

Approximations parcimonieuses et localisation de sources complexes ou en environnement réverbérant

Gilles Chardon

Peyresq 2017

Plan

- 1 Approximations parcimonieuses, compressed sensing
- 2 Localisation en environnement réverbérant
- 3 Localisation de sources complexes

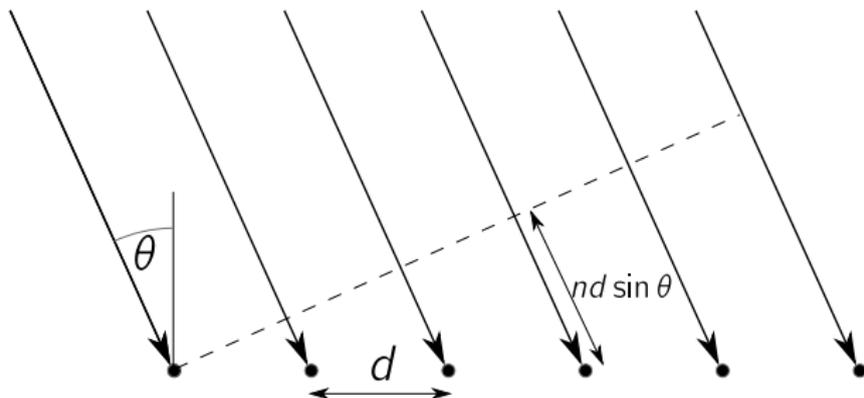
- 1 Approximations parcimonieuses, compressed sensing
 - Localisation de source
 - Parcimonie, compressed sensing
 - MUSIC et parcimonie
- 2 Localisation en environnement réverbérant
- 3 Localisation de sources complexes

Localisation de source

À partir de mesures sur un réseau de capteurs, identifier les directions d'arrivée des sources.

Champ rayonné par une source à l'infini sur un réseau linéaire de capteurs espacés de d :

$$p_n = \alpha e^{indk \sin \theta} = \alpha a(\theta)$$



Méthodes courantes : beamforming, MUSIC, etc.

Localisation de source - problème inverse

Le problème de localisation de source peut être vu comme la résolution d'un système linéaire sous-déterminé.

En discrétisant les directions d'arrivée possibles θ_m , on construit la matrice A dont les colonnes sont les $a(\theta_m)$

En supposant que les θ_m contiennent les vrais directions, et en absence de bruit, les mesures s'écrivent

$$p = A\alpha$$

où α est un vecteur contenant les amplitudes, quasi-toutes nulles.

La matrice A étant généralement plus large que haute, le système a une infinité de solutions.

Première tentative : moindres carrés

Première idée : solution moindres carrés :

$$\tilde{\alpha} = \operatorname{argmin} \|\alpha\|_2^2 \text{ s.c. } p = A\alpha$$

Résolution par la pseudo-inverse :

$$\tilde{\alpha} = A^\dagger p = A^*(AA^*)^{-1}p$$

Première tentative : moindres carrés

Première idée : solution moindres carrés :

$$\tilde{\alpha} = \operatorname{argmin} \|\alpha\|_2^2 \text{ s.c. } p = A\alpha$$

Résolution par la pseudo-inverse :

$$\tilde{\alpha} = A^\dagger p = A^*(AA^*)^{-1}p$$

Dans le cas le plus fréquent ($A \approx$ Fourier, et $AA^* \propto I$), on retrouve le beamforming :

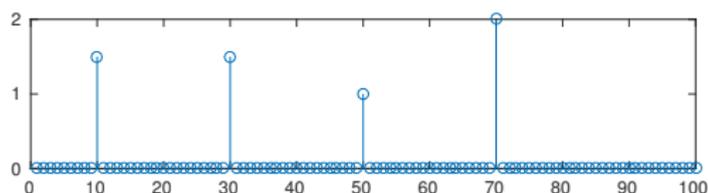
$$\tilde{\alpha} \propto A^*p$$

On a oublié le fait que peu de sources sont présentes.

- 1 Approximations parcimonieuses, compressed sensing
 - Localisation de source
 - **Parcimonie, compressed sensing**
 - MUSIC et parcimonie
- 2 Localisation en environnement réverbérant
- 3 Localisation de sources complexes

Parcimonie

Le vecteur des amplitudes α a très peu de coefficients non nuls : il est **parcimonieux**.



La parcimonie de ce vecteur peut être utilisée pour résoudre le système linéaire. On recherche la solution de

$$p = A\alpha$$

ayant le plus de coefficients nuls.

Parcimonie

On remplace le problème de moindres carrés

$$\tilde{\alpha} = \operatorname{argmin} \|\alpha\|_2^2 \text{ s.c. } p = A\alpha$$

par le problème

$$\tilde{\alpha} = \operatorname{argmin} \|\alpha\|_0 \text{ s.c. } p = A\alpha$$

où la “norme” ℓ_0 compte le nombre de coefficients non nuls de α :

$$\|x\|_0 = \#\{x_n \neq 0\}$$

Condition suffisante : toute sous-matrice de $2s$ colonnes de A est inversible :

$$A(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Complexité algorithmique

La norme ℓ_0 se définit simplement, mais n'a pas de propriété intéressante.

Pour obtenir la solution de

$$\tilde{\alpha} = \operatorname{argmin} \|\alpha\|_0 \text{ s.c. } p = A\alpha$$

il est nécessaire de tester tous les supports possibles de taille s .

Complexité algorithmique

La norme ℓ_0 se définit simplement, mais n'a pas de propriété intéressante.

Pour obtenir la solution de

$$\tilde{\alpha} = \operatorname{argmin} \|\alpha\|_0 \text{ s.c. } p = A\alpha$$

il est nécessaire de tester tous les supports possibles de taille s .

Ce coût est totalement prohibitif. Pour 1000 directions discrétisées et 5 sources, il faut résoudre $\binom{1000}{5}$ systèmes linéaires.

En supposant que l'on puisse résoudre un million de systèmes par secondes, le calcul dure 100 jours.

Basis Pursuit

Pour rendre le calcul possible, on remplace la norme ℓ_0 par la norme ℓ_1 :

$$\|x\|_1 = \sum_n |x_n|$$

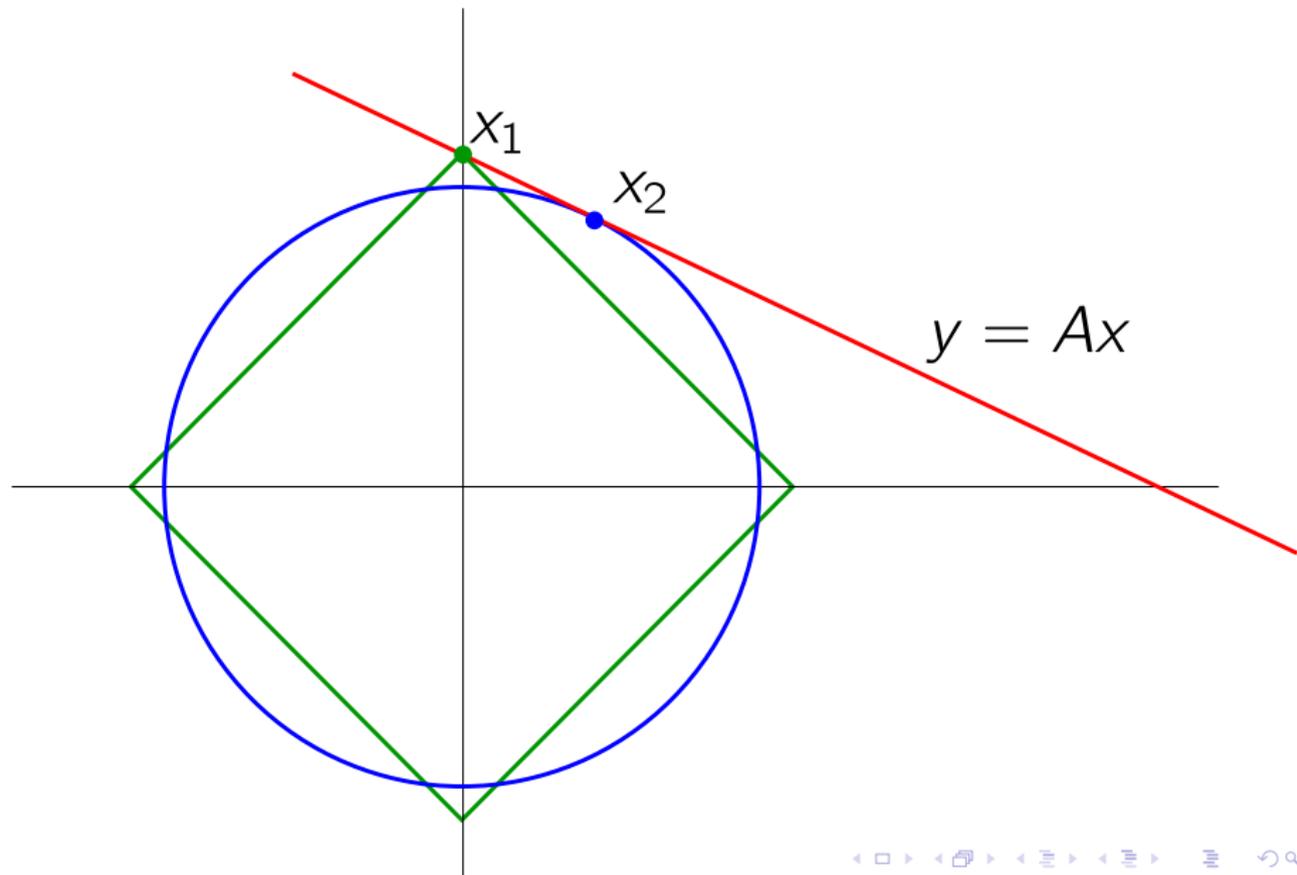
Le problème Basis Pursuit

$$\tilde{\alpha} = \operatorname{argmin} \|\alpha\|_1 \text{ s.c. } p = A\alpha$$

a, sous certaines conditions, la même solution que le problème de minimisation ℓ_0 .

Ce problème est **convexe** : il a un unique minimum global, et peut être résolu par des algorithmes de type descente de sous-gradient, algorithmes proximaux, etc.

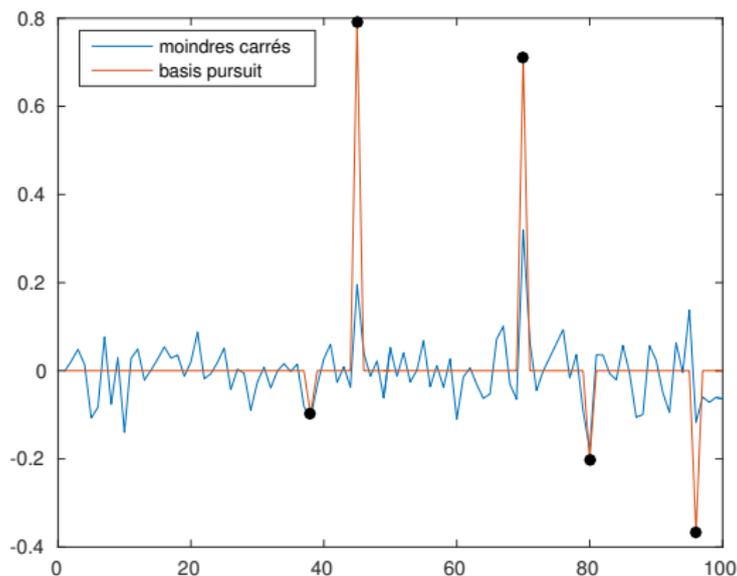
Basis Pursuit - interprétation graphique



Exemple élémentaire

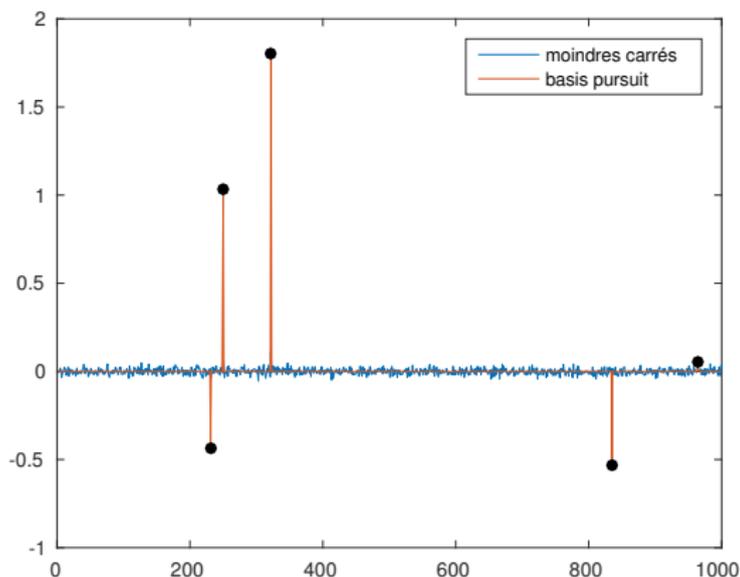
Matrice à coefficients gaussiens

Vecteur de longueur 100, 5 coefficients non nuls, 30 mesures.



Exemple élémentaire

Vecteur de longueur 1000, 5 coefficients non nuls, 50 mesures.



Temps de calcul : 0.1 s. (avec CVX, code de minimisation convexe générique))

Cas bruité

En conditions réelles, il y a toujours du bruit :

- bruit des capteurs
- erreurs de modèle
- calibration des capteurs
- discrétisation des directions

En première approche, on regroupe toutes ces perturbations dans un terme global :

$$p = A\alpha + n$$

Cas bruité : Basis Pursuit DeNoising

Le problème de Basis Pursuit ne permet pas de prendre en compte le bruit.

On assouplit la contrainte :

$$\tilde{\alpha} = \operatorname{argmin} \|\alpha\|_1 \text{ s.c. } \|\mathbf{p} - A\alpha\|_2 \leq \varepsilon$$

ou on utilise une version pénalisée :

$$\tilde{\alpha} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{p} - A\alpha\|_2^2 + \lambda\|\alpha\|_1$$

le coefficient λ réglant le compromis entre fidélité aux mesures et confiance en l'a priori (parcimonie).

Ces deux problèmes sont équivalents.

Application à la localisation de sources

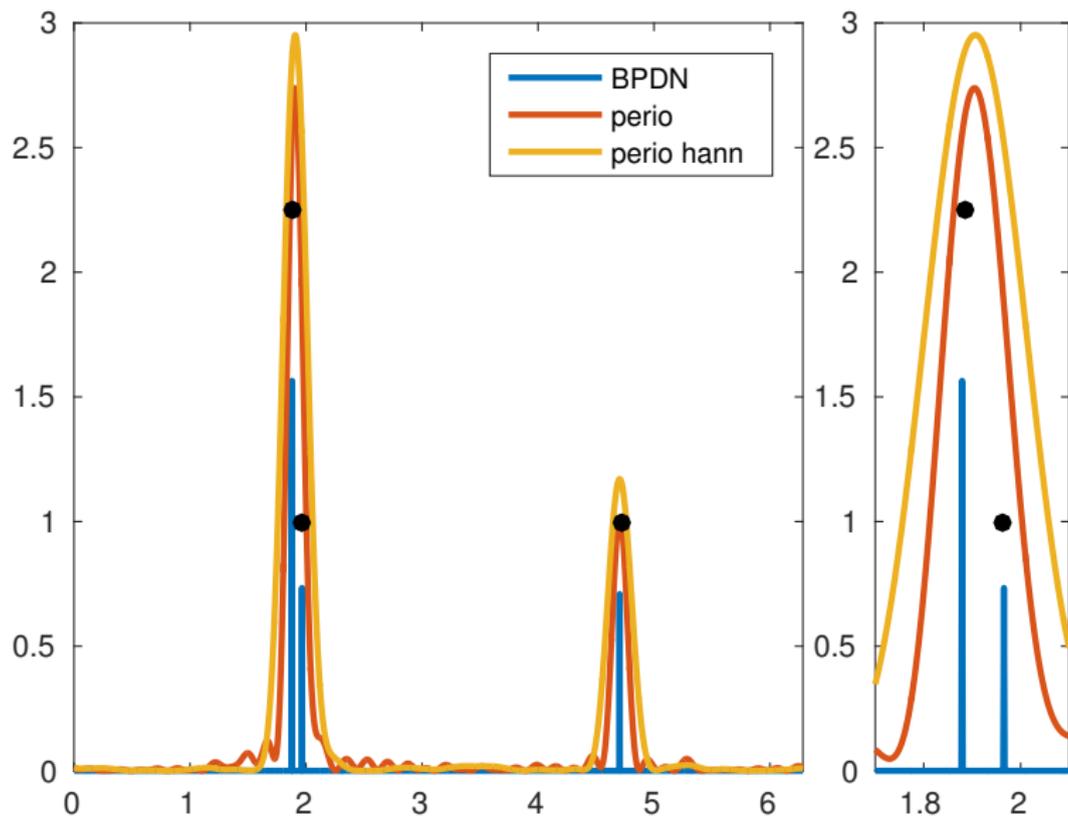
Cas simple :

- 3 sources
- 40 capteurs ($\lambda/2$)
- discrétisation sur 4000 directions
- 1 snapshot

Comparaison entre

- périodogramme
- périodogramme avec fenêtre de Hann
- BPDN

Localisation ℓ_1



Quelques commentaires :

- meilleure résolution que le beamforming
- avec un seul snapshot
- mais biais pour l'estimation des amplitudes

Une autre méthode de résolution : OMP

Orthogonal Matching Pursuit

Identification itérative des éléments non nuls du vecteur à estimer.

Déroulement :

- recherche du prochain coefficient non nul : max du beamforming
- projection sur l'orthogonal des sources identifiées
- répétition jusqu'à arrêt

Condition d'arrêt : nombre de sources ou norme du résiduel.

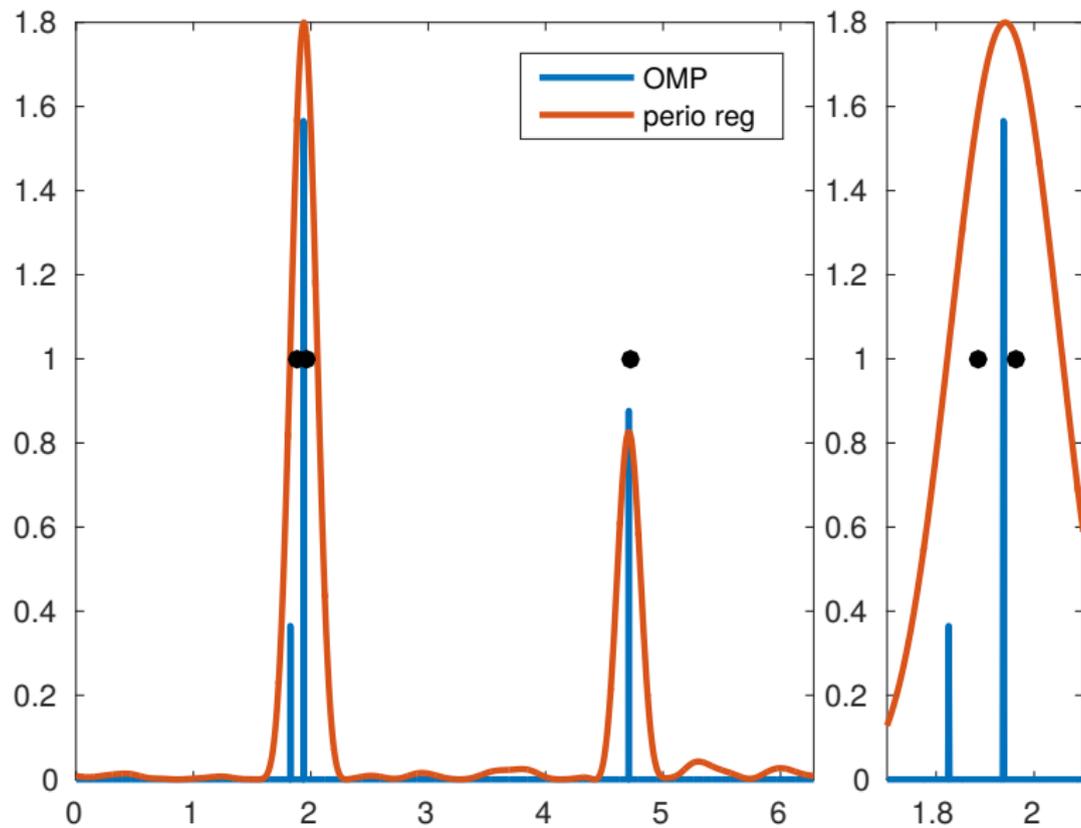
OMP : description formelle

Données : dictionnaire $D = \{d_j\}$, mesures y , $s = \emptyset$

- $c_j = d_j^* y$
- $j_m = \operatorname{argmax} |c_j|$
- $s = s \cup \{j_m\}$
- $y = \Pi_{D_s^\perp} y$

Sortie : indices sélectionnés s .

Localisation OMP



Orthogonal Matching Pursuit

Avantages :

- très simple à implémenter
- rapide pour un nombre faible de sources

Inconvénient :

- résolution comparable au beamforming.

La première étape d'OMP est identique au beamforming :

$$c = A^* p$$

OMP surtout utile pour éliminer les lobes secondaires (cf. CLEAN), qui peuvent être très importants dans certains cas (cf. plus loin).

Compressed sensing

La parcimonie permet de résoudre des problèmes sous-déterminés.

Pourquoi ne pas réduire volontairement le nombre d'équations ?

Compressed sensing : sous certaines conditions, il est possible de diminuer drastiquement le nombre de mesures (par ex. sans respecter le th. de Shannon), sans chute déraisonnable des performances.

Condition de reconstruction parfaite

On veut résoudre le problème linéaire

$$y = Ax$$

où x a s coefficients non nuls.

Si, pour tout vecteur x_{2s} à $2s$ coefficients non nuls,

$$(1 - \delta_{2s}) \|x_{2s}\|_2^2 \leq \|Ax_{2s}\|_2^2 \leq (1 + \delta_{2s}) \|x_{2s}\|_2^2$$

et

$$\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$$

alors Basis Pursuit reconstitue parfaitement x .

Vérification de la RIP

Impossible de vérifier la RIP en pratique, mais on a des résultats sur les matrices aléatoires (cf. livre de Foucart et Rauhut).

Pour une matrice de coefficients (sous-)gaussiens de taille $m \times N$, la s -RIP est vérifié avec probabilité ≈ 1 si

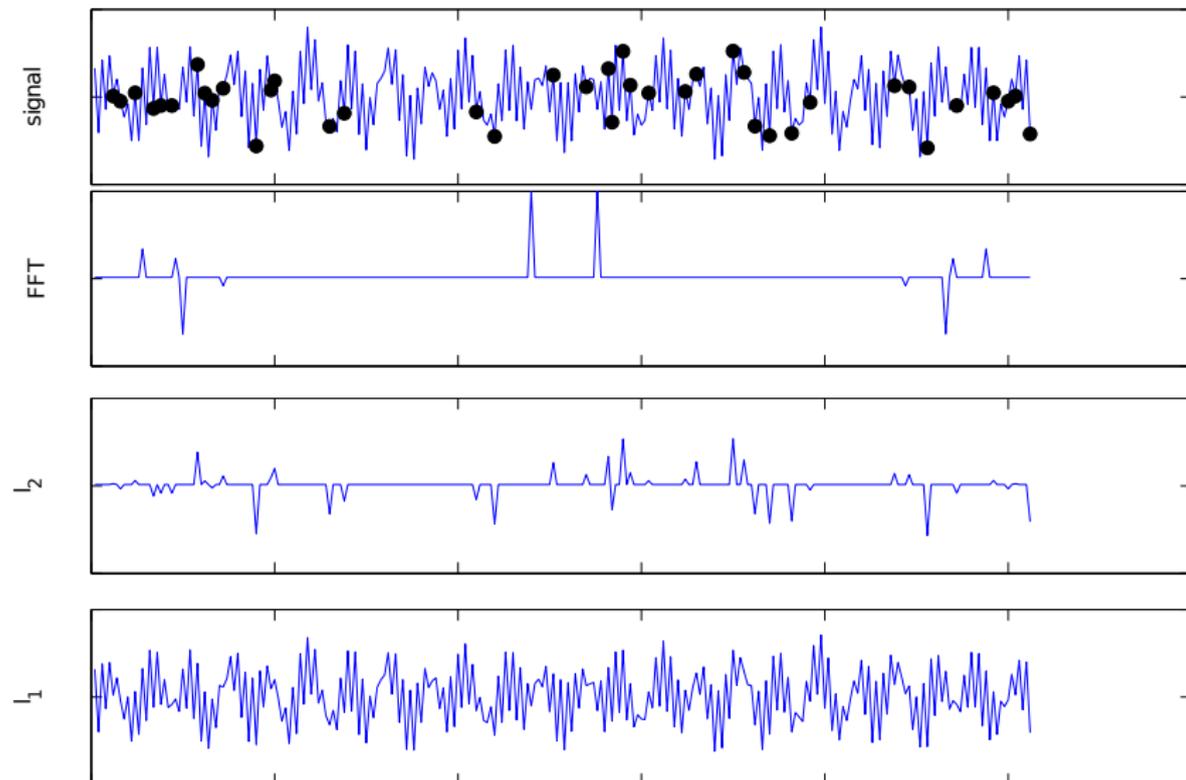
$$m \geq C\delta_s^{-2}s \ln(eN/s)$$

Pour une matrice de Fourier partielle de taille $m \times N$, il faut

$$m \geq C\delta_s^{-2}s \log^4 N.$$

m est linéaire par rapport aux nombre de coefficients non nuls (de sources), pas par rapport à la taille du vecteur (discrétisation).

Compressed sensing



Application à la localisation de source

La matrice A est une matrice de type Fourier.

On a exactement la matrice de Fourier si on prend une discrétisation des directions de taille N , et N capteurs espacés de $\lambda/2$.

Conséquence : un énorme nombre de capteurs si une résolution fine est nécessaire.

En appliquant le compressed sensing, on peut réduire le nombre de capteurs sans réduire l'étendue du réseau, et donc sa résolution.

- nombre de sources \leftrightarrow nombre de capteurs
- résolution \leftrightarrow taille du réseau

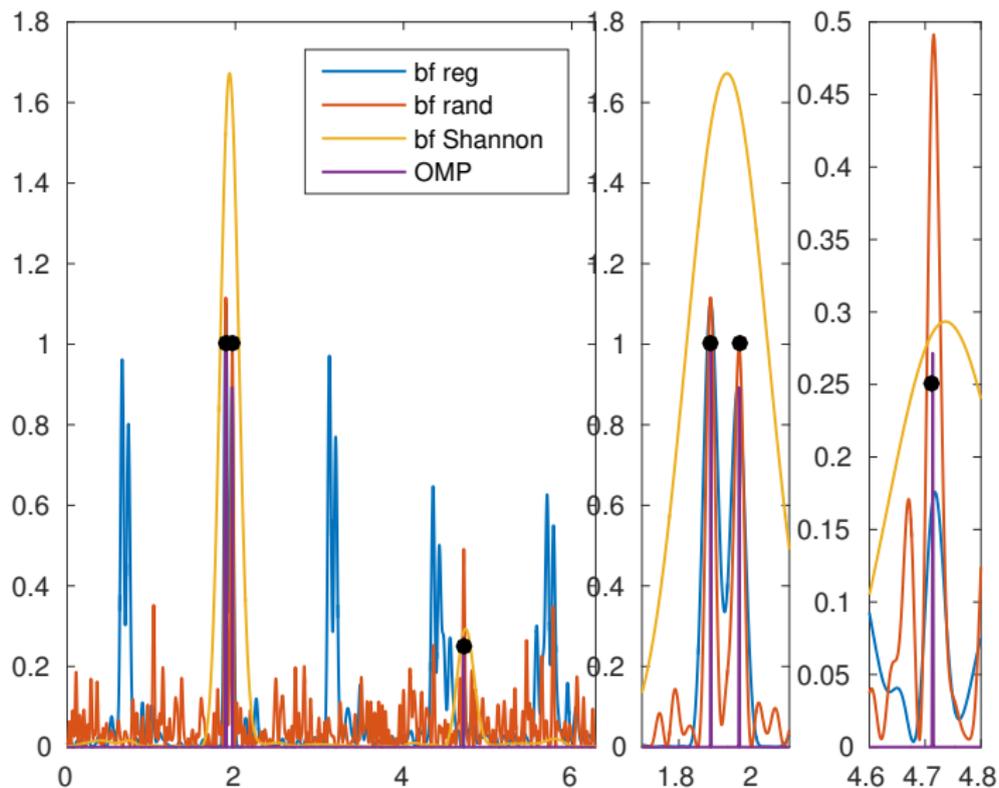
Exemple

- 3 sources
- 4000 directions possibles
- 40 capteurs

Comparaison entre

- BF $\lambda/2$
- BF $5\lambda/2$
- BF rand
- OMP rand

Résultats



- 1 Approximations parcimonieuses, compressed sensing
 - Localisation de source
 - Parcimonie, compressed sensing
 - MUSIC et parcimonie
- 2 Localisation en environnement réverbérant
- 3 Localisation de sources complexes

MUSIC vs. parcimonie

Article de Malioutov et al.¹

Méthode basée sur BPDN et SVD. Avec plusieurs snapshots,

$$P = A\alpha$$

où α est une *matrice* contenant les amplitudes des sources aux différents instants :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut interpréter MUSIC comme un algorithme de parcimonie conjointe.

¹D. Malioutov, M. Cetin, and A. S. Willsky. “A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays”. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 53.8 (Aug. 2005), pp. 3010–3022. ISSN: 1053-587X. DOI: 10.1109/TSP.2005.850882.

Parcimonie conjointe

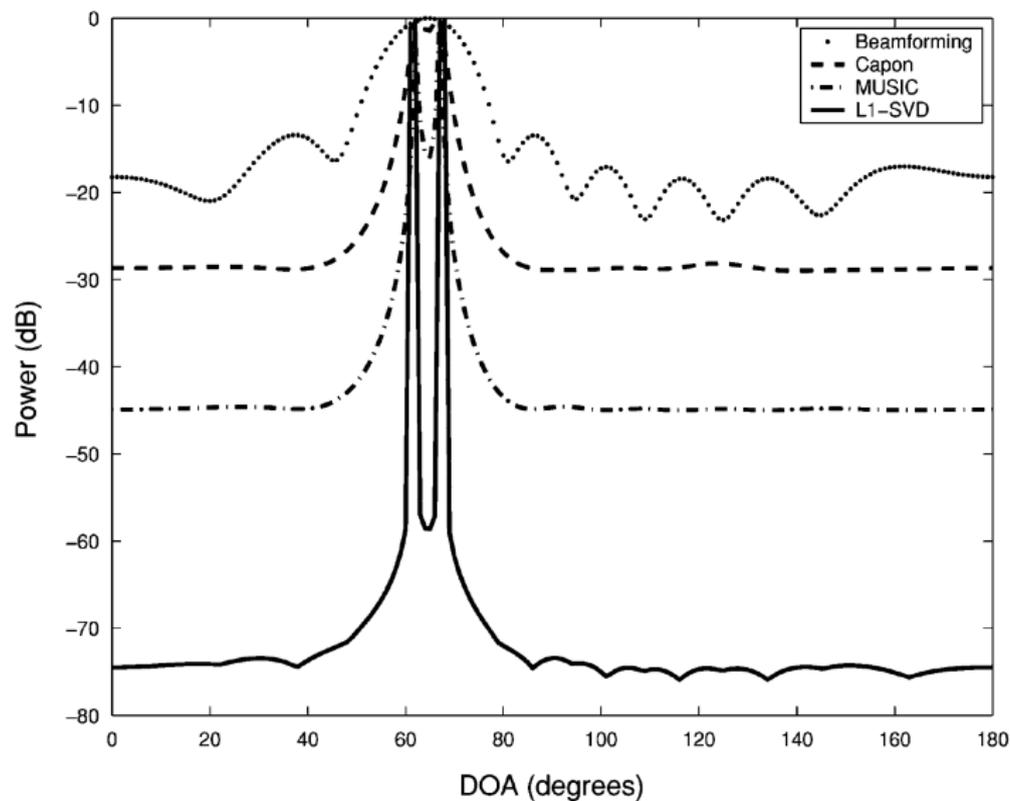
La matrice α a peu de lignes non nulles. On utilise la norme mixte $\ell_{1,2}$ définie par

$$\|x\|_{1,2} = \sum_k \left(\sum_l |x_{kl}|^2 \right)^{1/2}.$$

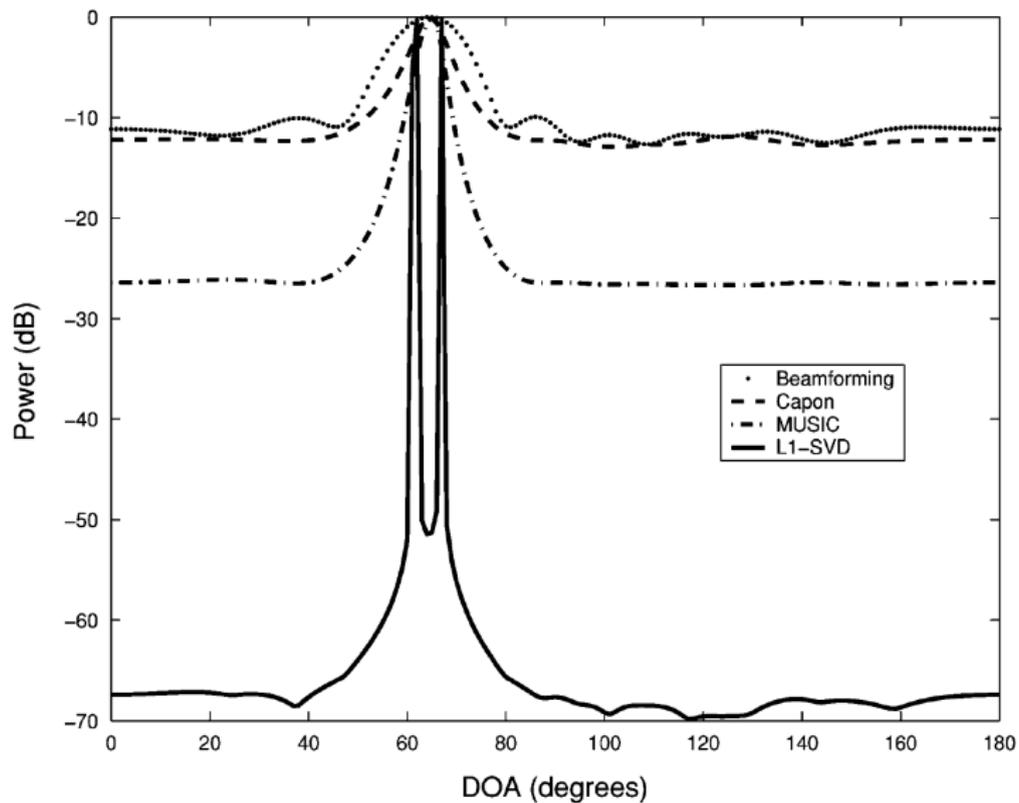
i.e. la somme des normes ℓ_2 des lignes de x . On remplace la norme ℓ_1 de BPDN par cette norme mixte $\ell_{1,2}$:

$$\tilde{\alpha} = \operatorname{argmin} \|\alpha\|_{1,2} \text{ s.c. } \|P - A\alpha\|_{2,2} \leq \varepsilon$$

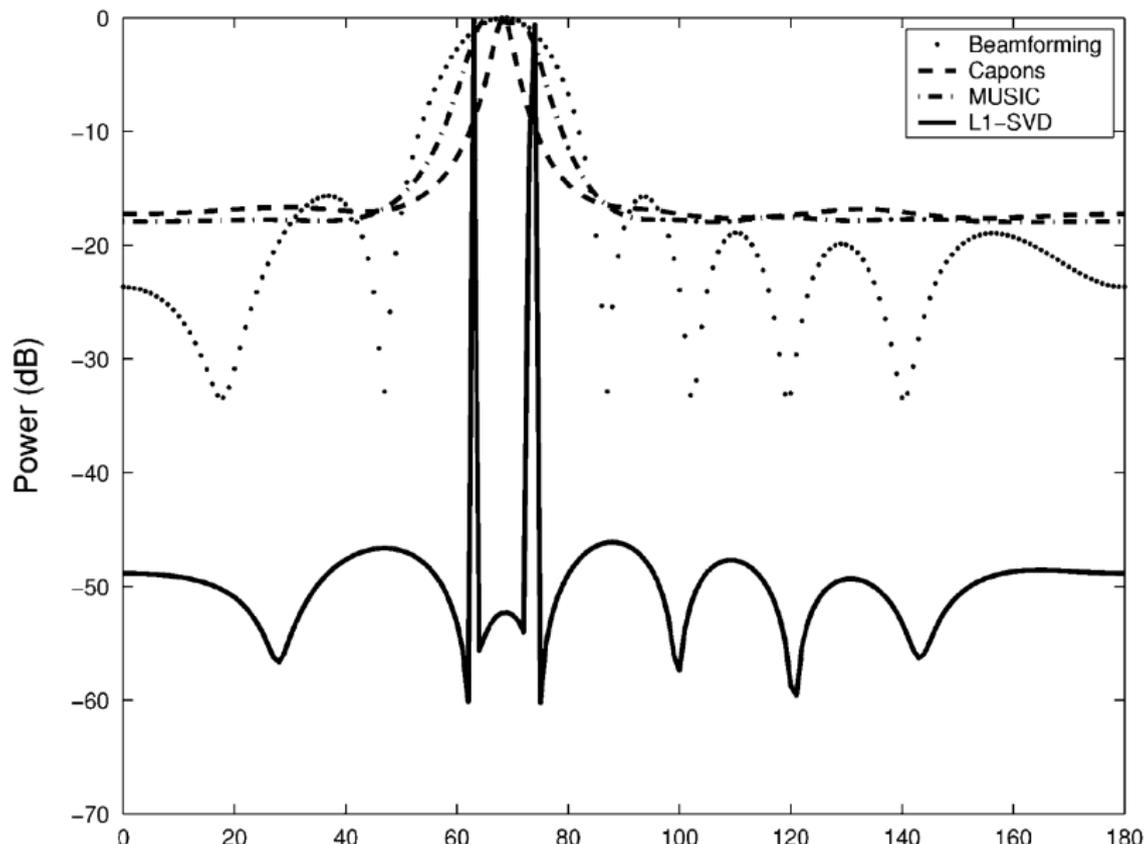
Pseudo-spectres SNR = 10 dB



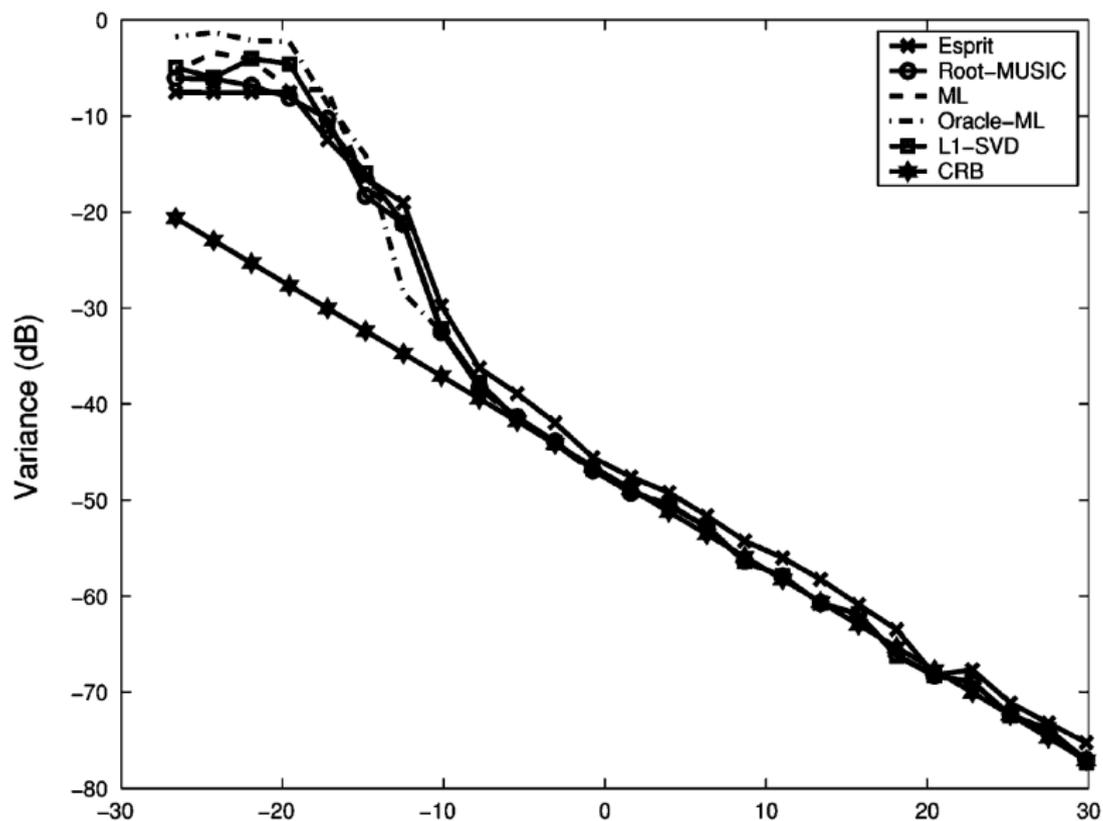
Pseudo-spectres SNR = 0 dB



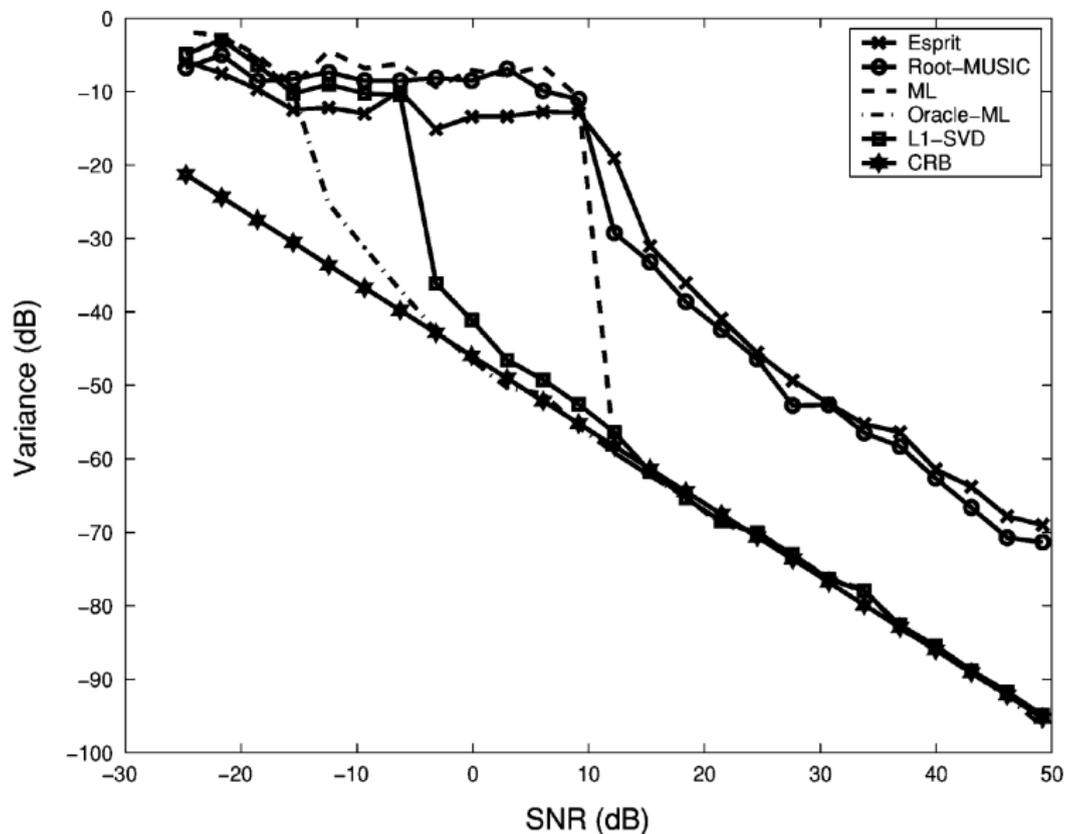
Sources corrélées



Variances - sans corrélation



Variances - avec corrélation



Conclusion de la parcimonie

On peut formaliser le problème de localisation de source comme un problème d'approximation parcimonieuse ou de compressed sensing.

On n'a pas besoin de Shannon.

Conclusion de la parcimonie

On peut formaliser le problème de localisation de source comme un problème d'approximation parcimonieuse ou de compressed sensing.

On n'a pas besoin de Shannon.

Maintenant : on mélange tout

- 1 Approximations parcimonieuses, compressed sensing
- 2 Localisation en environnement réverbérant
 - Environnement connu
 - Environnement inconnu
- 3 Localisation de sources complexes

Localisation en environnement connu

On suppose ici qu'on connaît l'environnement :

- forme (plus ou moins facile)
- conditions aux bords (difficile)

On peut calculer la réponse de la salle à une source placée à une position quelconque (par ex. éléments finis), et construire un dictionnaire (variété d'antenne) adapté à la salle :

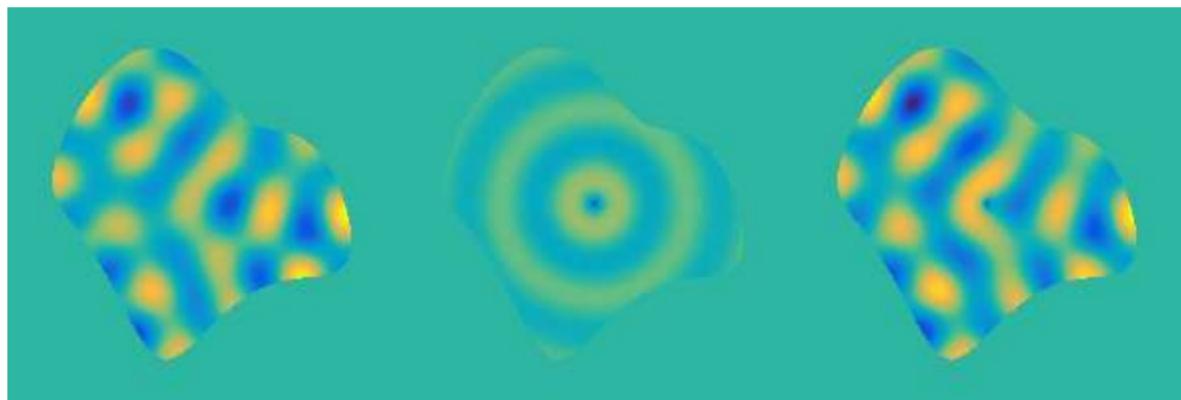
$$p = A\alpha$$

où A doit être calculé pour chaque environnement de propagation.

Note : en champ proche, on cherche les positions des sources, pas leur direction.

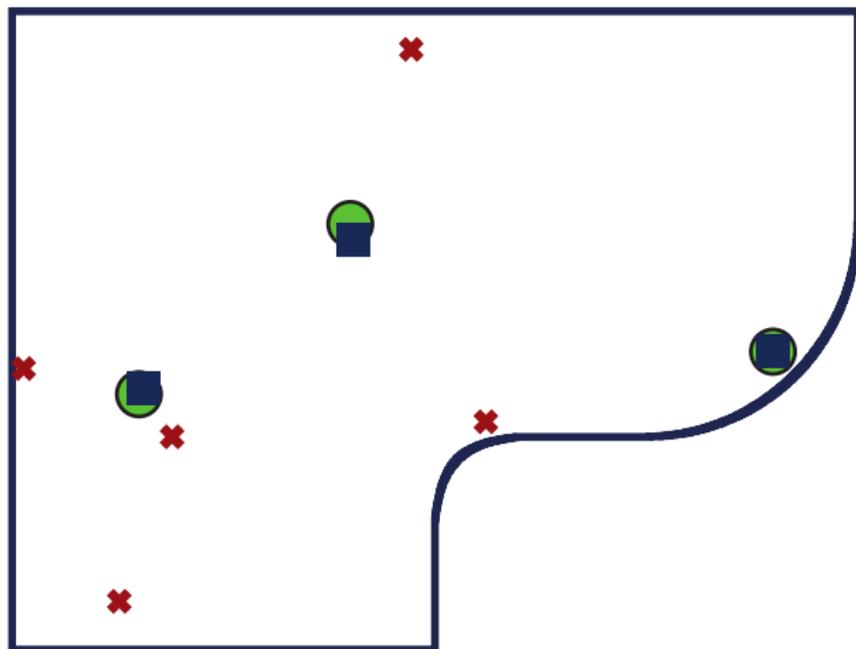
Rappel sur le calcul

On échantillonne la réponse, en déplaçant la source dans tout le domaine



Localisation en environnement connu

Idée (Dokmanic et Vetterli)² : utiliser OMP pour localiser les sources.



²I. Dokmanic and M. Vetterli. "Room helps: Acoustic localization with finite elements". In: *2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. Mar. 2012, pp. 2617–2620.

Localisation en environnement connu

Paraît évident...

Mais impossible avec une seule fréquence :

Le champ dans la salle peut être décomposé sur la base des vecteurs propres, solutions de

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 \\ \partial_n p = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Les modes u_n et fréquences propres k_n permette alors d'écrire la réponse à une source au point x_s comme

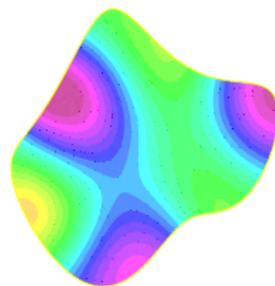
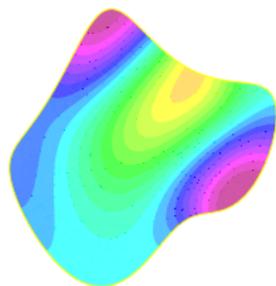
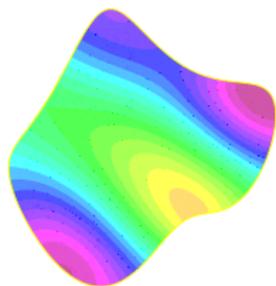
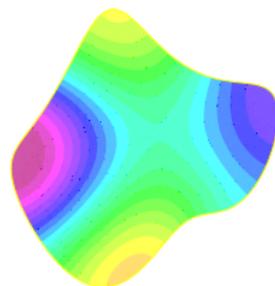
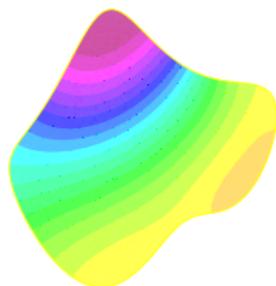
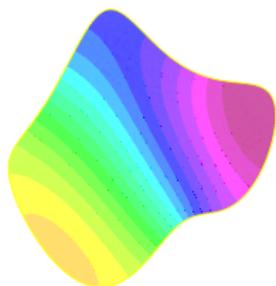
$$p(x) = \sum_n \frac{u_n(x_s)}{k^2 - k_n^2} u_n(x)$$

Conséquence

- à une fréquence propres, le rang de la matrice A est 1
- entre deux fréquences propres, son rang est en pratique 2

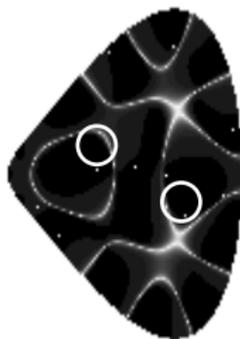
Impossible de localiser plus d'une source !

Rappel - modes propres

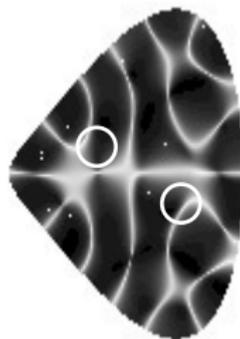


Localisation en environnement connu

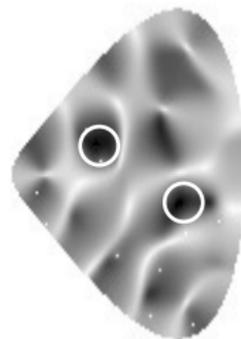
Pseudo-beamforming avec une seule fréquence



mode



aléatoire



entre modes

Localisation en environnement connu - parcimonie conjointe

On peut utiliser plusieurs fréquences à la fois

$$p_1 = A_1 \alpha_1$$

$$p_2 = A_2 \alpha_2$$

$$p_3 = A_3 \alpha_3$$

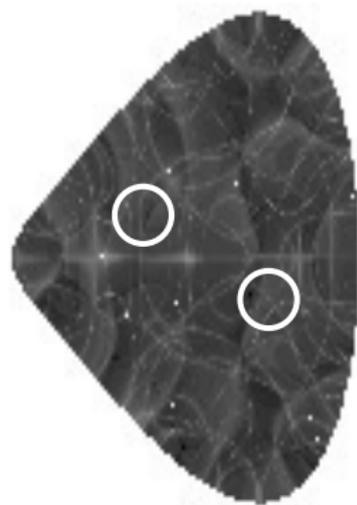
etc.

Tous les vecteurs α_l ont le même support (parcimonie conjointe).

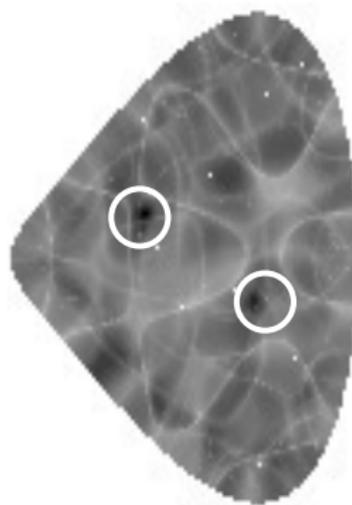
On somme les corrélations sur plusieurs fréquences.

Localisation en environnement connu

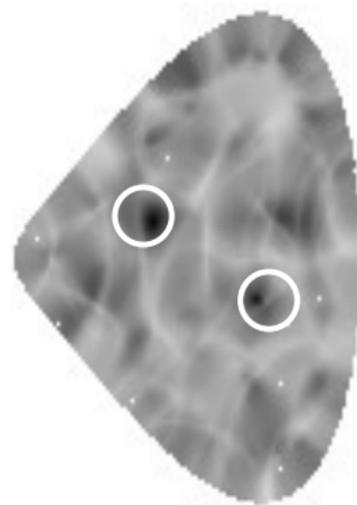
Pseudo-beamforming multi-fréquence



mode



aléatoire



entre modes

Localisation en environnement connu - conclusion

On connaît le milieu de propagation, le problème paraît simple.

La propagation rend le dictionnaire de très mauvaise qualité

Nécessité de prendre en compte plusieurs fréquences à la fois avec un modèle approprié

Localisation des sources avec

- OMP simultané sur plusieurs vecteurs
- norme mixte

- 1 Approximations parcimonieuses, compressed sensing
- 2 Localisation en environnement réverbérant
 - Environnement connu
 - Environnement inconnu
- 3 Localisation de sources complexes

- 1 Approximations parcimonieuses, compressed sensing
- 2 Localisation en environnement réverbérant
 - Environnement connu
 - Environnement inconnu
- 3 Localisation de sources complexes

Environnement inconnu - fréquentiel

On se place dans le cas où les conditions aux limites ne sont pas connues³.
Peut-on localiser des sources sans connaître la fonction de Green ?

Conditions aux bords inconnues :

$$\begin{cases} \Delta p - k^2 p = \sum a_j \delta_{y_j} \\ ? \end{cases}$$

Le problème direct (calcul du champ en connaissant les sources) est impossible...

³G. Chardon et al. "A blind dereverberation method for narrowband source localization". In: *Journal of Selected Topics in Signal Processing* 9 (5 2015), pp. 815–824. > < ≡ > < ≡ > ≡ ↺ ↻ ↶ ↷

Décomposition de la solution

Le champ p généré par les sources est la somme de

- une solution particulière avec second membre p_s (par ex. solution champ libre)
- une solution p_h de l'équation homogène

telles que la somme vérifie les conditions aux limites.

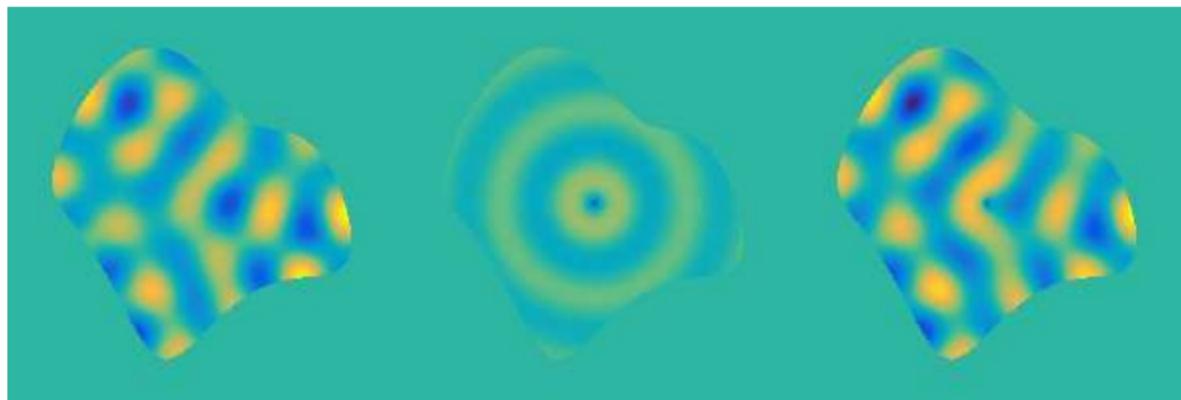
L'information cherchée (positions des sources) est dans p_s :

$$p_s(x) = \sum_j a_j G(x - x_j)$$

où G est une fonction de Green (par ex. champ libre).

Il faut se débarrasser de p_h .

Rappel - décomposition de la solution



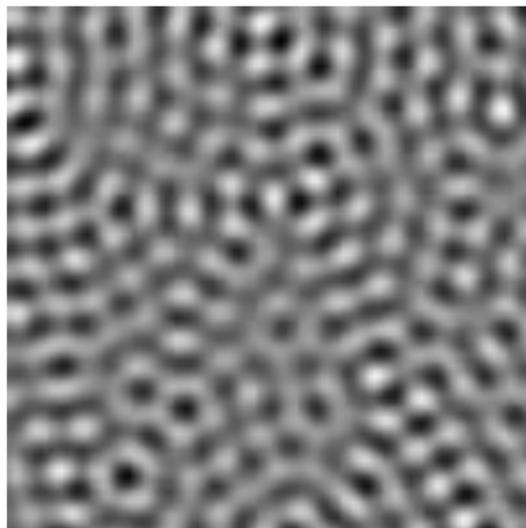
Théorie de Vekua

On peut approximer les solutions de l'équation d'Helmholtz sans second membre par des sommes d'ondes planes venant de toutes les directions :

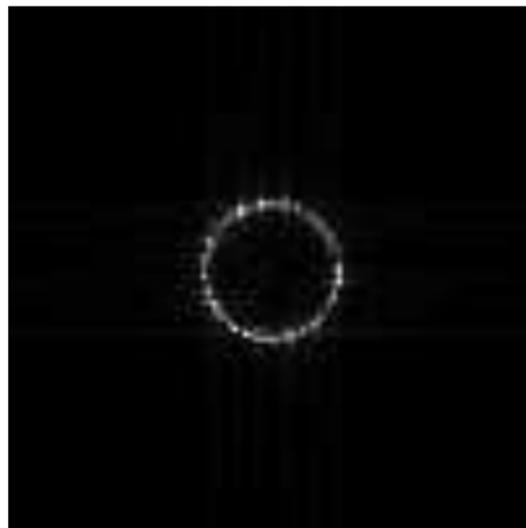
$$p_0 \approx \sum_n a_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}}$$

Également possible avec des harmoniques sphériques.

Il faut environ kL ondes planes en 2D, où L est la taille du domaine.



soundfield



FFT2

Décomposition de p

On projette p sur l'orthogonal des solutions homogènes (i.e. l'espace engendré par les ondes planes)

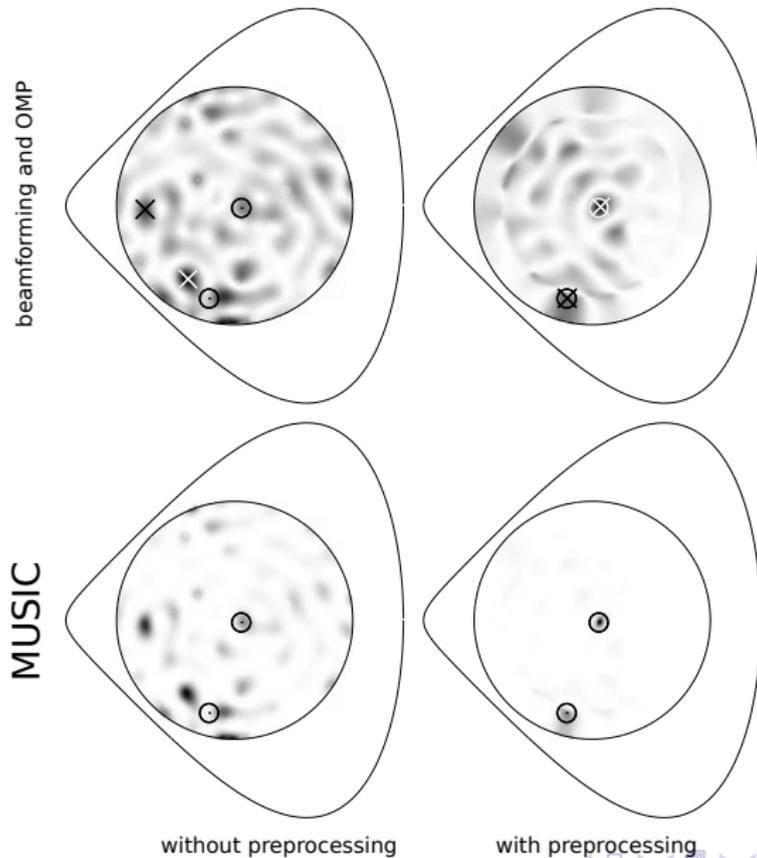
$$\Pi(p) = \Pi(p_h + p_s) = \Pi(p_s) = \sum a_j \Pi(G(x - x_j))$$

$\Pi(p)$ ne dépend que des sources.

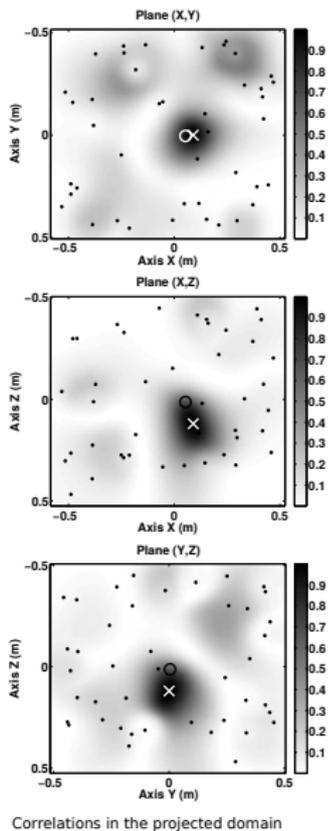
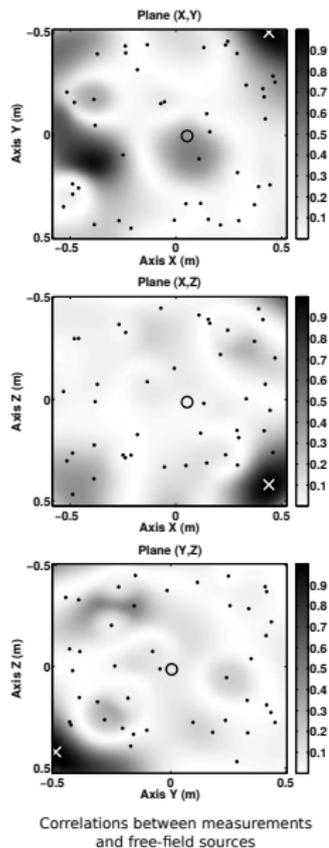
On applique une méthode de localisation avec :

- $\Pi(p_s)$ pour les mesures
- $\Pi(G(\cdot - x))$ pour le dictionnaire (variété d'antenne).

Exemple - simulation



Exemple - expérience



Environnement inconnu - conclusion

Il est possible de localiser des sources sans connaissance complète de l'environnement.

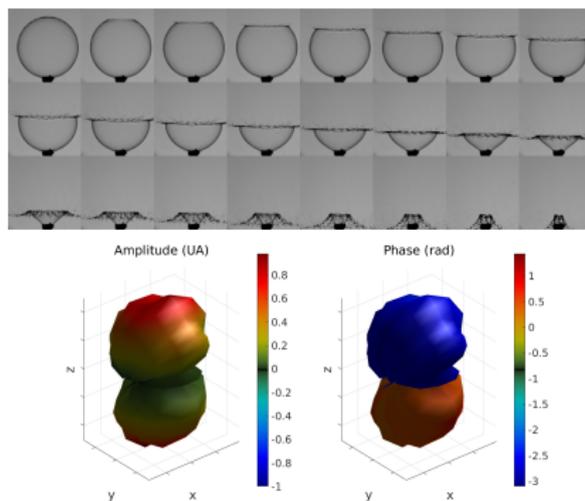
Limites :

- Les mesures doivent encadrer les sources
- nombre de mesures nécessaires plus élevé (à cause de la projection).

- 1 Approximations parcimonieuses, compressed sensing
- 2 Localisation en environnement réverbérant
- 3 Localisation de sources complexes**
 - Modèle de signal
 - MUSIC par blocs
 - Bornes de Cramér-Rao

Le problème

Bussonière et al.



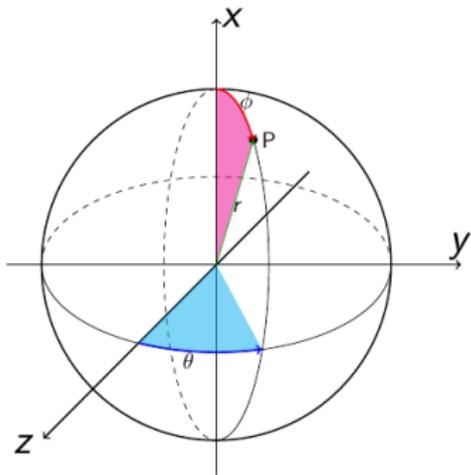
Nous désirons localiser une source directive et estimer les paramètres de la source. Un estimateur fiable dont la variance soit la plus faible possible est requis. Quelle est la limite théorique - borne de Cramer Rao - de cet estimateur ? Quelles interprétations ? Comparaison avec des simulations sur Matlab.

- 1 Approximations parcimonieuses, compressed sensing
- 2 Localisation en environnement réverbérant
- 3 Localisation de sources complexes**
 - **Modèle de signal**
 - MUSIC par blocs
 - Bornes de Cramér-Rao

Description d'une source directive en 3D

Champ rayonné par une source complexe (conditions de rayonnement de Sommerfeld)

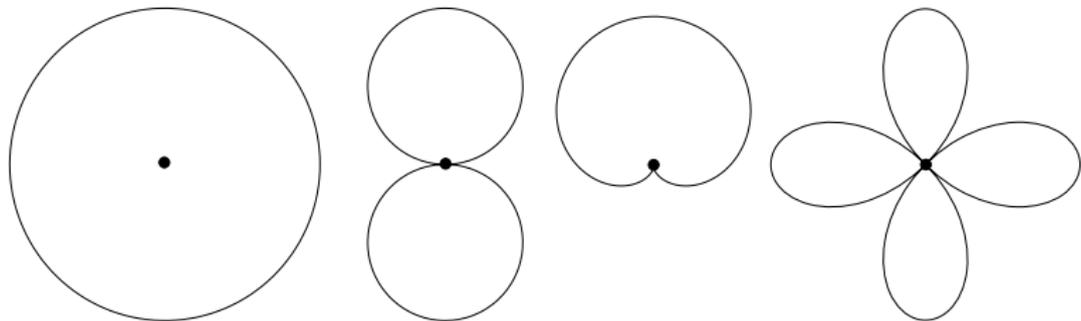
$$p(t) = A(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) h_l(kr)$$



On tronque à l'ordre L

$$p(t) \approx A(t) \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) h_l(kr)$$

Cas simples de sources anisotropes



Modélisation parcimonieuse

On a le modèle suivant :

$$p = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les sous-matrices D_j contiennent les harmoniques sphériques centrées sur les positions possibles des sources.

Les A_j sont des matrices contenant l'amplitude des différents multiples des sources aux instants des mesures.

C'est un modèle de parcimonie par blocs (directivités) et conjointe (différents instants de mesure).

- 1 Approximations parcimonieuses, compressed sensing
- 2 Localisation en environnement réverbérant
- 3 Localisation de sources complexes
 - Modèle de signal
 - MUSIC par blocs
 - Bornes de Cramér-Rao

Algorithme MUSIC par blocs

On peut adapter MUSIC pour gérer la parcimonie conjointe par blocs⁴.

On estime un sous-espace signal.

On trace l'angle entre le sous-espace signal et les espaces engendrés par les D_i .

Le rang des A_j est important

En particulier, si les sources ne changent pas de directivité, le rang des A_j est 1 :

$$A_j = d_j a_j$$

où d_j décrit la directivité (vecteur colonne), a_j l'amplitude de la source (vecteur ligne).

⁴G. Chardon. "A block-sparse MUSIC algorithm for the localization and the identification of directive sources". In: *Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP) 2014*. 2014. DOI: 10.1109/ICASSP.2014.6854343.

Algorithme MUSIC par blocs

- nombre de snapshots N_s
- nombre de capteurs N_m
- taille des blocs N_c
- R rang des matrices A_j
- K rang de l'espace signal estimé
- nombre de sources S

Il faut :

$$K \geq R(S - 1) + 1$$

$$N_s \geq K$$

$$N_m \geq R(S - 1) + N_c + 1$$

Le vrai rang de l'espace signal est RS ...

Algorithme MUSIC par blocs

- nombre de snapshots N_s
- nombre de capteurs N_m
- taille des blocs N_c
- R rang des matrices A_j
- K rang de l'espace signal estimé
- nombre de sources S

Il faut :

$$K \geq R(S - 1) + 1$$

$$N_s \geq K$$

$$N_m \geq R(S - 1) + N_c + 1$$

Le vrai rang de l'espace signal est RS ...

L'algorithme marche sur des dictionnaires aléatoires, mais pas sur des dictionnaires de sources (position très mal estimée).

- 1 Approximations parcimonieuses, compressed sensing
- 2 Localisation en environnement réverbérant
- 3 Localisation de sources complexes
 - Modèle de signal
 - MUSIC par blocs
 - Bornes de Cramér-Rao

Bornes de Cramér-Rao

Le calcul des bornes de Cramér-Rao pourraient expliquer l'échec de la localisation.

On veut estimer un vecteur de paramètres θ .

On observe m , qui suit une loi de probabilité $f(m|\theta)$.

Un estimateur de m a une certaine covariance C .

Les bornes de Cramér-Rao permettent de borner inférieurement C pour tout estimateur non biaisé.

Bornes de Cramér-Rao - cas uni-dimensionnel

On estime un seul paramètre θ , et on observe \mathbf{m} qui suit la loi $f(\mathbf{m}|\theta)$.

Pour trouver la borne de Cramér-Rao, on calcule l'information de Fisher :

$$F = E \left(- \log \frac{\partial^2 f(\mathbf{m}|\theta)}{\partial \theta^2} \right)$$

La variance C d'un estimateur non biaisé $\hat{\theta}$ est bornée inférieurement par

$$C \geq \frac{1}{F}$$

Pas la peine d'espérer faire mieux que la BCR (pour un estimateur non-biaisé).

Bornes de Cramér-Rao - cas uni-dimensionnel - bruit gaussien

Cas particulier : le vecteur \mathbf{m} s'écrit

$$\mathbf{m} = \mathbf{g}(\theta) + \mathbf{n} \quad (1)$$

où n suit une loi gaussienne complexe de matrice de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}$.
L'information de Fisher a l'expression simplifiée

$$F = \frac{2}{\sigma^2} \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \right\|^2$$

- puissance du bruit élevée \Rightarrow grande variance de l'erreur
- variation rapide de \mathbf{m} en fonction de θ \Rightarrow faible variance de l'erreur

Bornes de Cramér-Rao - cas multi-dimensionnel - bruit gaussien

Dans le cas où $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_J)$ est un vecteur de paramètres, et le bruit gaussien :

$$\mathbf{m} = \mathbf{g}(\theta) + \mathbf{n} \quad (2)$$

Slepian-Bangs : On calcule la matrice d'information de Fisher de coefficients

$$F_{ij} = \frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \frac{\partial \mathbf{g}^*}{\partial \theta_i} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta_j}$$

et la matrice de covariance C de l'estimation de θ est bornée inférieurement par F^{-1} au sens où $C - F^{-1}$ est une matrice positive.

En particulier, les variance C_{ii} sont bornées par la diagonale de F^{-1} .

Application aux sources directives

On applique au modèle de sources directives⁵.

Pour les sources directives, il faudra estimer un vecteur θ contenant :

- position de la source (2 ou 3 paramètres)
- amplitude (complexe) des directivités élémentaires (≥ 1)

Pour différents modèles :

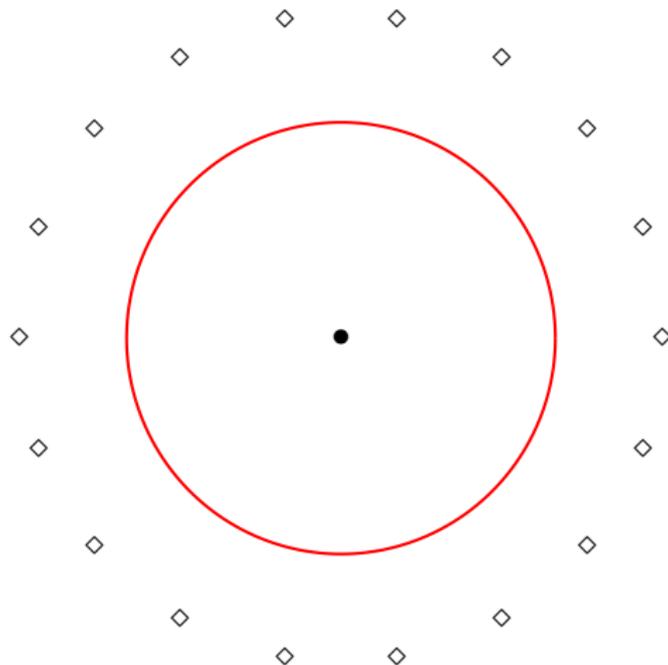
- directivités élémentaires "pures"
- combinaisons de directivités élémentaires

dans un cas simple : source au centre d'une antenne circulaire (problème 2D).

⁵E. Monier and G. Chardon. "Cramér-Rao bounds for the localization of anisotropic sources".
In: *Proceedings of ICASSP 2017*. 2017.

Directivités élémentaires : Monopôle pur

$$p(t, r, \theta) = (a_R + i a_I) H_0(kr)$$



Directivités élémentaires : Monopôle pur

Notations réel / imaginaire

$$p(t, r, \theta) = (a_R + i a_I) H_0(kr)$$

$$F = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} h_0 & & & \\ & h_0 & & \\ & & k^2 A h_1 / 2 & \\ & & & k^2 A h_1 / 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_R \\ a_I \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

où $h_n = \|H_n(kr)\|^2$ et $A = a_R^2 + a_I^2$.

Directivités élémentaires : Monopôle pur

$$p(t, r, \theta) = (a_R + i a_I) H_0(kr)$$

$$\text{Cov}(\hat{\theta}) - \text{CRB} \geq 0$$

où

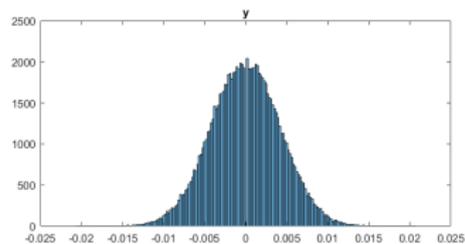
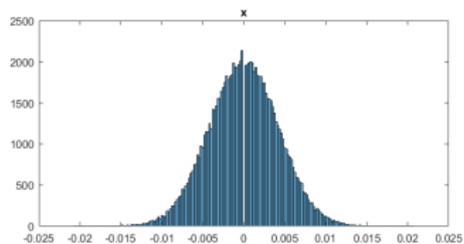
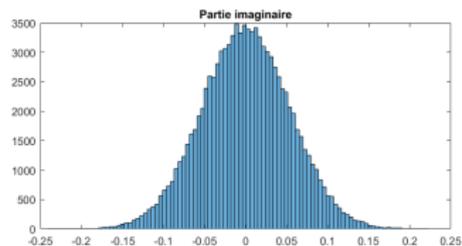
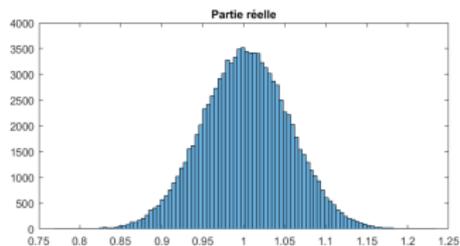
$$\text{CRB} = F^{-1} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1/h_0 & & & \\ & 1/h_0 & & \\ & & \sigma_0/\sigma^2 & \\ & & & \sigma_0/\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_R \\ a_I \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

où

$$\sigma_0 = \frac{2\sigma^2}{k^2 A h_1} = \frac{2}{k^2 \text{SNR}}$$

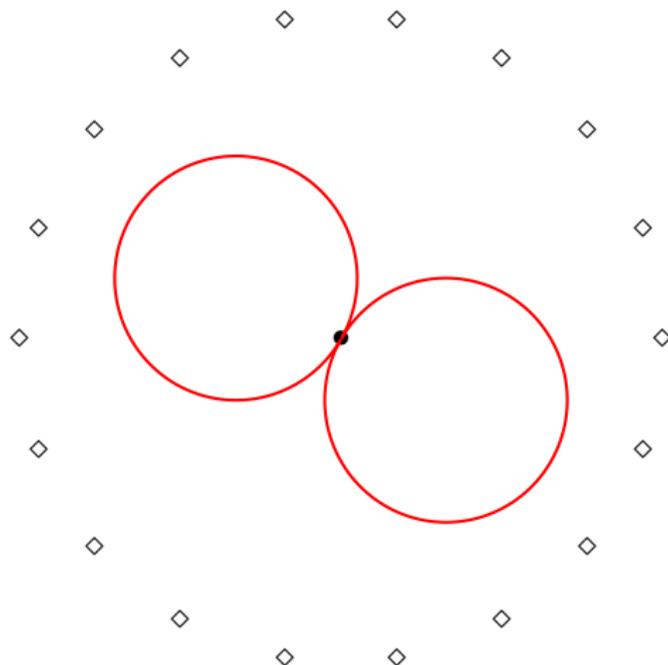
Estimation d'un monopole pur $a_R + i a_I = 1$

Estimation monopôle



Directivités élémentaires : Dipôle pur

$$p(t, r, \theta) = (a_R + i a_I)H_1(kr)e^{i\theta} + (b_R + i b_I)H_{-1}(kr)e^{-i\theta}$$



Directivités élémentaires : Dipôle pur

Notations réel / imaginaire

$$p(t, r, \theta) = (a_R + i a_I)H_1(kr)e^{i\theta} + (b_R + i b_I)H_{-1}(kr)e^{-i\theta}$$

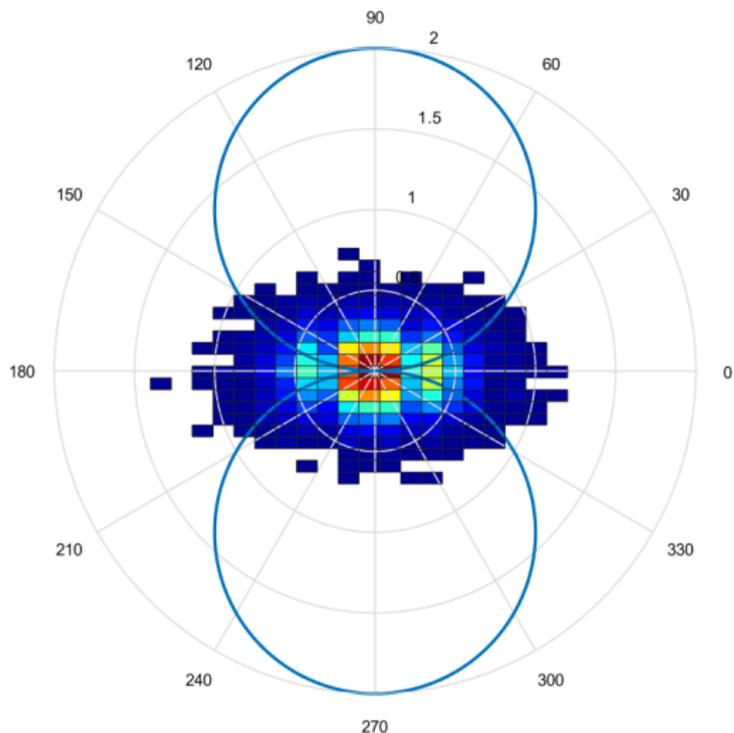
$$F = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} h_1 & & & & \\ & h_1 & & & \\ & & h_1 & & \\ & & & h_1 & \\ & & & & \frac{k^2}{4} F_{xy} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_R \\ b_R \\ a_I \\ b_I \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

où

$$F_{xy} = (A + B)(h_0 + h_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2h_0 \begin{pmatrix} -a_R a_I - b_R b_I & -a_R a_I + b_R b_I \\ -a_R a_I + b_R b_I & a_R a_I + b_R b_I \end{pmatrix}$$

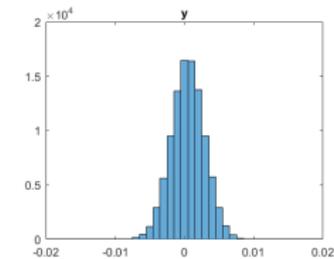
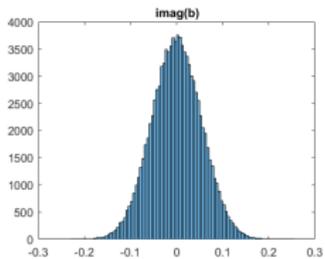
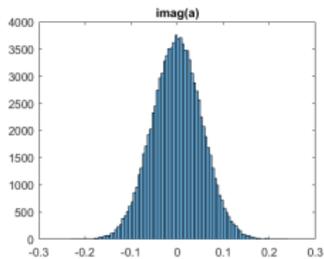
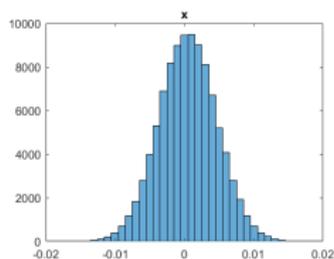
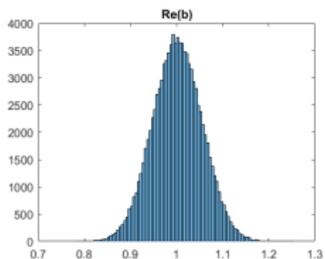
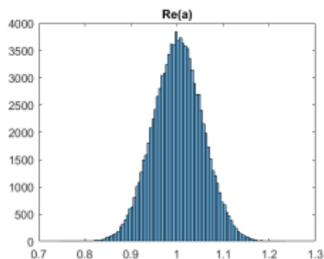
Directivités élémentaires : Dipôle pur

Interprétation :



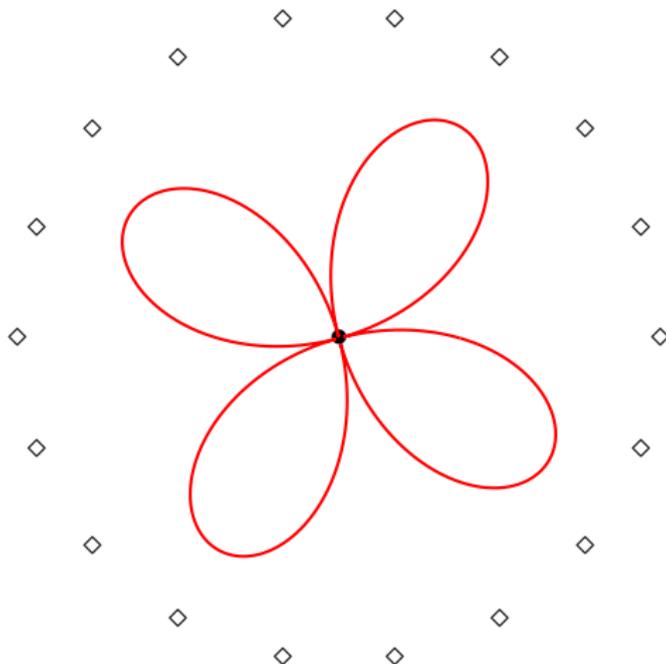
Estimation d'un dipôle pur $a_R + i a_I = b_R + i b_I = 1 + i$

Estimation dipôle



Directivités élémentaires : Quadrupôle pur ou plus ...

$$p(t, r, \theta) = (a_R + i a_I)H_n(kr)e^{in\theta} + (b_R + i b_I)H_{-n}(kr)e^{-in\theta}$$



Directivités élémentaires : Quadrupôle pur ou plus ...

Notations réel / imaginaire

$$p(t, r, \theta) = (a_R + i a_I)H_n(kr)e^{in\theta} + (b_R + i b_I)H_{-n}(kr)e^{-in\theta}$$

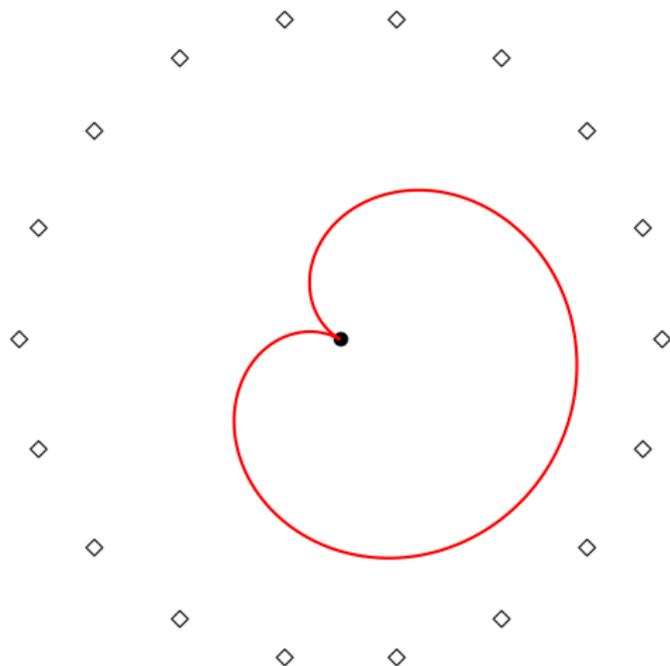
$$F = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} h_n & & & & & \\ & h_n & & & & \\ & & h_n & & & \\ & & & h_n & & \\ & & & & h_n & \\ & & & & & \frac{k^2}{4} F_{xy} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_R \\ b_R \\ a_I \\ b_I \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

où

$$F_{xy} = (A + B)(h_{n-1} + h_{n+1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Combinaison de directivités : monopôle + dipôle

$$p(t, r, \theta) = (a_R + i a_I)H_1(kr)e^{i\theta} + (b_R + i b_I)H_0(kr) + (c_R + i c_I)H_{-1}(kr)e^{-in\theta}$$



Combinaison de directivités : monopôle + dipôle

Notation réel / imaginaire

$$p(t, r, \theta) = (a_R + i a_I)H_1(kr)e^{i\theta} + (b_R + i b_I)H_0(kr) + (c_R + i c_I)H_{-1}(kr)e^{-i\theta}$$

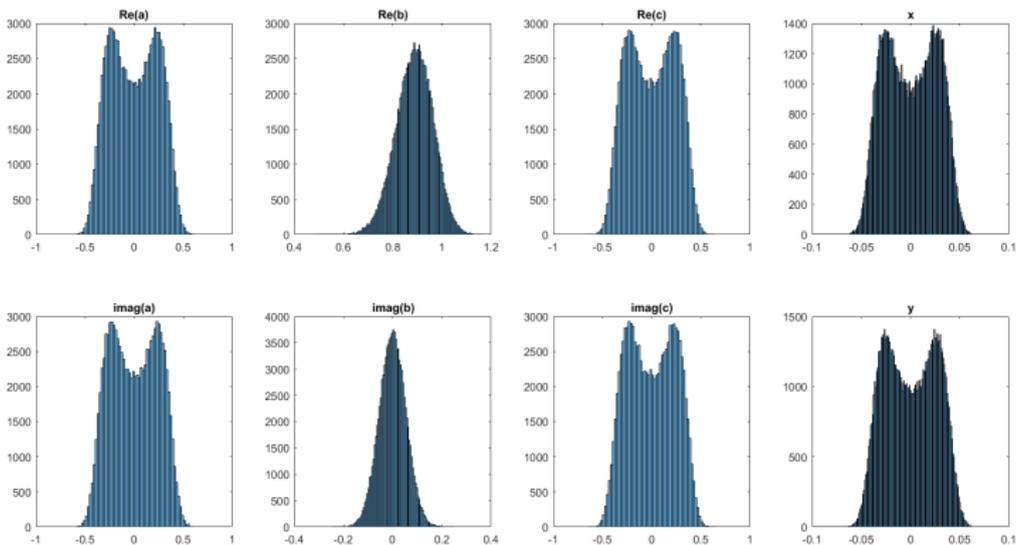
$$F^{(RI)} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} h_1 & & & & & \\ & h_0 & & & & \\ & & h_1 & & & \\ & & & h_1 & & \\ & & & & h_0 & \\ & & & & & h_1 \\ \hline & & & & & \frac{k}{2} F_2^{(RI) T} \\ \frac{k}{2} F_2^{(RI)} & & & & & \frac{k^2}{4} F_{xy}^{(RI)} \end{array} \right) \begin{bmatrix} a_R \\ b_R \\ c_R \\ a_I \\ b_I \\ c_I \\ xy \end{bmatrix}$$

Combinaison de directivités : monopôle + dipôle

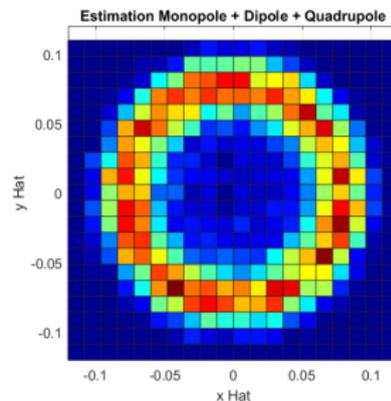
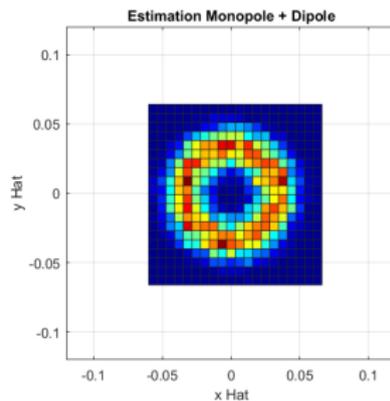
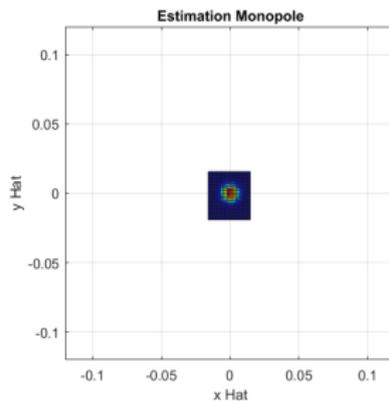
- Apparition de couplages entre les amplitudes et la position
- la matrice de Fisher n'est inversible que si le dipôle a une puissance non nulle.

Localisation d'un monopôle avec modèle monopôle+dipôle

Estimation monopôle + dipôle

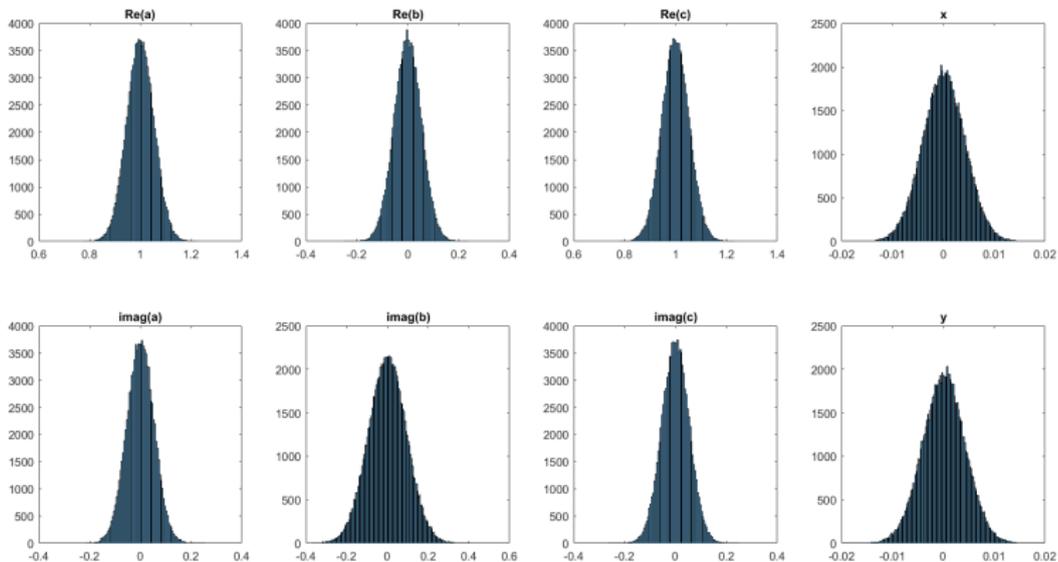


Position estimée pour différents estimateurs - Affichage comparatif



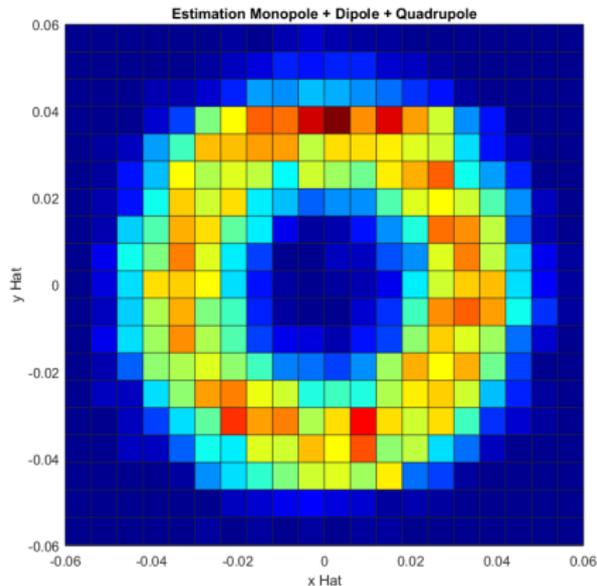
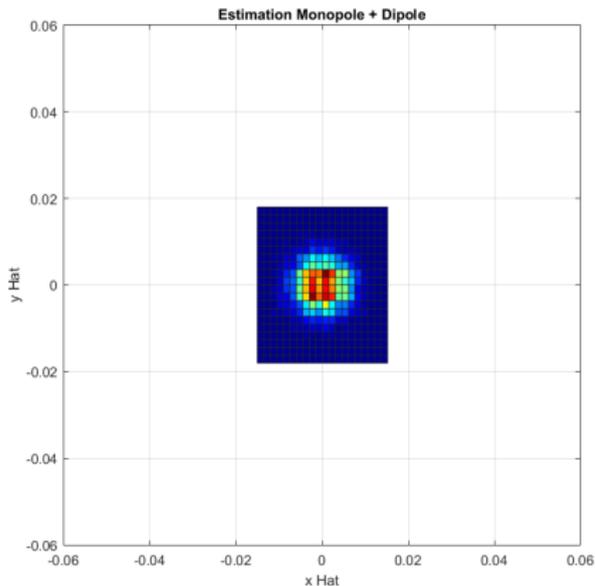
Estimation d'un dipole pur $a_R + i a_I = b_R + i b_I = 1 + i$

Estimation monopôle + dipôle



Modèles d'ordre élevés

Position estimée pour différents estimateurs - Affichage comparatif



Conclusion

L'introduction de la directivité comme paramètre rend la localisation plus difficile :

- augmentation de la variance des estimations
- couplage entre directivité et position
- biais et matrice de Fisher non inversible dans les cas défavorable (surestimation de l'ordre)

Conclusion : des a priori physiques sur la directivité sont nécessaires