

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \triangleq \left\| \mathcal{Y} - \sum_{r=1}^R (\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T) \circ \mathbf{c}_r \right\|_F^2. \quad (3)$$

Les algorithmes basés sur ce critère dépendent fortement de l'initialisation des facteurs et ils imposent une certaine connaissance a priori de sa structure, c-à-d ils assument des valeurs pré-définies du nombre de blocs  $R$  et de leur rangs  $L_r$ . Des écarts entre la structure assumée et la vraie structure peuvent avoir un impact important sur l'estimation du modèle. Pour palier ces inconvénients, une famille d'algorithmes robustes a été proposée pour estimer à la fois les facteurs et la structure de la BTD [2], que nous rappelons par la suite.

Plutôt que d'utiliser une structure fixe pour la BTD comme dans l'éqn. (3), l'idée est d'inclure un terme de pénalisation promouvant un nombre réduit de blocs à rang faible :

$$F(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \triangleq f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) + \gamma g(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \quad (4)$$

où  $\gamma > 0$  est un paramètre de régularisation et  $g$  une fonction de régularisation de la forme :

$$g(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \triangleq \|\mathbf{A}\|_{2,1} + \|\mathbf{B}\|_{2,1} + \|\mathbf{C}\|_{2,1}.$$

Dû aux propriétés géométriques de la norme mixte L2-L1, ce critère combiné induit des solutions où les facteurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{C}$  ont des colonnes nulles, pour des valeurs de  $\gamma$  suffisamment élevées, permettant la sélection des blocs de rang faible pertinents. Le critère est minimisé par moindre carrés alternés. Cette méthode est donc appelée algorithme lasso groupé alterné (*alternating group lasso*, AGL) et peut être considérée comme une généralisation du principe d'estimation lasso.

Sous l'hypothèse structurelle des facteurs matriciels, les termes  $\mathbf{H}_g^{(r)}$  doivent appartenir au sous-espace des matrices de Hankel de dimensions  $(I \times J)$ , noté  $\mathcal{S}_H$ . Les tranches matricielles du mode 3  $\mathcal{Y}_{..k}$  du tenseur observé ont une structure de Hankel par construction. Cependant, les solutions  $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}})$  du critère (4) ne satisfont pas forcément  $\hat{\mathbf{A}}_r \hat{\mathbf{B}}_r^T \in \mathcal{S}_H$ , à cause du bruit et des imperfections dans la modélisation. Pour assurer la structure Hankel des facteurs matriciels après convergence des itérations alternées, on cherche une approximation structurée de rang faible, suivant l'algorithme de Cadzow. Cet algorithme construit des projections alternées sur le sous-espace de Hankel  $\mathcal{S}_H$  et celui des matrices de rang  $L_r$ , de manière à garantir  $\hat{\mathbf{H}}_r \approx \hat{\mathbf{A}}_r \hat{\mathbf{B}}_r^T \in \mathcal{S}_H$ . La minimisation du critère (4) par moindres carrés alternés suivie de l'algorithme de Cadzow donne lieu à l'algorithme AGL contraint (*constrained AGL*, *CAGL*) [2].

### 3.3 Indice de complexité de la FA basé sur la modélisation tensorielle

Dans le modèle de Hankel, le rang du facteur matriciel associé à la source atriale est lié au nombre de termes exponentiels, ou pôles, qui génèrent la source. Ce résultat découle de la décomposition de Vandermonde des matrices de Hankel. Plus le nombre de pôles est élevé et plus le signal associé peut être considéré complexe. Par conséquent, nous postulons que ce rang peut être utilisé de manière assez naturelle comme indice non invasif de la complexité de l'activité atriale pendant la FA.

## 4 Évaluation des indices de complexité

Les algorithmes pour la BTD décrits dans la section précédente réussissent la séparation de sources sur l'ECG, permettant l'extraction non invasive de la source d'activité atriale chez les patients atteints de FA persistante [2]. Néanmoins, l'interprétation physiologique et l'intérêt clinique des résultats fournis par l'approche tensorielle restent à discerner. Pour ce faire, nous évaluons les résultats de l'extraction de l'activité atriale, et plus particulièrement l'indice de complexité dérivé du rang de sa matrice de Hankel, dans le cadre de la thérapie d'ablation par cathéter.

### 4.1 Ablation par cathéter

Parmi les traitements de la FA, l'ablation par cathéter devient la thérapie de choix en raison de son bon taux de réussite à long terme [3]. Cette thérapie consiste en l'insertion d'un tube fin, appelé cathéter, à travers la veine fémorale jusqu'au cœur du patient. Le cathéter est équipé d'électrodes qui permettent au cardiologue interventionnel de visualiser les signaux électriques sur les points de la paroi atriale où le cathéter est situé. La cartographie électroanatomique des oreillettes du patient est dressée en déplaçant le cathéter sur la surface atriale. Le cardiologue ramène ensuite le cathéter vers les zones considérées responsables de la genèse et du maintien de l'arythmie, puis les ablate (brûle) en appliquant de l'énergie de radiofréquence d'une certaine puissance. En supprimant ainsi des zones de conduction électrique anormale au sein des oreillettes, l'ablation arrive à arrêter la FA dans un nombre significatif des cas. Par conception de la procédure, la complexité de la

propagation électrique atriale diminue au fur et à mesure de l'intervention.

### 4.2 Étude expérimentale

Notre base de données est composée de  $n_p = 20$  patients atteints de FA persistante, traités par ablation au Service cardiologie du Centre hospitalier Princesse Grace de Monaco. Le protocole utilisé est celui dit "pas à pas", où l'on vise d'abord des foyers ectopiques déclenchant l'arythmie autour des veines pulmonaires, puis d'autres zones dites de substrat présentant des phénomènes de propagation électrique anormale décrits dans la littérature, tels que les potentiels fragmentés et les rotors, associés au maintien de la fibrillation. L'ECG est acquis tout au long de l'intervention, à une fréquence d'échantillonnage de 977 Hz. Pour étudier l'évolution de la complexité au cours de l'ablation, celle-ci est divisée en trois stades :

- (i) *initial* : état basal, avant de démarrer la procédure ;
- (ii) *intermédiaire* : après chaque pas d'ablation, incluant la première et l'avant-dernière étape ;
- (iii) *final* : après la dernière étape, avant arrêt de la FA.

Cette division fournit un total de  $n_r = 59$  enregistrements ECG. Pour chaque stade on identifie le segment QQ de l'ECG avec le plus long intervalle TQ et on l'analyse avec BTDCAGL comme détaillé dans la section 3. La durée des segments ECG traités par CAGL est d'entre 0.72 et 1.42 s (moyenne  $\pm$  écart type =  $1.06 \pm 0.2$  s). L'indice tensoriel est comparé à l'indice de composante non dipolaire (*non dipolar component index*, *NDI*), obtenu à partir de la décomposition en valeurs singulières de la matrice ECG sur les segments TQ [4]. Nous l'appliquons sur des segments ECG de 12 s, comme préconisé dans [4].

### 4.3 Évolution au cours de l'ablation

Pour évaluer l'impact de l'ablation sur la complexité de la FA, la fig. 1 présente les diagrammes en violon des enregistrements regroupés par stade pour les deux indices non invasifs. À signaler que l'indice matriciel NDI ne réussit pas à fournir de résultat pour 4 ECGs, comme indiqué par les valeurs plus faibles de  $n_r$  affichées sur le tracé.

Les deux indices de complexité diminuent tout au long de l'ablation, avec leurs valeurs les plus faibles atteintes à la fin de l'intervention. Bien que les deux méthodes montrent une tendance vers des signaux plus organisés à mesure que la procédure approche de la terminaison de la FA, l'inspection visuelle révèle que le CAGL présente une diminution de la complexité par étape plus nette et significative que NDI.

### 4.4 Complexité et récurrence

On s'intéresse également au lien entre la complexité de l'activité atriale pré-ablation et la récurrence de FA, c-à-d le temps écoulé entre la fin de la procédure et la récurrence de l'arythmie. Dans les nuages de points de la fig. 2, CAGL montre une corrélation de Pearson statistiquement significative ( $r = -0.63$ ,  $p = 0.005$ ). Cette corrélation négative est cohérente avec la notion de complexité : plus la FA est complexe avant ablation et moins longtemps le patient reste libre d'arythmie avant récurrence après ablation. L'indice matriciel, en revanche, ne présente pas de corrélation significative ( $r = -0.14$ ,  $p = 0.591$ ).

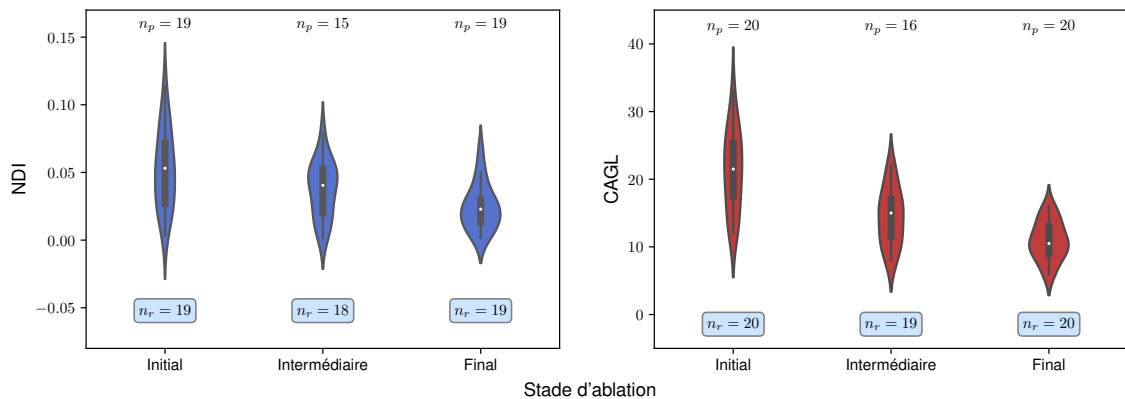


FIGURE 1 : Évolution des indices de complexité NDI (gauche) et CAGL (droite) tout au long des stades de l’ablation : initial (avant ablation), intermédiaire (après chaque étape, y compris la première et l’avant-dernière étape), final (après la dernière étape, avant terminaison de la FA). Les symboles  $n_p$  et  $n_r$  représentent, respectivement, le nombre de patients et d’enregistrements ECG contribuant à chaque stade.

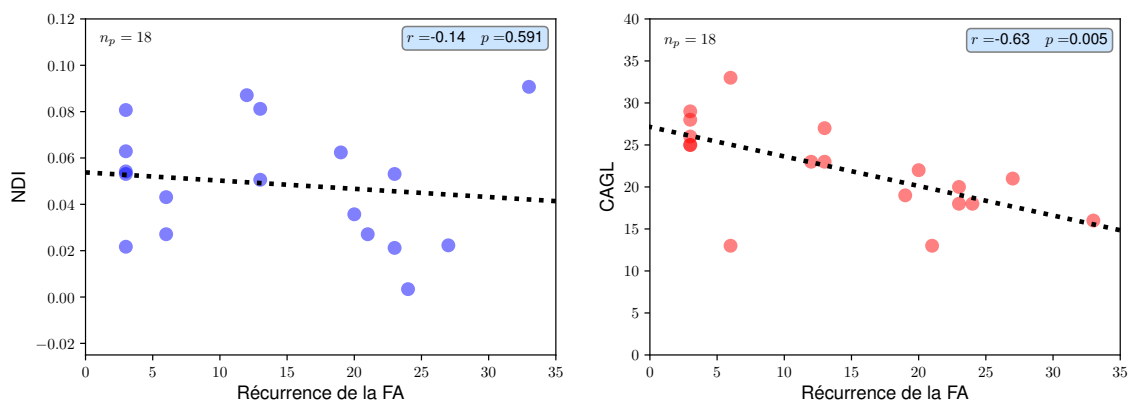


FIGURE 2 : Corrélation entre les indices de complexité initiaux (pré-ablation) et la récurrence de la FA (temps, mesuré en mois, écoulé entre la fin de la procédure et la récurrence de FA).

## 5 Conclusion

Le rang de la matrice de Hankel associée à la source atriale estimée par CAGL sur l’ECG de surface est capable de quantifier de manière non invasive la complexité de la FA en cohérence avec l’évolution attendue au cours de l’ablation. L’indice tensoriel calculé avant la thérapie est aussi prédictif de la récurrence de la FA après l’intervention. Ces résultats montrent que la modélisation tensorielle de l’ECG reflète l’électrophysiologie sous-jacente à l’arythmie. Par ailleurs, le modèle BTD présente un intérêt clinique car, d’une part, il a une valeur pronostique de l’issue de l’ablation et, d’autre part, il offre la possibilité d’effectuer un suivi non invasif temps-réel de l’intervention, à partir de segments ECG très courts, d’à peine un battement cardiaque. En revanche, l’indice basé sur la décomposition matricielle en valeurs singulières de l’ECG offre des performances nettement moins concluantes, soulignant davantage l’intérêt de l’approche tensorielle. Pour ces raisons, celle-ci pourrait s’avérer utile dans la définition de protocoles d’ablation plus efficaces. Afin de valider leur signification statistique, ces résultats préliminaires doivent être confirmés par une nouvelle étude sur une base de données plus importante.

**Remerciements.** Ce travail a été soutenu en partie par le Programme d’investissement d’avenir 3IA Côte d’Azur financé par l’Agence nationale de la recherche (ANR), avec numéro de référence ANR-19-P3IA-0002. V. Zarzoso détient la chaire “IAblation” du 3IA Côte

d’Azur. La Fondation du Céara pour le soutien du développement scientifique et technologique (FUNCAP) a accordé une bourse de Master à L. Abdalah. Les auteurs sont aussi reconnaissants du financement du projet “INTERACTION” (Ma-985-23) par le programme CAPES-COFECUB.

## Références

- [1] Lieven DE LATHAUWER : Blind separation of exponential polynomials and the decomposition of a tensor in rank- $(l_r, l_r, 1)$  terms. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 32(4):1451–1474, 2011.
- [2] J. H. de M. GOULART, P. M. R. DE OLIVEIRA, R. C. FARIAS, V. ZARZOSO et P. COMON : Alternating group lasso for block-term tensor decomposition and application to ECG source separation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 68:2682–2696, 2020.
- [3] C. T. JANUARY, L. Samuel WANN, Hugh CALKINS, Joaquin E. CIGARROA *et al.* : 2019 AHA/ACC/HRS focused update of the 2014 AHA/ACC/HRS guideline for the management of patients with atrial fibrillation. *Journal of the American College of Cardiology*, 74(1):104–132, 2019.
- [4] M. MEO, T. PABRUM, N. DERVAL, C. DUMAS-POMIER, S. PUYO, J. DUCHÂTEAU, M. Hocini P. JAÏS, M. HAÏSSA-GUERRE et R. DUBOIS : Noninvasive assessment of atrial fibrillation complexity in relation to ablation characteristics and outcome. *Frontiers in Physiology*, 9(929), 2018.