

Introduction

Ce document trouve son origine et sa motivation dans le besoin croissant de caractériser, d'analyser et de traiter des signaux *non stationnaires*. Au-delà des méthodes purement spectrales (« classiques » ou « modernes ») adaptées aux situations stationnaires, ces dernières années ont vu le développement d'un grand nombre d'approches qui toutes ont un point commun : la prise en compte explicite du *temps* comme paramètre de description. Dans un contexte d'analyse spectrale, ceci conduit naturellement au concept de temps-fréquence et à ses représentations et/ou modélisations associées.

Si l'intensification des travaux sur le sujet a bien sûr eu pour effet bénéfique de combler un vide et d'équiper le traicteur de signal en outils nouveaux, leur floraison dans des directions souvent différentes en a certainement rendu assez difficile l'utilisation effective. Un des buts premiers de ce document est donc de présenter, de manière aussi parallèle que possible, les principales méthodes temps-fréquence aujourd'hui disponibles de façon à pouvoir les comparer plus aisément et à servir, nous l'espérons, de guide d'utilisation. Le mode de présentation choisi (une fiche descriptive par méthode) présentant le risque de faire oublier que, pour différentes qu'elles soient, les méthodes sont loin d'être sans lien entre elles, il est sans doute utile de rappeler dans cette introduction, quelques points de vue généraux et unificateurs.

Une première classification est analogue à celle couramment utilisée en analyse spectrale stationnaire et séparant les méthodes « classiques » de celles dites « modernes » [1], [11]. Le choix de cette terminologie n'est sans doute pas très heureux, pas plus que ne le serait d'ailleurs celui parfois employé de « non paramétriques » et « paramétriques ». Au-delà des mots, l'idée générale est en fait de disposer de méthodes, soit inspirées de l'analyse de Fourier dans le premier cas, soit reposant sur une approche différente (par exemple à l'aide de modèles utilisant une information *a priori* quant à la structure possible des signaux analysés) dans le deuxième cas.

Cette distinction se retrouve naturellement dans l'analyse spectrale des signaux non stationnaires et fournit le premier regroupement :

Groupe I Spectrogramme (Fourier à court-terme), Wigner-Ville, pseudo Wigner-Ville lissé, Choi-Williams, Zhao-Atlas-Marks, scalogramme (ondelettes continues), Wigner-Ville lissé affine, Wigner affine unitaire, Wigner affine régularisée, temps-fréquence instantanée.

Groupe II Lagunas glissant, AR glissant, AR à mémoire variable, méthodes hybrides, AR évolutif, Prony adaptatif, ARMA par Filtrage de Kalman étendu.

Groupe I

A l'exception de la représentation « temps-fréquence instantanée », toutes les représentations de ce groupe sont des *distributions d'énergie* en ce sens que leur intégration dans tout le plan temps-fréquence fournit l'énergie totale du signal analysé. Ce sont également toutes des formes *bilinéaires* du signal, ce qui permet de les réunir de façon commode dans un cadre commun.

Une première formulation unifiée est fournie par la *classe de Cohen* associée aux distributions bilinéaires covariantes par translations temporelles et fréquentielles, i.e. telles qu'elles « suivent » un signal lorsqu'on le déplace en temps et fréquence. Cette classe peut se paramétrer selon

$$C_x(t, \nu; F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(n, \tau) x(t + n + \tau/2) \times \\ \times x^*(t + n - \tau/2) e^{-i2\pi\nu\tau} dn d\tau$$

où $F(n, \tau)$ est une fonction arbitraire caractérisant la distribution et ses propriétés. Une paramétrisation équivalente est possible dans le domaine dual au sens de Fourier, on a alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(t, \nu; F) e^{i2\pi(\eta t + \nu\tau)} dt d\nu = \\ = f(\eta, \tau) A_x(\eta, \tau)$$

avec

$$A_x(\eta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{2i\pi\eta u} du$$

la fonction d'ambiguïté du signal analysé

$$\text{et} \quad f(\eta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu, \tau) e^{-2i\pi\eta\nu} d\nu.$$

Cette dernière, bien connue dans des contextes de détection/estimation en radar et en sonar n'est autre qu'une fonction de corrélation temps-fréquence. On retrouve ainsi un analogue, dans le cas non stationnaire, de la dualité existant entre densité spectrale et fonction de corrélation dans le cas stationnaire.

Les avantages de cette formulation unifiée sont multiples. Elle permet tout d'abord, moyennant une spécification convenablement choisie de la fonction arbitraire, de retrouver nombre de distributions spécifiques comme cas particuliers. C'est le cas du spectrogramme (module carré de la transformée de Fourier à court-terme), de la distribution de Wigner-Ville, de sa version pseudo-Wigner-Ville lissée et des distributions de Choi-Williams et Zhao-Atlas-Marks qui sont considérées dans ce docu-

	$f(\eta, \tau)$	$F(v, \tau)$	$C_x(t, \nu; \Pi)$
Spectrogramme	$A_h(\eta, \tau)$	$h(v + \tau/2) \cdot h^*(v - \tau/2)$	$\left \int h(\tau) \cdot x(t + \tau) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau \right ^2$
Wigner-Ville	1	$\delta(v)$	$\int x(t + \tau/2) \cdot x^*(t - \tau/2) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau$
Pseudo Wigner-Ville Lissée	$G(\eta) h(\tau/2) ^2$	$g(v) h(\tau/2) ^2$	$\int h(\tau/2) ^2 g(u - t) x(u + \tau/2) \cdot x^*(u - \tau/2) e^{-j2\pi\nu\tau} du d\tau$
Choi-Williams	$e^{-\frac{(2\pi\eta\tau)^2}{\sigma}}$	$\frac{1}{(4\pi\tau^2/\sigma)^{1/2}} e^{-\frac{v^2}{4\tau^2\sigma}}$	$\iint \frac{1}{(4\pi\tau^2/\sigma)^{1/2}} e^{-\frac{(u-t)^2}{4\tau^2\sigma}} x(u + \tau/2) \cdot x^*(u - \tau/2) e^{-j2\pi\nu\tau} du d\tau$
Zhao-Atlas-Marks	$ h(\tau/2) ^2 \frac{2 \tau }{a} \text{sinc}\left(\frac{2\pi\nu\tau}{a}\right)$	$ h(\tau/2) ^2 \text{Rect}\left(v, \frac{ \tau }{a}\right)$	$\int h(\tau/2) ^2 \left[\int_{t- \tau /a}^{t+ \tau /a} x(u + \tau/2) \cdot x^*(u - \tau/2) du \right] e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau$

Tableau I.

ment (cf. tableau I). Un deuxième avantage est de pouvoir appréhender les propriétés d'une distribution temps-fréquence directement à partir de propriétés structurelles de sa fonction de pondération associée F (ou f). En retour, il est ainsi possible, pour un problème déterminé, de choisir une distribution satisfaisant aux contraintes imposées par l'application. On pourra trouver dans [2], [3-4] l'explication de tels couples propriétés de la distribution/contraintes sur la pondération. Un point essentiel à retenir est que, d'une manière générale, il n'est pas possible de trouver une solution qui vérifie simultanément l'ensemble des propriétés « naturelles », i.e. celles qui sont la généralisation dépendante du temps des propriétés qui font le succès de l'analyse spectrale stationnaire. L'exemple le plus frappant est celui de la positivité : on peut en effet montrer (cf. par exemple [5]) qu'imposer à une distribution temps-fréquence d'être partout non négative (analogie avec une densité spectrale) est en fait exclusif de la quasi-totalité des autres propriétés souhaitables (comme l'obtention de distributions marginales correctes, la conservation des supports, la compatibilité avec les filtrages linéaires, ...). A l'inverse, tolérer qu'une distribution puisse prendre des valeurs négatives (ce qui en fait ne conduit qu'à interdire une interprétation strictement locale, de toutes façons interdite par les inégalités de Heisenberg) peut garantir un nombre considérable d'avantages théoriques : c'est en particulier le cas pour la distribution de Wigner-Ville.

L'existence de valeurs négatives dans une distribution temps-fréquence comme celle de Wigner est intimement liée à la structure bilinéaire sur laquelle elle repose : une manifestation de ces valeurs négatives est en particulier visible dans les termes d'interférence (oscillants) qui se créent sous l'interaction des différentes parties constitutives d'un signal. Bien que ces termes portent une information utile (par exemple sur les relations de phase entre composantes), un reproche couramment adressé est que

leur prolifération réduit considérablement la lisibilité d'une distribution temps-fréquence. La forme unifiée de Cohen fournit à cet égard un nouvel avantage. En effet, l'interprétation relative à la fonction d'ambiguïté permet très simplement de comprendre que ces termes d'interférence se manifestent, dans le plan des ambiguïtés, à la façon de lobes secondaires d'une fonction de corrélation, i.e. à une distance d'autant plus grande de l'origine qu'ils sont issus de termes interagissant éloignés. On a par la même occasion un moyen d'en réduire l'influence par utilisation d'une fonction arbitraire à comportement de type passe-bas, i.e. extension limitée autour de l'origine dans le plan des ambiguïtés. Par dualité, ceci permet, dans le plan temps-fréquence, d'interpréter la classe de Cohen en termes de *lissage* de la distribution de Wigner-Ville. On peut alors voir l'ensemble des distributions présentées dans ce document comme correspondant à des choix régis par un compromis propriétés/lisibilité, ou encore théorie/pratique.

Parallèlement à l'approche temps-fréquence usuelle une deuxième formulation unifiée est fournie par une extension *affine* de la classe de Cohen associée aux distributions bilinéaires covariantes par translations temporelles et changements d'échelle, i.e. telles qu'elles « suivent » un signal lorsqu'on le déplace en temps et le dilate ou le contracte. L'expression naturelle de cette classe met alors en jeu un paramètre d'échelle a et peut se paramétrer selon

$$\begin{aligned} \Omega_x(t, a; \Pi) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t', \nu) \Pi\left(\frac{t'-t}{a}, a\nu\right) dt' d\nu. \end{aligned}$$

avec Π une fonction arbitraire.

Il est néanmoins possible de la ramener à une formulation

temps-fréquence en considérant formellement que le paramètre d'échelle se comporte comme l'inverse d'une fréquence, c'est-à-dire que l'on a $a = \nu_0/\nu$, où ν_0 est une fréquence arbitraire non nulle. On trouve alors dans cette classe le scalogramme (module carré de la transformée en ondelettes), la version lissée affine de la distribution de Wigner-Ville, la distribution de Wigner affine unitaire et sa version régularisée (qui se ramène à un cas particulier de scalogramme). On pourra trouver dans [6] une discussion plus approfondie de cette approche.

Groupe II

Deux notions sont à discuter dans les méthodes de ce groupe. La première concerne l'unification qui peut être envisagée pour placer les méthodes dans un cadre commun et la seconde surtout précisée comment la notion de non-stationnarité est introduite.

Contrairement au groupe I, la formulation unifiée que l'on peut considérer ne fait pas obligatoirement intervenir l'aspect non-stationnaire. Dans un cadre stationnaire, ces méthodes peuvent être vues comme la construction d'un filtre appliqué sur les données [3], [4]. Le filtre, conçu à partir des données, ne signifie pas que l'on effectue une modélisation.

En effet, la méthode de Lagunas consiste à filtrer en bande étroite sous la contrainte de minimisation d'interférences dues aux fréquences extérieures au filtre. L'information spectrale se retrouve à la sortie du filtre et non pas dans les coefficients du filtre. Mais ces coefficients sont déterminés en fonction du signal à analyser contrairement aux techniques de Fourier où, dans ce contexte d'unification, le filtre est indépendant du signal, un ensemble d'harmoniques étant sélectionné *a priori*.

Néanmoins de nombreuses techniques sont basées sur une modélisation du signal. Dans ce cas, les coefficients du filtre contiennent toute l'information spectrale du signal. On retrouve ici les méthodes basées sur le modèle AR ou ARMA.

Les méthodes hybrides ARCAP ou LAGCAP ont l'avantage de combler une lacune importante des méthodes AR et Lagunas concernant l'estimation des puissances associées aux fréquences présentes dans le signal. Une fois les fréquences estimées soit par la méthode AR, soit par la méthode de Lagunas, les puissances associées à ces fréquences sont estimées par la méthode de CAPON, estimateur de puissance et non de fréquences.

La méthode de Prony est fortement liée à ce dernier concept de modèle AR bien que Prony ne soit pas une technique d'estimation spectrale mais une estimation de paramètres. Le modèle considéré est une somme d'exponentielles amorties, modèle complètement déterministe à l'opposé des modèles AR ou ARMA. L'obtention simultanée de tous les paramètres est un problème hautement non-linéaire. Le concept original de Prony fut de reconnaître qu'une partie des paramètres était solution d'une équation aux différences d'où le lien avec un modèle AR. En conséquence, la méthode de Prony se distingue des modèles AR non pas par l'estimation fréquentielle qui est algorithmiquement identique mais par l'estimation supplé-

mentaire des paramètres du modèle de Prony (amplitude complexe soit module et phase).

Toutes ces méthodes passent obligatoirement par une première phase d'estimation de la matrice de corrélation. Diverses variantes sont envisageables suivant le choix du domaine de sommation de la matrice de corrélation [10].

Les deux cas les plus souvent considérés sont :

— la méthode dite « de corrélation » : on fait l'hypothèse de données nulles en dehors de l'intervalle d'observation. Par construction, la matrice obtenue est de forme Toeplitz ;

— la méthode dite « de covariance » : le choix de conditions finales et initiales nulles est contestable. On restreint le domaine de sommation aux données connues de l'intervalle d'observation. La matrice obtenue n'est plus Toeplitz, mais se décompose cependant en produit de deux matrices Toeplitz.

Ces deux méthodes sont asymptotiquement équivalentes lorsque l'intervalle d'observation est « grand », ce qui n'est pas le cas lors de l'utilisation pour des techniques temps-fréquence sur un intervalle de durée courte.

En effet, nous n'avons considéré jusqu'ici que l'unification des techniques sans tenir compte de la non-stationnarité.

La non-stationnarité peut être envisagée sous quatre approches [9] :

— l'approche dite « adaptative » issue du domaine de l'automatique ;

— les méthodes stationnaires par morceaux qui limitent les non-stationnarités à des sauts en des instants isolés entre lesquels le modèle reste invariant ;

— les méthodes explicitement non-stationnaires où la non-stationnarité est incluse dans les coefficients du filtre ; ces méthodes sont dites « évolutives » ;

— dans le cas des méthodes explicitement non-stationnaires, les coefficients du filtre peuvent être aléatoires. Alors la méthode se décompose en deux niveaux de modèle, un pour le système, un pour la dynamique du système.

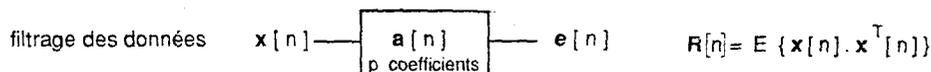
Toutes les méthodes du groupe II présentées dans ce rapport sont issues de la première catégorie, méthodes adaptatives, excepté la méthode AR évolutif (cf. tableau II). Des méthodes dites stationnaires sont appliquées sur une tranche courte du signal sous l'hypothèse de stationnarité locale. Cette fenêtre, appelée souvent mémoire, glisse sur la durée totale du signal (AR glissant, Lagunas glissant). Des estimations récursives sont alors intégrées afin de diminuer le temps de calcul :

• AR MCR à mémoire variable utilise en plus cet algorithme récursif en temps pour rendre la longueur de la mémoire invariable (mémoire croissante ou fixe) afin d'améliorer le suivi des fréquences. Le critère de sélection de longueur de la mémoire est basé sur un critère de puissance d'erreur minimale.

• PRONY adaptatif : chacune des trois étapes de la modélisation de PRONY est résolue par un algorithme adaptatif ;

— modélisation AR → algorithme MCR

— recherche des zéros → algorithme de Hoxha ou de Newton modifié



		LAGUNAS Généralisé glissant	AR MCR mémoire variable	ARCAP	LAGCAP	PRONY adaptatif
Modèle		non	AR	AR	non	\sum exponentielles complexes
Estimation du filtre sur une mémoire	objectif	$a^T[n].R[n]^{q/2}.a[n]$ minimum	$P_e = a^T[n].R[n].a[n]$ minimum	idem AR	idem Lagunas	idem AR
	contrainte	$a^T[n].Z = 1$ $Z^T = [1, \exp(2i\pi\nu t_e), \dots, \exp(2i\pi\nu p t_e)]$	$1^T.a[n] = 1$ $1^T = (1, 0, \dots, 0)$	idem AR	idem Lagunas	idem AR
Récursivité sur les coefficients		. Inversion pour chaque mémoire	. algorithme MCR . mémoire variable (critère sur P_e)	idem AR	idem Lagunas	. algorithme MCR . mémoire avec facteur d'oubli
Estimation du spectre sur une mémoire		$P_e/a^T[n].a[n]$	$P_e/Z^+.a[n].a[n]^T.Z$	idem AR	idem Lagunas	—
ESTIMATION DE RAIES SPECTRALES	Estimation des fréquences	Position des pics du spectre	Position des pics du spectre ou phase des pôles du modèle AR	idem AR	idem Lagunas	Phase des pôles du modèle AR Estimation récursive des pôles par algorithme de Hoxha
	Estimation de puissances ou amplitudes associées aux raies	Maxima des pics	Maxima des pics ou surface des pics	Capon aux fréquences estimées $P = \frac{1}{Z^+.R[n]^{-1}.Z}$	Capon aux fréquences estimées $P = \frac{1}{Z^+.R[n]^{-1}.Z}$	Résolution MC (système de Van der Monde) Récursivité par approximations de PADE

Tableau II.

— calcul des amplitudes complexes → approximatifs de Padé.

• ARMA par filtrage de Kalman étendu.

La méthode AR évolutif est la seule, présentée dans le groupe II, qui introduit directement la notion de non-stationnarité. Les coefficients du modèle AR du signal non-stationnaire s'expriment comme combinaisons linéaires de fonctions dépendant du temps, fonction en nombre fini connues *a priori*.

Le travail de synthèse effectué ici n'a pas la prétention d'être définitif et exhaustif. Au niveau des applications potentielles en particulier, seules quelques indications sont fournies, des références plus complètes pouvant être trouvées dans la littérature (par exemple dans l'article de synthèse [2] ou encore dans la monographie [7], plus spécifiquement consacrée aux signaux de parole).

Patrick Flandrin
Nadine Martin

[1] S. M. KAY, « Modern Spectral Estimation », Prentice-Hall, 1988.

[2] L. COHEN, « Time-Frequency Distribution — A Review », *Proc. IEEE*, Vol. 77, N° 7, pp. 941-981, 1989.

[3] P. FLANDRIN, « Représentations Temps-fréquence des Signaux Non-stationnaires », Thèse d'état, INPG, 1987.

[4] F. AUGER, C. DONCARLI, « Quelques Commentaires sur des Représentations Temps-Fréquence Proposées Récemment », rapport interne LAN-ENSM N° 91.01, 1991.

[5] A. J. E. M. JANSSEN, « Positivity of Time-Frequency Distribution Functions », *Signal Proc.*, Vol. 14, N° 3, pp. 243-252, 1988.

[6] O. RIOUL, P. FLANDRIN, « Time-Scale Energy Distributions : A general Class Extending Wavelet Transforms », *IEEE Trans. on Signal Processing*, à paraître.

[7] C. DEMARS, « Représentation Temps-Fréquence et Paramétrisations d'un signal — Eléments de Monographie », Notes et Documents LIMSI 90-9, novembre 1990.

[8] M. A. LAGUNAS, M. E. SANTAMARIA, A. GASULL, A. MORENO, « Maximum Likelihood Filters in Spectral Estimation Problems », *Signal Processing*, N° 10, pp. 19-34, 1986.

[9] Y. GRENIER, « Modélisation de signaux non-stationnaires », Thèse d'État, Orsay, 1984.

[10] C. GUEGUEN, « Analyse de la parole par les méthodes de modélisation paramétrique », *Annales des Télécommunications* 40, nos 5-6, 1985.

[11] S. L. MARPLE, « Digital Spectral Analysis with Applications », Prentice-Hall, 1987.

Auteurs de la partie « Méthodes Temps-fréquence »

Nadine MARTIN, CEPHAG-ENSIEG, BP 46, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex. Tél. : 76 82 62 69. Fax : 76 82 63 84.

Franck MOLINARO, GAPSE-ENSEEIH, 2, rue Camichel, 31071 Toulouse Cedex. Tél. : 61 58 83 67. Fax : 61 62 09 76.

Jean-Philippe OVARLEZ, ONERA, Ch. de la Hunière, Fort de Palaiseau, 91 Palaiseau. Tél. : (1) 60 10 80 00. Fax : (1) 60 14 70 99.

François AUGER, LAN-ENSM, 1, rue de la Noë, 44072 Nantes Cedex. Tél. : 40 37 16 00. Fax : 40 74 74 06.

Jérôme MARS, CEPHAG-ENSIEG, BP 46, 38042 Saint-Martin-d'Hères Cedex. Tél. : 76 82 64 21. Fax : 76 82 63 84.

Patrick FLANDRIN, ENS Lyon (Physique), 46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07. Tél. : 72 72 81 60. Fax : 72 72 80 80.

Thierry DOLIGEZ, Kurtosis Ingénierie, 5, avenue du Parc, Le Campus, 95033 Cergy-Pontoise Cedex. Tél. : (1) 34 24 92 59. Fax : (1) 34 25 32 20.

Christian DEMARS, LIMSI-CNRS, BP 30, 91406 Orsay Cedex. Tél. : (1) 69 85 81 18. Fax : (1) 69 85 50 88.

Catherine LAMBERT-NEBOUT, CNES/TE/AE/SE/TB, 18, avenue E. Belin, 31055 Toulouse Cedex. Tél. : 61 27 33 08. Fax : 61 28 19 96.

Olivier RIOUL, CNET/PAB/RPE/ETP, 38-40, rue Général Leclerc, 92131 Issy-les-Moulineaux. Tél. : (1) 45 29 43 37. Fax : (1) 45 29 60 52.

méthodes \ labos	AR glissant	AR MCR mémoire variable	AR évolutif	Logunas glissant	méthodes hybrides AIRCAP - LAGCAP	Prony adaptatif	spectrogramme (Fourier court-terme)	scologramme (ondelettes)	Wigner-Ville	pseudo-Wigner-Ville lissé	Wigner-Ville lissé affine	affine unitaire	Régularisée affine unitaire	Choi-Williams	temps-fréquence instantanée	Zhao-Atlas-Marks
CEPHAG	■			■												
ONERA							■	■				■				
LAN-ENSM							■	■	■					■		■
CNET/PAB							■			■						
ENS Lyon							■	■	■	■				■		■
GAPSE-N7	■	■	■			■										
CNES						■										
LIMSI															■	
Kurtosis							■	■	■	■				■		■

■ réaction

■ coordination

Quelques remarques sur la notation

lettres minuscules signal dans le domaine temporel
 lettres majuscules signal dans le domaine fréquentiel
 x signal réel à analyser
 ρ_x représentation conjointe en temps et fréquence du signal x

$x[n]$ variable discrète entre crochets
 $x(t)$ variable continue entre parenthèses
 exemple $\rho_x[n, \nu]$ temps discret et fréquence continue
 exposant H transposé conjugué
 T transposé
 * conjugué.

Spectrogramme (Fourier à court terme)

1. Références bibliographiques

Publication originale

W. KOENIG, H. K. DUNN, L. Y. LACY, « The sound spectrograph », *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 18, N° 1, pp. 19-49, 1946.

Point d'entrée bibliographique conseillé

J. B. ALLEN, L. R. RABINER, « A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis », *Proc. IEEE*, Vol. 65, N° 11, pp. 1558-1564, 1977.

Exemples d'applications

Parole, biomédical, ... (signaux à non-stationnarités lentes).

2. Idée générale et hypothèses

Considérer un signal comme stationnaire sur une fenêtre d'analyse à court-terme de telle sorte qu'une analyse spectrale classique soit localement valable.

3. Principe de la méthode

Appliquer l'analyse de Fourier à des segments temporels successifs prélevés sur le signal par une fenêtre h (transformation de Fourier à court-terme + module carré).

Définition à temps continu :

$$\rho_x(t, \nu) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t + \tau) e^{-i 2 \pi \nu \tau} d\tau \right|^2$$

Définition à temps discret :

$$\rho_x(n, \nu) = \left| \sum_{k=-N+1}^{N-1} h[k] x[n+k] e^{-i 2 \pi \nu k} \right|^2$$

4. Quelques caractéristiques de la méthode

Introduction d'une fenêtre à court-terme nécessitant une connaissance *a priori* sur la validité de l'hypothèse de stationnarité locale.

Résolutions temporelle et fréquentielle en conflit.

5. Algorithme

Objets manipulés

x : signal réel de N_x points
 n_0 : instant initial
 Δ : incrément temporel
 h : fenêtre d'observation à court-terme (rectangulaire, Kaiser-Bessel, Hamming, Bartlett, ...) de $2N - 1$ points

TFR : Transformée de Fourier rapide.

Séquencement

1) A tout instant n désiré ($n = n_0 + (m - 1) \Delta$, $m = 1, \dots, N_T$), former le signal à court-terme $h[k] x[n+k]$ de $2N - 1$ points autour de n et le compléter, par des zéros, à une dimension N_{TFR} correspondant à une puissance de 2 supérieure.

2) Prendre la TFR du résultat sur N_{TFR} points et en calculer le module carré. On obtient ainsi une matrice temps-fréquence de $N_T \times N_{TFR}$ points dont les $(N_{TFR}/2 + 1)$ premiers échantillons fréquentiels correspondent aux fréquences positives.

Références complémentaires et remarques

Implantation possible dans le domaine fréquentiel (banc de filtres uniforme).

Perte d'une part importante de l'information contenue dans la phase.

Discussion sur le choix des fenêtres dans F. J. HARRIS, 1978, « On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform », *Proc. IEEE*, 66 (1), pp. 51-83.

Wigner-Ville

1. Références bibliographiques

Publications originales

- E. P. WIGNER, « On the quantum correction for thermodynamic equilibrium », *Phys. Rev.*, Vol. 40, pp. 749-759, 1932.
- J. VILLE, « Théorie et application de la notion de signal analytique », *Câbles et Transmissions*, 2^e A, N° 1, pp. 61-74, 1948.

Points d'entrées bibliographiques conseillés

- T. A. C. M. CLAASEN, W. F. G. MECKLENBRÄUKER, « The Wigner distribution — A tool for time-frequency signal analysis » — (3 parts), *Philips J. Res.*, Vol. 35, N° 3, 4/5, 6, pp. 217-250, 276-300, 372-389, 1980.
- P. FLANDRIN, B. ESCUDIÉ, « Principe et mise en œuvre de l'analyse temps-fréquence par transformation de Wigner-Ville », *Traitement du Signal*, Vol. 2, N° 2, pp. 142-151, 1985.

Exemples d'applications

Géophysique, acoustique, vibrations, parole, ... (signaux à non-stationnarités rapides, signaux transitoires, signaux à petit nombre de composantes).

2. Idée générale et hypothèses

Mesurer la symétrie locale d'un signal autour d'un point temps-fréquence.

Ne pas faire d'hypothèse de stationnarité locale.

3. Principe de la méthode

Définition à temps continu :

$$\rho_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i 2 \pi \nu \tau} d\tau$$

Définition à temps discret :

$$\rho_x[n, \nu] = 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n+k] x^*[n-k] e^{-i 4 \pi \nu k}$$

4. Quelques caractéristiques de la méthode

Pas de repliement spectral si x est soit 1) réel et suréchantillonné (par rapport à Shannon) d'un facteur au moins égal à 2, soit 2) analytique.

La distribution de Wigner-Ville possède un grand nombre de propriétés de covariance (translations, changements d'échelle, filtrages, modulations, ...).

Localisation parfaite sur les « chirps » idéaux (modulations de fréquence linéaires).

Existence de valeurs négatives et de termes d'interférences, d'où une lisibilité réduite dans le cas de signaux à grand nombre de composantes. Les interférences portent néanmoins une information utile sur les relations de phase entre les composantes d'un signal.

5. Algorithme

Objets manipulés

- x : signal réel de N_x points
- x_a : signal analytique associé à x
- n_0 : instant initial
- Δ : incrément temporel
- TFR : Transformée de Fourier rapide
- TH : Transformée de Hilbert

Séquencement

1) A partir du signal réel x , calculer le signal analytique associé x_a (on peut éventuellement conserver le signal sous forme réelle, mais à condition qu'il soit suréchantillonné d'un facteur au moins égal à 2). Pour le calcul du signal analytique, on peut soit :

- calculer la TFR de x , mettre à 0 les fréquences négatives, multiplier par 2 les fréquences strictement positives et calculer la TFR inverse ;
- complexifier x en lui ajoutant une partie imaginaire égale à sa TH.

2) A tout instant n désiré ($n = n_0 + (m-1)\Delta$, $m = 1, \dots, N_T$), former le noyau $2 x_a[n+k] x_a^*[n-k]$ (dimension N_T points) et le compléter, par des zéros, à une dimension N_{TFR} correspondant à une puissance de 2 supérieure.

3) Prendre la TFR (à N_{TFR} points et portant sur k) du noyau. Sa partie réelle fournit alors une matrice temps-fréquence de $N_T \times N_{TFR}$ points dont les N_{TFR} échantillons fréquentiels correspondent aux seules fréquences positives, sa partie imaginaire étant nulle.

Références complémentaires et remarques

Réduction possible du nombre des opérations en utilisant la symétrie hermitienne du noyau.

Prévoir que le support temporel de x_a est plus grand que N_x .

Pseudo Wigner-Ville lissé

1. Références bibliographiques

Publications originales

- T.A.C.M. CLAASEN, W. F. G. MECKLENBRÄUKER, « The Wigner distribution. A tool for time-frequency signal analysis » (3 parts), *Philips J. Res.*, Vol. 35, N° 3, 4/5, 6, pp. 217-250, 276-300, 372-389, 1980.
- W. MARTIN, P. FLANDRIN, « Analysis of nonstationary processes : short-time periodograms vs. a pseudo-Wigner estimator », in : *Signal Processing II. Theories and Applications* (H. W. Schüssler, ed.), pp. 455-458, North-Holland, Amsterdam, 1983.

Points d'entrées bibliographiques conseillés

- P. FLANDRIN, B. ESCUDIÉ, « Principe et mise en œuvre de l'analyse temps-fréquence par transformation de Wigner-Ville », *Traitement du Signal*, Vol. 2, N° 2, pp. 142-151, 1985.
- P. FLANDRIN, « Some features of time-frequency representations of multicomponent signals », *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-84*, pp. 41B.4.1-41B.4.4, San Diego (CA), 1984.

Exemples d'application

Cf. Wigner-Ville.

2. Idée générale et hypothèses

Réduction des interférences de la distribution de Wigner-Ville par lissage dans le plan temps-fréquence. Possibilité de travailler à court-terme en utilisant une fenêtre glissante.

3. Principe de la méthode

Utiliser une fonction de lissage séparable en temps et fréquence.

Définition à temps continu :

$$\rho_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| h\left(\frac{\tau}{2}\right) \right|^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(u-t) x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \times x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du \right] e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau.$$

Définition à temps discret :

$$\rho_x[n, \nu] = 2 \sum_{k=-N+1}^{N-1} |h[k]|^2 \left[\sum_{m=-M+1}^{M-1} g[m] \times x[n+m+k] x^*[n+m-k] \right] e^{-i4\pi\nu k}$$

h : fenêtre d'observation à court-terme assurant la fonction de lissage fréquentiel.

g : fenêtre de lissage temporel.

4. Quelques caractéristiques de la méthode

Cf. Wigner-Ville pour l'échantillonnage.

Réduction des interférences de Wigner-Ville au détriment de la résolution conjointe et des propriétés marginales. Permet une transition entre Wigner-Ville et le spectrogramme.

5. Algorithme

Objets manipulés

- x : signal réel de N_x points
- x_a : signal analytique associé à x
- n_0 : instant initial
- Δ : incrément temporel
- h : fenêtre d'observation à court-terme (rectangulaire, Kaiser-Bessel, Hamming, Bartlett, ...) de $2N - 1$ points
- g : fenêtre de lissage temporel (rectangulaire, Kaiser-Bessel, Hamming, Bartlett, ...) de $2M - 1$ points
- TFR : Transformée de Fourier rapide
- TH : Transformée de Hilbert

Séquencement

1) A partir du signal réel x , calculer le signal analytique associé x_a (on peut éventuellement conserver le signal sous forme réelle, mais à condition qu'il soit suréchantillonné d'un facteur au moins égal à 2). Pour le calcul du signal analytique, on peut soit :

- calculer la TFR de x , mettre à 0 les fréquences négatives, multiplier par 2 les fréquences strictement positives et calculer la TFR inverse ;
- complexifier x en lui ajoutant une partie imaginaire égale à sa TH.

2) A tout instant n désiré ($n = n_0 + (m - 1) \Delta$, $m = 1 \dots N_T$),

- former les noyaux $2 x_a[m+k] x_a^*[m-k]$ sur $2N - 1$ points en k autour de 0, et ceci pour les $2M - 1$ instants m autour de n ;
- pour chaque k , sommer ces $2M - 1$ noyaux en les pondérant par g ;
- multiplier la somme pondérée par $|h[k]|^2$ et la compléter, par des zéros, à une dimension N_{TFR} correspondant à une puissance de 2 supérieure.

3) Prendre la TFR (à N_{TFR} points et portant sur k) du résultat. Sa partie réelle fournit alors une matrice temps-fréquence de $N_T \times N_{\text{TFR}}$ points dont les N_{TFR} échantillons fréquentiels correspondent aux seules fréquences positives, sa partie imaginaire étant nulle.

Références complémentaires et remarques

La largeur équivalente de g permet de régler l'incrément temporel Δ entre 2 sections successives à calculer.

Pour le choix de h , cf. spectrogramme.

Idem en général pour le choix de g . Cependant, si la distribution pseudo-Wigner-Ville lissée est considérée comme un estimateur du spectre de Wigner-Ville de signaux aléatoires (cf. Martin et Flandrin, 1983), une fenêtre rectangulaire est suffisante pour réduire les fluctuations statistiques d'estimation.

Choi-Williams

1. Références bibliographiques

Publication originale

H. I. CHOÏ, W. J. WILLIAMS, « Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels », *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, Vol. ASSP-37, N° 6, pp. 862-871, 1989.

Points d'entrées bibliographiques conseillés

H. I. CHOÏ, W. J. WILLIAMS, « Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels », *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, Vol. ASSP-37, N° 6, pp. 862-871, 1989.

L. COHEN, « Time-frequency distribution. A review », *Proc. IEEE*, Vol. 77, N° 7, pp. 941-981, 1989.

Exemples d'applications

Biomédical.

2. Idée générale et hypothèses

Réduction des termes d'interférences de la distribution de Wigner-Ville tout en préservant les distributions marginales temporelle et fréquentielle.

3. Principe de la méthode

Utiliser une fonction de pondération (dans la classe de Cohen) qui dépende de ses variables *via* leur produit. Choix effectif : une gaussienne paramétrée par une « variance » σ .

Définition à temps continu :

$$\rho_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau^2\sigma}} e^{-\frac{(u-t)^2}{4\tau^2\sigma}} x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \times x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau.$$

Définition lissée à temps discret :

$$\rho_x[n, \nu] = 2|h[0]|^2 \cdot |x[n]|^2 + 2 \sum_{k=-N+1, k \neq 0}^{N-1} |h[k]|^2 K[n, k] e^{-i4\pi\nu k}$$

avec

$$K[n, k] = \sum_{m=-M+1}^{M-1} g[m] \frac{1}{\sqrt{16\pi k^2\sigma}} \times e^{-\frac{m^2}{16k^2\sigma}} x[n+m+k] x^*[n+m-k].$$

4. Quelques caractéristiques de la méthode

Wigner-Ville = limite de Choi-Williams lorsque σ tend vers l'infini.

Constataion empirique : choisir $1 < \sigma < 80$.

Non-conservation des supports temporels et fréquentiels.

Réduction de l'amplitude des interférences mais délocalisation.

5. Algorithme

Objets manipulés

- x : signal réel de N_x points
- x_a : signal analytique associé à x
- n_0 : instant initial
- Δ : incrément temporel
- h : fenêtre d'observation à court-terme (rectangulaire, Kaiser-Bessel, Hamming, Bartlett, ...) de $2N - 1$ points
- g : fenêtre de lissage temporel (rectangulaire, Kaiser-Bessel, Hamming, Bartlett, ...) de $2M - 1$ points

$$\text{pond}(m, k) = \frac{1}{\sqrt{16\pi k^2\sigma}} e^{-\frac{m^2}{16k^2\sigma}}$$

TFR : Transformée de Fourier rapide

TH : Transformée de Hilbert

Séquencement

1) A partir du signal réel x , calculer le signal analytique associé x_a (on peut éventuellement conserver le signal sous forme réelle, mais à condition qu'il soit suréchantillonné d'un facteur au moins égal à 2). Pour le calcul du signal analytique, on peut soit :

- calculer la TFR de x , mettre à 0 les fréquences négatives, multiplier par 2 les fréquences strictement positives et calculer la TFR inverse ;
- complexifier x en lui ajoutant une partie imaginaire égale à sa TH.

2) A tout instant n désiré

$$(n = n_0 + (m - 1)\Delta, m = 1 \dots N_T),$$

- former les noyaux $2x_a[m+k]x_a^*[m-k]$ sur $2N - 1$ points en k autour de 0, et ceci pour les $2M - 1$ instants m autour de n ,
- pour chaque $k \neq 0$, sommer ces $2M - 1$ noyaux en les pondérant par $g \cdot \text{pond}$. Pour $k = 0$, imposer la valeur $2|h[0]|^2 \cdot |x[n]|^2$,
- multiplier la somme pondérée par $|h[k]|^2$ et la complé-

ter, par des zéros, à une dimension N_{TFR} correspondant à une puissance de 2 supérieure.

3) Prendre la TFR (à N_{TFR} points et sur k) du résultat. Sa partie réelle fournit alors une matrice temps-fréquence de $N_T \times N_{\text{TFR}}$ points dont les N_{TFR} échantillons fréquentiels correspondent aux seules fréquences positives, sa partie imaginaire étant nulle.

Références complémentaires et remarques

La largeur équivalente de g permet de régler l'incrément temporel Δt entre 2 sections successives à calculer. A la différence de l'article original de Choi et Williams, la définition à temps discret choisie utilise le même σ que la forme continue.

Zhao-Atlas-Marks

1. Références bibliographiques

Publication originale

Y. ZHAO, L. E. ATLAS, R. J. MARKS, « The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals », *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, Vol. ASSP-38, N° 7, pp. 1084-1091, 1990.

Point d'entrée bibliographique conseillé

Y. ZHAO, L. E. ATLAS, R. J. MARKS, « The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals », *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, Vol. ASSP-38, N° 7, pp. 1084-1091, 1990.

Exemples d'applications

Parole.

2. Idée générale et hypothèses

Réduire les interférences de Wigner-Ville tout en conservant le support temporel.

3. Principe de la méthode

Utiliser une fonction de pondération (dans la classe de Cohen) qui soit nulle en-dehors d'un cône dans le plan temps-temps.

Définition à temps continu :

$$\rho_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau/2)|^2 \left[\int_{t-|\tau|/a}^{t+|\tau|/a} x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \times x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du \right] e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau.$$

Définition à temps discret :

$$\rho_x[n, \nu] = 2 \sum_{k=-N+1}^{N-1} |h[k]|^2 \left[\sum_{m=-|k|}^{|k|} x[n+m+k] \times x^*[n+m-k] \right] e^{-i4\pi\nu k}.$$

4. Quelques caractéristiques de la méthode

Méthode récente dont les précautions d'emploi restent à préciser.

5. Algorithme

Objets manipulés

x : signal réel de N_x points
 x_a : signal analytique associé à x
 n_0 : instant initial
 Δ : incrément temporel
 h : fenêtre d'observation à court-terme (rectangulaire, Kaiser-Bessel, Hamming, Hanning, Bartlett, ...) de $2N - 1$ points

TFR : Transformée de Fourier rapide

TH : Transformée de Hilbert.

Séquencement

1) A partir du signal réel x , calculer le signal analytique associé x_a (on peut éventuellement conserver le signal sous forme réelle, mais à condition qu'il soit suréchantillonné d'un facteur au moins égal à 2). Pour le calcul du signal analytique, on peut soit :

- calculer la TFR de x , mettre à 0 les fréquences négatives, multiplier par 2 les fréquences strictement positives et calculer la TFR inverse ;
- complexifier x en lui ajoutant une partie imaginaire égale à sa TH.

A tout instant n désiré

$$(n = n_0 + (m - 1) \Delta, m = 1 \dots N_T),$$

- former les noyaux $2x_a[m+k]x_a^*[m-k]$ sur $2N - 1$ points en k autour de 0, et ceci pour les $2M - 1$ instant m autour de n ,
- pour chaque k , sommer ces $2M - 1$ noyaux de $-|k|$ à $+|k|$,
- pondérer la somme par $|h[k]|^2$ et la compléter, par des zéros, à une dimension N_{TFR} correspondant à une puissance de 2 supérieure.

1) Prendre la TFR (à N_{TFR} points et sur k) du résultat. Sa partie réelle fournit alors une matrice temps-fréquence de $N_T \times N_{TFR}$ points dont les N_{TFR} échantillons fréquentiels correspondent aux seules fréquences positives, sa partie imaginaire étant nulle.

Scalogramme (Ondelettes continues)

1. Références bibliographiques

Publications originales

- P. GOUPILLAUD, A. GROSSMANN et J. MORLET, « Cycle-Octave and Related Transforms in Seismic Signal Analysis », *Geoexploration*, Vol. 23, pp. 85-102, Elsevier Science Publishers, B.V. Amsterdam, Netherlands, 1984/85.
- A. GROSSMANN et R. KRONLAND-MARTINET, « Time and Scale Representations Obtained Through Continuous Wavelet Transforms », in *Proc. Int. Conf. EUSIPCO'88, Signal Processing IV: Theories and Applications*, J. L. Lacoume, A. Chehikian, N. Martin and J. Malbos eds., Elsevier Science Publishers, B.V. North Holland, pp. 475-482, 1988.

Point d'entrée bibliographique conseillé

- J. M. COMBES, A. GROSSMANN, Ph. TCHAMITCHIAN eds., *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 315 pages, 1989.

Exemples d'applications

Analyse de signaux : Acoustique, Parole, Écoulements turbulents. Détection/Estimation Sonar.

Analyse d'Images. Mécanique Quantique, Théorie Quantique des Champs.

2. Idée générale et hypothèses

Transformée linéaire inversible de type « analyse temps-fréquence » où la covariance par modulation (translation en Fourier) est remplacée par la covariance par dilatation/contraction (changement d'échelle).

3. Principe de la méthode

Représentation « temps-échelle »

$$T_x(t, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^* \left(\frac{\tau - t}{a} \right) d\tau$$

où $\psi(t)$ est l'ondelette analysante.

- Peut être vu comme une décomposition du signal sur les fonctions de base

$$\frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^* \left(\frac{t - b}{a} \right) \text{ « ondelettes ».}$$

- Grande flexibilité sur le choix de ψ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$, régulière, localisée en temps et en fréquence.

- La localisation de ψ autour d'une fréquence ν_0 permet de se rattacher à une analyse temps-fréquence en posant $\nu = \frac{\nu_0}{a}$.

- Le scalogramme est alors défini par $\rho_x(t, \nu) = \left| T_x \left(t, \frac{\nu_0}{\nu} \right) \right|^2$.

4. Quelques caractéristiques de la méthode

Reconstruction robuste (au sens L_p ($1 < p < \infty$)) par sommation des projections. Une autre formule de construction ne nécessite qu'une intégration et est plus simple à mettre en œuvre (Goupillaud 1984/85).

Analyse multirésolution en temps et en fréquence (différentes valeurs de Δt et $\Delta \nu$ dans une même analyse). La dynamique de l'analyse en résolution n'est pas limitée.

Analyse à « Q constant » ($\Delta \nu / \nu = \text{Cte}$) naturellement logarithmique en fréquence.

Complexité

Pour N voies par octave, J octaves, des données et coefficients de filtres (de longueur L) réels, l'algorithme présenté ci-dessous nécessite 2 L J N multiplications réelles par point d'entrée, $2(L - 1) \text{ J N}$ additions réelles par point d'entrée, ce qui croît linéairement par rapport au nombre d'octaves J au lieu d'exponentiellement par une méthode naïve.

Des techniques de TFR permettent d'obtenir un gain additionnel de $2/3 \text{ L} / \log_2 \text{ L}$ en complexité.

5. Algorithme

Objets manipulés

TFR à racine double (« Split-Radix » FFT) sur 2^N points (Duhamel 1986).

Séquencement

La transformée est calculée sur une grille régulière $a = a_0^j$, $b = kT$ dans le plan temps-échelle pour $j \geq 0$. On se restreint à $a_0 = 2$ (calcul octave par octave) : un calcul à N voies par octave peut se faire en appliquant le même algorithme à N ondelettes analysantes légèrement dilatées.

On suppose que la relation entre le signal continu et l'entrée $x[n]$ de l'algorithme discret peut être correctement représentée sous la forme :

$$x(t) = \sum_n x[n] \chi(t - nT)$$

(par exemple, si $x(t)$ est à bande limitée $\chi(t)$ est un sinus cardinal). On choisit deux filtres numériques passe-bas

$g[n]$ et passe-haut $h[n]$ tel que $\psi(t)$ est correctement approximée par

$$\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_n h[n] \phi(t-n)$$

où la « fonction interpolante » $\phi(t)$ vérifie certaines contraintes. Par exemple, si $\psi(t)$ est à bande limitée, $\phi(t)$ est un sinus cardinal. Un autre exemple classique pour $\phi(t)$ est l'interpolation spline d'un certain degré, auquel cas les $g[n]$ sont les coefficients binomiaux correspondants.

Sous ces conditions la transformée est calculée exactement par un banc de filtres classiques (où n'interviennent que les deux filtres g et h , dans lequel l'entrée discrète est une version filtrée de $x[n]$ par la séquence

$$f[n] = \int \chi(t) \phi(t-n) dt.$$

La structure des calculs de l'algorithme est très régulière (application répétée de cellules identiques).

Références complémentaires et remarques

- O. RIOUL, « Fast Algorithms for the Continuous Wavelet Transform », ICASSP-91, Toronto, Ontario, Canada, May 14-17, 1991.
- P. DUHAMEL, « Implementation of « Split-Radix » FFT Algorithms for Complex Real, and Real-Symmetric Data », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, Vol. ASSP-34, N° 2, pp. 285-295, April 1986.

Wigner-Ville lissé affine

1. Références bibliographiques

Publication originale

P. FLANDRIN, O. RIOUL, « Affine smoothing of the Wigner-Ville distribution », *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, ICASSP-90, pp. 2455-2458, Albuquerque (NM), 1990.

Point d'entrée bibliographique conseillé

P. FLANDRIN, O. RIOUL, « Affine smoothing of the Wigner-Ville distribution », *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, ICASSP-90, pp. 2455-2458, Albuquerque (NM), 1990.

Exemples d'applications

Pas d'applications publiées à ce jour.

2. Idée générale et hypothèses

Réduction des interférences de la distribution de Wigner-Ville par lissage affine dans le plan temps-fréquence, i.e. par convolution locale à bande relative constante.

3. Principe de la méthode

Utiliser une fonction de lissage séparable en temps et fréquence.

Définition à temps continu :

$$\rho_x(t, \nu) = \nu/\nu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{u-t}{\nu_0/\nu}\right) h\left(\frac{\tau}{\nu_0/\nu}\right) \times \\ \times x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du d\tau$$

avec ν_0/ν paramètre d'échelle.

Définition à temps discret :

$$\rho_x[n, \nu) = 2 \nu/\nu_0 \sum_{m=-M+1}^{M-1} \sum_{k=-N+1}^{N-1} g\left(\frac{m-n}{\nu_0/\nu}\right) \times \\ \times h\left(\frac{2k}{\nu_0/\nu}\right) x[m+k] x^*[m-k].$$

4. Quelques caractéristiques de la méthode

Permet une transition entre la distribution de Wigner-Ville (pas de lissage) et le scalogramme.

5. Algorithme

Objets manipulés

- x : signal réel
- x_a : signal analytique associé à x
- h : fenêtre d'observation (Gauss, Kaiser-Bessel, ...) centrée en fréquence autour de ν_0 et connue sous forme continue
- g : fenêtre de lissage temporel (Gauss, Kaiser-Bessel, ...) connue sous forme continue
- TFR : Transformée de Fourier rapide
- TH : Transformée de Hilbert

Séquencement

1) A partir du signal réel x , calculer le signal analytique associé x_a (on peut éventuellement conserver le signal sous forme réelle, mais à condition qu'il soit suréchantillonné d'un facteur au moins égal à 2). Pour le calcul du signal analytique, on peut soit :

- calculer la TFR de x , mettre à 0 les fréquences négatives, multiplier par 2 les fréquences strictement positives et calculer la TFR inverse ;
- complexifier x en lui ajoutant une partie imaginaire égale à sa TH.

2) A chacune des N_F fréquences ν désirées,

- calculer l'échelle $a = \nu_0/\nu$ associée,
- former la fenêtre $h(2ka)$ correspondante et évaluer sa longueur $2N_a - 1$,
- sommer les noyaux pondérés $2h(2ka)x_a[m+k]x_a^*[m-k]$ sur $2N_a - 1$ points en k autour de 0, et ceci pour chaque instant m ,
- former la fenêtre $g(ka)/a$ correspondante et évaluer sa longueur $2M_a - 1$.

3) Convolver cette fenêtre avec la somme des noyaux pondérés pour les N_T positions temporelles n désirées. On obtient ainsi une matrice temps-fréquence de $N_T \times N_F$ points.

Références complémentaires et remarques

En choisissant des fenêtres gaussiennes de taille variable, il est possible de passer de façon exacte et continue de Wigner-Ville au scalogramme (de Morlet) *via* Wigner-Ville lissé affine. Le même comportement reste qualitativement valable pour des fenêtres « douces ».

Représentation temps-fréquence affine unitaire

1. Références bibliographiques

Publications originales

J. BERTRAND, P. BERTRAND, J. P. OVARLEZ, « Discrete Mellin Transform For Signal Analysis », **ICASSP-90**, Albuquerque, 1990.

J. BERTRAND, P. BERTRAND, « Time-Frequency Representation of Broadband Signals », **ICASSP-88**, New York, 1988.

Point d'entrée bibliographique conseillé

J. BERTRAND, P. BERTRAND, « Time-Frequency Representation of Broadband Signals », **ICASSP-88**, New York, 1988.

Exemples d'applications

Analyse des signaux non stationnaires large bande. Acoustique, parole, ...

2. Idée générale et hypothèses

Représentation fondée sur le groupe affine, bien adaptée à la localisation des signaux réels, valable quelle que soit la largeur de bande relative des signaux. Extension large bande de la représentation de Wigner-Ville.

Hyp. : Signal x_a analytique et localisé dans le plan temps-fréquence

$$t_c - \frac{T}{2} \leq t \leq t_c + \frac{T}{2} \quad \text{et} \quad \nu_c - \frac{B}{2} \leq \nu \leq \nu_c + \frac{B}{2}.$$

3. Principe de la méthode

La représentation temps-fréquence affine unitaire a pour expression :

$$\rho_x(t, \nu) = \nu \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda(u) \lambda(-u))^{r+1} X_a(\nu \lambda(u)) \times X_a^*(\nu \lambda(-u)) e^{-2i\pi t \nu u} du$$

avec $\lambda(u) = \frac{u}{e^u - 1}$ et r paramètre de dimensionnement du signal x_a .

Les transformées directe et inverse de Mellin ont pour expressions :

$$M^t[X_a](\beta) = \int_0^{+\infty} X_a(\nu) e^{i2\pi t_c \nu} \nu^{2i\pi\beta+r} d\nu$$

$$X_a(\nu) = M^{-1}(M^t[X_a]) = e^{-2i\pi\nu t_c} \int_{-\infty}^{+\infty} M^t[X_a](\beta) \nu^{-2i\pi\beta-r-1} d\beta.$$

Posons

$$X_1(\nu) = \nu^{-r/2} X_a(\nu) \\ Y(\beta, u) = \lambda(u)^{-2i\pi\beta} M^t[X_1](\beta) \\ \gamma = \nu t$$

$\rho_x(t, \nu)$ se réécrit :

$$\rho_x'(\gamma, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\lambda(u) \lambda(-u)]^{r/2} \times \\ \times M^{-1} \left\{ \beta \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\beta_1, u) Y^*(\beta_1 - \beta, -u) d\beta_1 \right\} \times \\ \times e^{2i\pi\gamma u} du.$$

4. Quelques caractéristiques de la méthode

La localisation temps-fréquence (Bande B , Durée T , Bande relative $R = B/\nu_c$) du signal impose à la raison d'échantillonnage géométrique q du spectre de vérifier la relation : $1/\text{Ln } q > BT(1 + R/2)/2$ pour éviter le repliement.

- Pas d'interpolation. Calcul exact et rapide. Théorème d'échantillonnage maîtrisé.
- Échantillonnage géométrique de $X_a(\nu)$ en fréquence. Les échantillons calculés correspondent à des points sur des hyperboles dans le plan temps-fréquence : la transformation définie par $(t_j, \nu_i, \nu_i) \rightarrow (t_j, \nu_i)$ est nécessaire pour faire un tracé classique.

Complexité

Pour une image de (N_T, N_F) points, la complexité est (en nombre de TFR) : $(2N_T + 1) \cdot \text{TFR}$ sur $2N_F$ points + $(N_F) \cdot \text{TFR}$ sur N_T points.

5. Algorithme

Objets manipulés

- N_F : Nombre d'échantillons géométriques du spectre $X_a(\nu)$
- N_T : Nombre de points en temps
- B_k : $\beta_k = \frac{-1}{2 \text{Ln } q} + \frac{k-1}{2 N_F \text{Ln } q}$ discrétisation de la variable β
- $X_a[]$: Tableau $1 \times N_F$ des échantillons du spectre X_a
- ν_{\min}, ν_{\max} : Fréquences min et max du spectre
- q : Raison d'échantillonnage du spectre
- u_{\min}, u_{\max} : Bornes min et max de u (dépendent de $\lambda(u), \nu_{\min}, \nu_{\max}$)
- $M[]$: Tableau $1 \times 2 N_F$ Transformée de Mellin de $X_a(\nu)$

$Y_1[]$, $Y_2[]$: Tableau $1 \times 2 N_F$ Transformée de Fourier de $Y(\beta, \pm u)$ $\rho_x[]$: Tableau résultat $N_T \times N_F$
 $A[]$: Tableau $N_T \times N_F$ de travail TFR : Transformée de Fourier rapide

Séquencement

1) Échantillonnage géométrique de $X_a(\nu)$ sur son support $[\nu_{\min} \nu_{\max}]$ avec la raison $q = \left(\frac{\nu_{\min}}{\nu_{\max}} \right)^{1/N_F}$ et calcul de $M^c[X_1]$ par Mellin discret (TFR)

$$\begin{cases} X_a[i] = X_a(\nu_{\min} q^i) & 0 \leq i \leq N_F - 1 \\ X_a[i] = 0 & N_F \leq i \leq 2 N_F - 1 \end{cases}$$

$$M[k] = \sum_{p=0}^{2 N_F - 1} q^{(r/2 + 1)p} e^{2 i \pi t_c q^p \nu_{\min}} X_a[p] e^{2 i \pi \frac{kp}{2 N_F}} \quad 0 \leq k \leq 2 N_F - 1 .$$

2) Pour chaque u_n du support $[u_{\min} u_{\max}]$ $0 \leq n \leq N_T - 1$.

Calcul de $M^{-1} \left\{ \beta \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\beta_1, u) Y^*(\beta_1 - \beta, -u) d\beta_1 \right\}$

$$\begin{cases} Y_1[p] = \sum_{k=0}^{2 N_F - 1} \lambda(u_n)^{-2 i \pi \beta_k} M[k] e^{-2 i \pi \frac{kp}{2 N_F}} & 0 \leq p \leq 2 N_F - 1 \\ Y_2[p] = \sum_{k=0}^{2 N_F - 1} \lambda(-u_n)^{-2 i \pi \beta_k} M[k] e^{-2 i \pi \frac{kp}{2 N_F}} & 0 \leq p \leq 2 N_F - 1 \end{cases}$$

$$A[n, p] = q^{-p(r+1)} e^{-2 i \pi t_c q^p \nu_{\min}} Y_1[p] Y_2^*[p] \quad 0 \leq p \leq N_F - 1 .$$

3) Calcul de l'intégrale finale par Transformée de Fourier (Alg. TFR) sur u

$$\rho_x[k, p] = \sum_{n=0}^{N_T - 1} [\lambda(u_n) \lambda(-u_n)]^{r/2} A[n, p] e^{2 i \pi kn/N_T} \quad 0 \leq p \leq N_F - 1$$

4) La matrice résultat $\rho[k, p]$ représente les échantillons $\rho_x[t_k \nu_{\min} q^p, \nu_{\min} q^p]$. On peut les convertir en $\rho_x[t_k, \nu_p]$ pour utiliser un logiciel de tracé classique.

Régularisée de représentation temps-fréquence affine unitaire

1. Références bibliographiques

Publications originales

- J. BERTRAND, P. BERTRAND, J. P. OVARLEZ, « Discrete Mellin Transform For Signal Analysis », **ICASSP-90**, Albuquerque, 90.
- P. BERTRAND, F. TARDIVEL, « Représentation Temps-fréquence des Signaux. Application à un problème d'Imagerie Radar », **GRETSI**, 1985.
- J. BERTRAND, P. BERTRAND, « Time-Frequency Representation of Broadband Signals », **ICASSP-88**, New York, 1988.

Point d'entrée bibliographique conseillé

- P. BERTRAND, F. TARDIVEL, « Présentation Temps-fréquence des Signaux. Application à un problème d'Imagerie Radar », **GRETSI**, 1985.

Exemples d'applications

Imagerie Radar 1, 2 et 3 dimensions, Acoustique. Analyse de signaux non stationnaires large bande.

2. Idée générale et hypothèses

Analyse temps-fréquence de signaux par décomposition sur une base d'ondelettes. (Régularisée affine de la représentation de Bertrand.) Hyp. : Signal x_a analytique et localisé dans le plan temps-fréquence

$$t_c - \frac{T}{2} \leq t \leq t_c + \frac{T}{2} \quad \text{et} \quad \nu_c - \frac{B}{2} \leq \nu \leq \nu_c + \frac{B}{2}.$$

3. Principe de la méthode

La régularisée affine de la représentation affine unitaire est :

$$\rho_x(t, \nu) = \nu^{-4r-3} \left| \int_0^{+\infty} \nu_1^{2r+1} X_a(\nu_1) e^{2i\pi\nu_1 t} \Phi^* \left(\frac{\nu_1}{\nu} \right) d\nu_1 \right|^2$$

$\Phi(u)$ peut être l'équivalent large bande de l'ondelette de Gabor :

$$\Phi(u) = u^{2\pi n\lambda - r - 1} e^{-2\pi\lambda u} e^{-2i\pi t_c u}$$

(Ondelette de Klauder où λ contrôle sa bande passante). r est un paramètre de dimensionnement du signal X_a . Les transformées de Mellin continue et discrète de X_a ont pour expressions :

$$M^{tc}[X_a](\beta) = \int_0^{+\infty} X_a(\nu) e^{2i\pi\nu t_c} \nu^{2i\pi\beta+r} d\nu$$

$$M^{tc}[X_a] \left(\frac{p}{N_F \text{Ln } q} \right) = \frac{1}{\text{Ln } q} \sum_{k=p}^{p+N_F-1} q^{k(r+1)} \times e^{2i\pi t_c q^k} X_a(q^k) e^{2i\pi \frac{kp}{N_F}} \quad 0 \leq p \leq N_F - 1.$$

Si on pose $X_{a,t}(\nu) = X_a(\nu) e^{2i\pi\nu t}$, il vient :
Formule continue :

$$\rho_x(t, \nu) = \nu^{-2r-1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} M^{tc}[X_{a,t}](\beta) M^{tc}[\Phi](\beta) \nu^{-2i\pi\beta} d\beta \right|^2$$

Formule discrète :

$$\rho_x[t_n, \nu^p] = \nu^{p(-2r-1)} \left| \sum_{k=0}^{N_F-1} M^{tc}[S_{t_n}][k] M^{tc}[\Phi][k] e^{-2i\pi \frac{kp}{N_F}} \right|^2.$$

4. Quelques caractéristiques de la méthode

La localisation temps-fréquence (Bande B, Durée T, Bande relative $R = B/\nu_c$) du signal impose à la raison d'échantillonnage géométrique q du spectre de vérifier la relation : $1/\text{Ln } q > BT(1 + R/2)/2$ pour éviter le repliement.

- Pas d'interpolation. Calcul exact et rapide. Théorème d'échantillonnage maîtrisé.
- Échantillonnage géométrique de $X_a(\nu)$ en fréquence. Les échantillons en ν^p sont géométriques.

COMPLEXITÉ

Pour une image de (N_T, N_F) points en (t, ν) , complexité = $(2N_T + 1) \cdot \text{TFR}$ sur N_F points.

5. Algorithme

Objets manipulés

- N_F : Nbre d'échantillons géométrique du spectre $X_a(\nu)$
- N_T : Nbre de points en temps t_n
- ν_{\min}, ν_{\max} : Fréquence min et max du signal X_a
- q : Raison d'échantillonnage du spectre
- $X_a[]$: Tableau $1 \times N_F$ contenant les échantillons du spectre

$X_{a,n}[]$: Tableau de travail $1 \times N_F$
 $M[]$: Tableau $1 \times N_F$ transformée de Mellin de $\Phi(u)$
 $M_n[]$: Tableau $1 \times N_F$ transformée de Mellin de $X_{a,t_n}(\nu)$
 u_{\min} : $\sqrt{\frac{\nu_{\min}}{\nu_{\max}}}$ début de l'échantillonnage de $\Phi(u)$ autour de 1
 t_n : n -ième échantillon de temps (N_T points)
 $\rho_x[]$: Matrice résultat $N_T \times N_F$
 TFR : Transformée de Fourier rapide

3) Pour chaque temps t_n $0 \leq n \leq N_T - 1$
 Échantillonnage géométrique de $X_{a,t_n}(\nu)$ sur son support $[\nu_{\min}, \nu_{\max}]$ avec la raison $q = \left(\frac{\nu_{\min}}{\nu_{\max}}\right)^{1/N_F}$ et calcul de $M^{tc}[X_{a,t_n}](\beta)$ par transformée de Mellin discrète (Alg. TFR) :

$$X_{a,n}[k] = q^{k(r+1)} X_a[k] e^{2i\pi(t_n+t_c)\nu_{\min}q^k} \quad 0 \leq k \leq N_F - 1$$

$$M_n[p] = \sum_{k=0}^{N_F-1} X_{a,n}[k] e^{2i\pi\frac{kp}{N_F}} \quad 0 \leq p \leq N_F - 1$$

Transformée de Fourier discrète (TFR) sur β de $M^{tc}[X_{a,t_n}](\beta) M^{tc*}[\Phi](\beta)$:

$$\rho_x[t_n, \nu_{\min} q^p] = \nu_{\min} q^{p(-2r-1)} \left\{ \sum_{k=0}^{N_F-1} M_n[k] M^*[k] e^{-2i\pi\frac{kp}{N_F}} \right\}$$

$$0 \leq p \leq N_F - 1 .$$

Séquencement

1) Échantillonnage géométrique de $X_a(\nu)$ sur son support $[\nu_{\min}, \nu_{\max}]$ avec la raison $q = \left(\frac{\nu_{\min}}{\nu_{\max}}\right)^{1/N_F}$

$$X_a[j] = X_a(\nu_{\min} q^j) \quad 0 \leq j \leq N_F - 1 .$$

2) Échantillonnage géométrique de $\Phi(\nu)$ autour de la fréquence $\nu = 1$ avec la raison $q = \left(\frac{\nu_{\min}}{\nu_{\max}}\right)^{1/N_F}$ et calcul de $M^{tc}[\Phi](\beta)$ par transformée de Mellin discrète (Alg. TFR) :

$$\Phi[k] = q^{k(r+1)} \Phi(u_{\min} q^k) e^{2i\pi t_c q^k u_{\min}} \quad 0 \leq k \leq N_F - 1$$

$$M[p] = \sum_{k=0}^{N_F-1} \Phi[k] e^{2i\pi\frac{kp}{N_F}} \quad 0 \leq p \leq N_F - 1 .$$

Références complémentaires et remarques

Cette représentation est un cas particulier de scalogramme (avec ondelette de Klauder).

Représentation temps-fréquence instantanée

1. Références bibliographiques

Publication originale

C. BERTHOMIER, R. RIGUET, « Calcul analogique de l'enveloppe et de la fréquence instantanée des signaux TBF », Colloque sur l'utilisation du filtrage par corrélation en géophysique et en astronomie, Lyon, 1972.

Point d'entrée bibliographique conseillé

C. BERTHOMIER, « Instantaneous frequency and energy distribution of a signal », *Signal Processing*, N° 5, pp. 31-45, 1983.

C. DEMARS, « Représentations temps-fréquence et paramétrisations d'un signal, Éléments de monographie », *Note interne LIMSI 90-9*, pp. 31-42, novembre 1990.

Exemples d'applications

C. BERTHOMIER, « Fréquence instantanée et représentation du signal de parole », Actes du Séminaire *Traitement du signal de parole*, ENST, Paris, pp. 119-124, 15-16 décembre 1983.

C. DEMARS, J. L. GAUVAIN, « Application de la fréquence instantanée à la reconnaissance de mots isolés », Actes du Séminaire *Traitement du signal de parole*, ENST, Paris, pp. 226-224, 15-16 décembre 1983.

Segmentation de la parole, applications en reconnaissance, classification de la parole, traitement d'images obtenues par ultrasons, analyse de texture, traitement de données sismiques.

2. Idée générale et hypothèses

A tout instant on calcule l'énergie et la fréquence instantanée, respectivement l'enveloppe (à un facteur $\sqrt{2}$ près) et la dérivée de la phase du signal analytique que l'on associe au signal donné.

3. Principe de la méthode

A un signal $x(t)$ on associe le signal en quadrature $y(t)$ pour obtenir le signal complexe $s(t) = x(t) + iy(t)$ dont le carré du module est l'enveloppe : $e^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$, dont l'argument est la phase du signal analytique et la fréquence instantanée $\nu(t)$ la dérivée de la phase : $\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\arctg \left(\frac{y}{x} \right) \right) = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} \frac{1}{2\pi}$.

On fait donc correspondre au signal une distribution $\rho_x(t, \nu)$ où $\rho_x(t, \nu)$ est l'enveloppe, i.e. l'énergie du signal à l'instant t pour la fréquence instantanée ν . Par intégration de $\rho_x(t, \nu)$ par rapport au temps on obtient une fonction de la seule variable ν qui représente une distribution d'énergie sur l'axe des fréquences instantanées...

On peut effectuer cette intégration sur tout le signal ou sur une tranche de durée fixe que l'on déplace progressivement. On obtient ainsi dans le plan temps-fréquence instantané une représentation tridimensionnelle de type sonogramme.

4. Quelques caractéristiques de la méthode

L'utilisation de filtres de quadrature récursifs dispense du découpage en tranche de taille N , quelconque, qui n'est effectué que pour des raisons de commodité. De plus la construction de la distribution peut se faire aussi de façon indépendante sur un nombre N' d'échantillons quelconque pourvu que $N' < N$.

Des précautions particulières de sauvegarde de l'état du système sont à prendre si l'on veut que les tranches de signal se recouvrent.

La représentation n'est pas linéaire.

Si on utilise la technique des réseaux déphaseurs prévoir les effets de la réponse impulsionnelle du système en début de session de calcul.

Complexité

Cas de l'utilisation de réseaux déphaseurs

Le nombre d'opérations (additions + multiplications) dépend de la précision désirée pour les dérivées et la quadrature :

On choisit pour le calcul des signaux en quadrature des filtres de même taille N_1 (cf. référence ci-dessus) soit $2N_1$ opérations et pour le calcul des dérivées des filtres RIF d'ordre N_2 impair, soit en raison de leur antisymétrie N_2 opérations pour les 2 voies, le calcul de l'enveloppe et de la fréquence instantanée nécessitant 4 multiplications, 2 additions et une division.

Dans l'application en reconnaissance de parole $N_1 = 4$, $N_2 = 15$.

5. Algorithme

Séquencement

(cas de l'utilisation de réseaux déphaseurs)

Choix d'une tranche de signal N échantillons : ISIG [N].

Calcul des signaux en quadrature : X[N], Y[N].

Calcul des dérivées de ces signaux : XP[N], YP[N].

Calcul de l'enveloppe et de la fréquence instantanée : EN[N], FI[N].

Les dérivées sont calculées soit par transformée de Fourier, soit par filtres différentiateurs (RIF).

L'obtention de la distribution se fait par sommation par rapport au temps : pour chaque bande de fréquence instantanée choisie, on fait la somme de l'énergie présente (tri + sommation).

Références complémentaires et remarques

Calcul du signal analytique

Il existe plusieurs façons de déterminer le signal analytique :

Par transformée de Fourier : on calcule la transformée de Fourier du signal, on multiplie par 2, on met à zéro la partie correspondant aux fréquences négatives, on effectue une transformée de Fourier inverse pour avoir le signal en quadrature.

Par utilisation d'un réseau déphaseur à 90 degrés. Le réseau fournit à partir du signal d'entrée deux signaux déphasés entre eux de 90 degrés sur toute une bande de fréquence (Réseau à large bande).

C. DEMARS, « Détermination pratique d'un réseau déphaseur à 90 degrés numérique et à large bande », *Onde électrique*, Vol. 64, pp. 108-113, N° 4, Mars-Avril 1984.

L'ensemble de la méthode a été primitivement développé en analogique.

Une interpolation de la fréquence instantanée et de l'enveloppe a amélioré le taux de reconnaissance, dans l'application en reconnaissance de la parole. En effet il est possible que la variation de la fréquence instantanée soit plus importante que celle du signal.

Les codages de l'image obtenue alors dans les expériences de reconnaissance avaient été appropriés au cas de la parole (Échelle fréquentielle en bark, résolution temporelle, échelle logarithmique adaptée, codage différentiel).

L. R. RABINER, R. W. SCHAFER, « On the behaviour of minimax relative error FIR digital differentiators, *Bell System Technical Journal*, Vol. 5, N° 2, pp. 333-361, February 1974.

Lagunas généralisé glissant

1. Références bibliographiques

Publication originale

M. A. LAGUNAS-HERNANDEZ, A. GASULL-LLAMPADAS, « An improved maximum likelihood method for power spectral density estimation », *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, N° 1, february 1984.

Point d'entrée bibliographique conseillé

J. FERNANDEZ, N. MARTIN, « Adaptive spectral estimation by ML filtering », *Signal Processing III - Theory and Applications*, pp. 323-326, 1986.

Exemples d'applications

L. BONDANT, J. MARS, N. MARTIN, « Analyse de signaux non stationnaires par des méthodes Temps-Fréquences », 1^{er} CFA, pp. 725-728, Lyon, 1990.

2. Idée générale et hypothèses

Extension de la méthode de Capon à l'estimation de la densité spectrale de puissance en divisant la puissance par la bande équivalente du filtre sur une mémoire glissante (cf Fiche CAPON).

3. Principe de la méthode

$$\mathbf{x}^T[n] = (x[n], \dots, x[n-p])$$

$$\mathbf{e}^T[n] = (e[n], \dots, e[n-p])$$

$$\mathbf{a}[n] = (a_0, a_1, \dots, a_p)$$

$$\mathbf{x}[n] \text{ --- } \boxed{\mathbf{a}[n]} \text{ --- } \mathbf{e}[n]$$

$$\mathbf{R}[n] = E \{ \mathbf{x}[n] \cdot \mathbf{x}^T[n] \} \quad \text{dimension } (p+1) \cdot (p+1)$$

Modèle	Aucun
Algorithme adaptatif	Mémoire glissante mais fixe - Stationnarité locale - Pas d'algorithme récursif. Inversion à chaque date.
① Estimateur de Corrélation R	Toutes possibilités envisageables. Choix : Méthode de covariance progressive et rétrograde. $\mathbf{R}[n]$ est estimée sur une longueur N du signal \mathbf{x} .
② Estimation a et P_e	<p>OBJECTIF Puissance $\mathbf{a}[n]^T \mathbf{R}[n]^{q/2} \mathbf{a}[n]$ minimale.</p> <p>CONTRAINTE $\mathbf{a}[n]^T \mathbf{z} = 1$ où $\mathbf{z}^T = [1, \exp(2i\pi\nu t_e), \dots, \exp(2i\pi\nu t_e p)]$</p> <p>SOLUTION $\mathbf{a}[n] = \frac{\mathbf{R}[n]^{q/2} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{R}[n]^{q/2} \mathbf{z}}$ $P_e[n] = \mathbf{a}[n]^T \mathbf{R}[n] \mathbf{a}[n] = \frac{\mathbf{z}^H \mathbf{R}[n]^{-q+1} \mathbf{z}}{(\mathbf{z}^H \mathbf{R}[n]^{-q/2} \mathbf{z})^2}$</p> <p>(Amélioration de la convergence)</p>
③ Estimateur de temps-fréquence	<p>$\rho[n, \nu]$ est obtenu par normalisation de la puissance de la bande équivalente du filtre :</p> $P_e[n] = \int_{-B/2}^{B/2} \rho[n, \nu] \cdot a(\nu) ^2 d\nu$ <p>Si la bande B du filtre est très étroite, $\rho[n, \nu]$ est plate dans la bande B</p> <p>alors $P_e[n] = \rho[n, \nu] \cdot \int_{-B/2}^{B/2} a(\nu) ^2 d\nu$</p> <p>d'où $\rho_x[n, \nu] = P_e[n] / \mathbf{a}^T \mathbf{a} = \frac{\mathbf{z}^H \mathbf{R}[n]^{-q+1} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{R}[n]^{-q} \mathbf{z}}$</p>
Remarques	$e[n] =$ Information spectrale

4. Quelques caractéristiques

Haute résolution fréquentielle. Courtes fenêtres. Pas de modélisation.

Estimateur de fréquence et non de dsp, qui n'estime pas l'amplitude associée à chaque fréquence sauf pour $q \leq 1$. Stationnarité locale. Non récursif. La valeur de q ne doit pas être trop élevée ($q \leq 5$).

- $q = 0$: Périodogramme (filtre a indépendant du signal).
- $q = 2$: Lagunas.
- $q = 1$: Capon (cas particulier : Estimateur de puissance).
- $q > 2$: Lagunas généralisé.

5. Algorithme

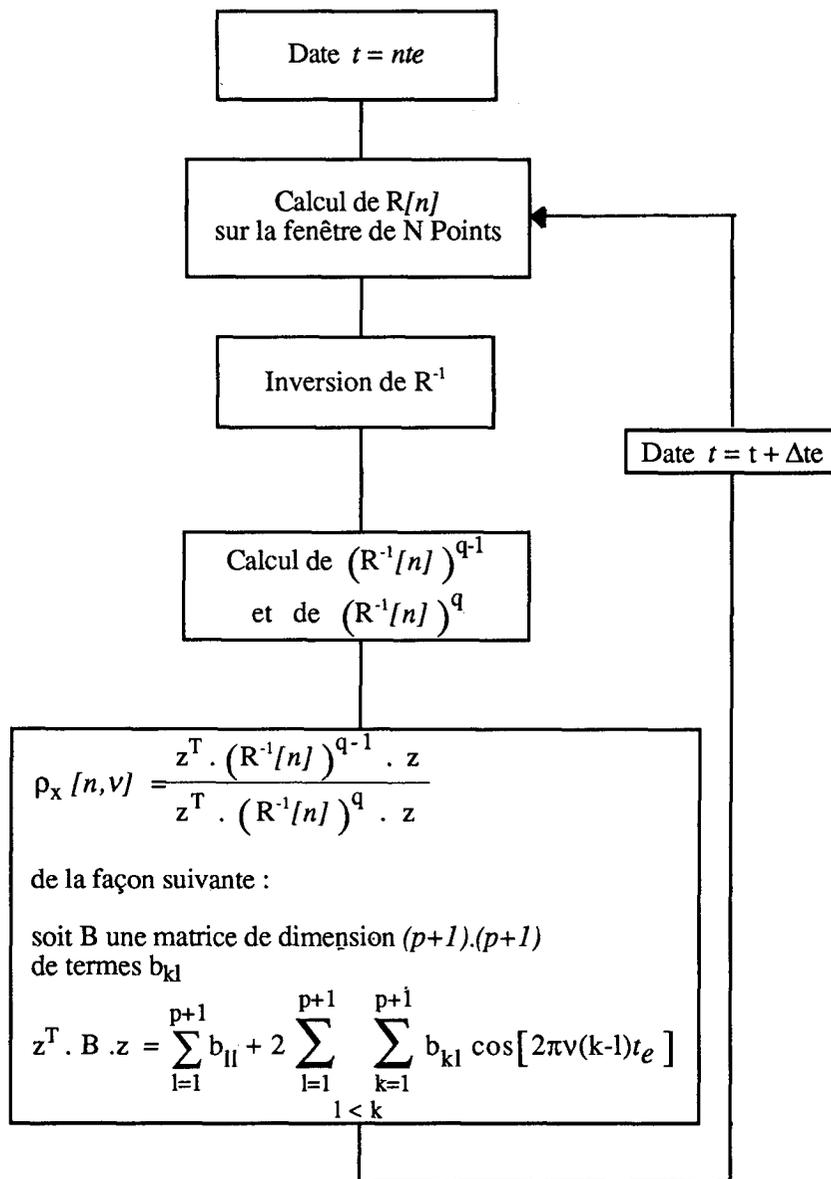
Objets manipulés

N longueur de la fenêtre

$$\mathbf{R} = [r_{lk}]_{\substack{l=1, p+1 \\ k=1, p+1}}$$

$$r_{lk} = \sum_{m=p+1}^N x(m-l) x(m-k) + \sum_{m=1}^{N-p} x(m+l) x(m+k)$$

$$\mathbf{z}^T = [1, \exp(2i\pi\nu t_e), \dots, \exp(2i\pi\nu t_e p)]$$



Autorégressive glissante

1. Références bibliographiques

Publication originale

H. FARGETTON, R. GENDRIN, J. L. LACOUME, « Adaptive methods for spectral analysis of time varying signals », EUSIPCO 1980, pp. 777-792.

Point d'entrée bibliographique conseillé

N. MARTIN, « An AR spectral Analysis of non Stationnary signal », *Signal Processing*, Vol. 10, N° 1, pp. 61-74, 1986.

Exemples d'applications

L. BONDANT, J. MARS, N. MARTIN, « Analyse de signaux non stationnaires par des méthodes Temps-Fréquences », 1^{er} CFA, pp. 725-728, Lyon, 1990.

2. Idée générale et hypothèses

Modélisation autorégressive sur une fenêtre glissante de longueur fixe. Hypothèse de stationnarité locale.

3. Principe de la méthode

$$\mathbf{x}^T[n] = (x[n], \dots, x[n-p])$$

$$\mathbf{e}^T[n] = (e[n], \dots, e[n-p])$$

$$\mathbf{a}[n] = (a_0, a_1, \dots, a_p)$$

$$\mathbf{x}[n] \xrightarrow{\mathbf{a}[n]} \mathbf{e}[n]$$

$$\mathbf{R}[n] = E \{ \mathbf{x}[n] \cdot \mathbf{x}^T[n] \} \quad \text{dimension } (p+1) \cdot (p+1)$$

Modèle	Autorégressif (e[n] blanc)	
Algorithme adaptatif	Mémoire glissante de longueur fixe - Stationnarité locale - Pas d'algorithme récursif.	
① Estimateur de Corrélation R	Toutes possibilités envisageables. Choix : Méthode de covariance progressive et éventuellement rétrograde. R[n] est estimée sur une longueur N du signal x.	
② Estimation a et P _e	OBJECTIF	Puissance d'erreur minimale : $P_e[n] = E \{ \mathbf{e}[n] ^2 \} = \mathbf{a}[n]^T \mathbf{R}[n] \mathbf{a}[n]$ minimale.
	CONTRAINTE	$a_0 = \mathbf{1}^T \cdot \mathbf{a}[n] = 1$, avec $\mathbf{1}^T = (1, 0, \dots, 0)$
	SOLUTION	$\mathbf{a}[n] = \frac{\mathbf{R}[n]^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}[n]^{-1} \mathbf{1}}$, $P_e[n] = \frac{1}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}[n]^{-1} \mathbf{1}}$
③ Estimateur de temps-fréquence	1) Représentation spectrale $\rho_x[n, \nu] = \frac{P_e[n]}{\left \sum_{k=0}^p a_k \exp(2i\pi\nu_k t_e) \right ^2}$ 2) Représentation aire sous pics : Fréquence = Position des maxima de $\rho_x[n, \nu]$ et Amplitude = Aire sous chaque pic. 3) Représentation polaire : les pôles du modèle AR sont les racines de $A[z] = 0$; $A[z] = TZ[a[n]]$.	
Remarques	a = Information spectrale	P _e = Constante (Filtre blanchisseur)

4. Quelques caractéristiques de la méthode

Haute résolution fréquentielle. Courtes fenêtres. Modèle tous pôles.

Mauvais estimateur de puissance. Modélisation du signal. Choix de l'ordre et de la longueur de la mémoire. Représentation polaire.

5. Algorithme

Objets manipulés

N : longueur de la fenêtre.

$$\mathbf{R}' = |r_{jk}| \quad j = 1, p; \quad k = 1, p$$

$$\mathbf{a}'^T[n] = (-a_1, \dots, -a_p) \quad \mathbf{s} = |s_j| \quad j = 1, p$$

$P_e[n]$: Puissance d'erreur
Seuil = 1 : Valeur par défaut (cf. remarque).

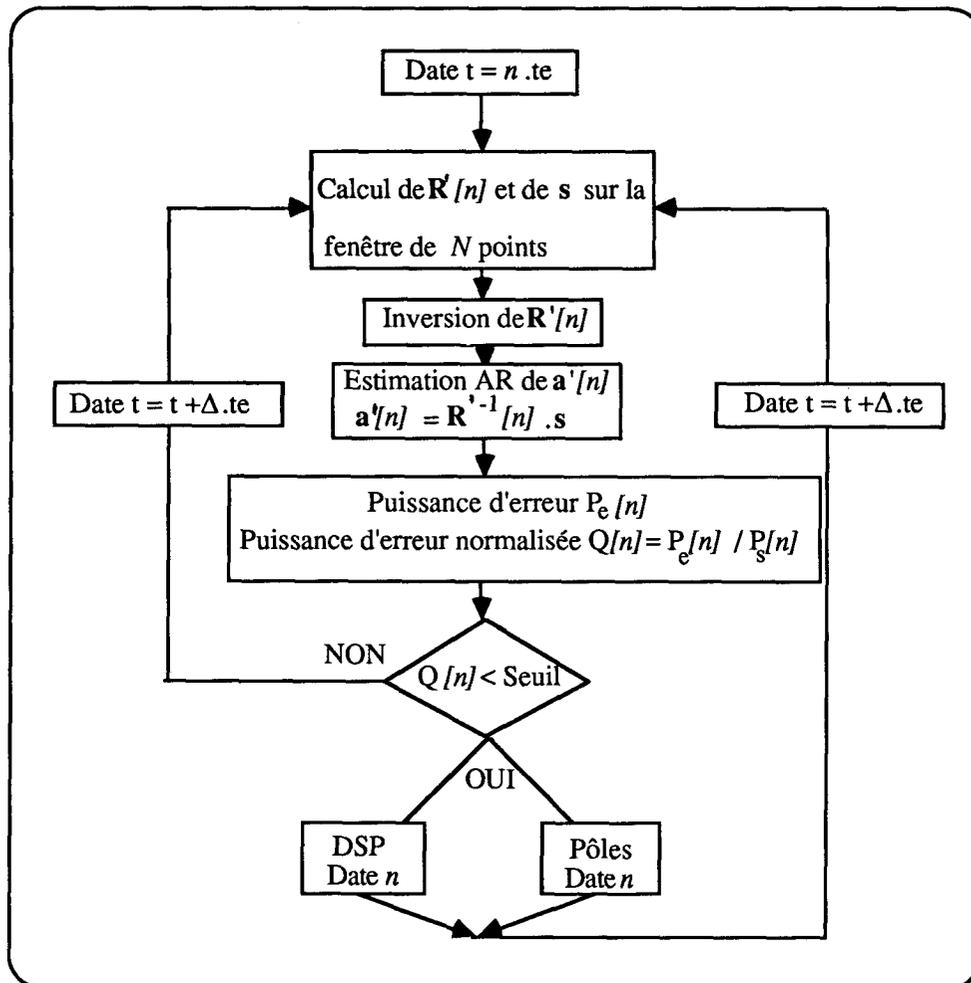
p : longueur du filtre.

$$r'_{jk} = \sum_{i=p+1}^N x(i-j) \cdot x(i-k) + \sum_{i=1}^{N-p} x(i+j) \cdot x(i+k)$$

$$s_j = \sum_{i=p+1}^N x(i-j) \cdot x(i) + \sum_{i=1}^{N-p} x(i+j) \cdot x(i)$$

$P_s[n]$: Puissance du signal sur la fenêtre de N points.
 Δ : Valeur du décalage entre chaque date.

Séquencement



Références complémentaires et remarques

• Les notations sont légèrement différentes par rapport au descriptif de la méthode.

Ici on a

$$\mathbf{a}'[n] = \mathbf{R}'^{-1}[n] \cdot \mathbf{s} \text{ avec } \mathbf{a}'^T[n] = (-a_1, \dots, -a_p).$$

• $0 \leq Q[n] \leq 1$. Le seuillage est un test supplémentaire pour éviter toute divergence de l'algorithme. Éventuellement le seuil peut être choisi inférieur à 1 pour forcer l'initialisation de l'algorithme à une date.

Autorégressive MCR. Mémoire variable

1. Références bibliographiques

Publication originale

H. FARGETTON, R. GENDRIN, J. L. LACOUME, « Adaptive methods for spectral analysis of time varying signals », EUSIPCO. 1980, pp. 777-792.

Point d'entrée bibliographique conseillé

N. MARTIN, « An AR spectral Analysis of non Stationnary signals, *Signal Processing*, Vol. 10, N° 1, pp. 61-74, 1986.

Exemples d'applications

N. MARTIN *et al.*, « Pinning of a Bloch wall by diffusion of carbon atoms in a silicon single crystal : an experimental study by means of an autoregressive spectrum analysis methods », *J. Phys. C : Solid State Phys.* 19, pp. 407-418, 1986.

2. Idée générale et hypothèses

Modèle AR estimé récursivement par une longueur de mémoire finie glissante et variable (MCR + Méthode de covariance).

3. Principe de la Méthode

$$\mathbf{x}'^T[n] = (x[n-1], \dots, x[n-p])$$

$$\mathbf{e}'^T[n] = (e[n-1], \dots, e[n-p])$$

$$\mathbf{a}'[n] = (-a_1, \dots, -a_p)$$

$$\mathbf{x}'[n] \text{ --- } \boxed{\mathbf{a}[n]} \text{ --- } \mathbf{e}'[n]$$

$$\mathbf{R}'[n] = E \{ \mathbf{x}'[n] \cdot \mathbf{x}'^T[n] \} \quad \text{dimension } p \cdot p$$

Modèle	Autorégressif ($\mathbf{e}'[n]$ blanc).
Algorithme adaptatif	Mémoire variable. Critère de puissance d'erreur normalisée minimale soit $Q[n] = P_e[n]/P_s[n]$ minimale où $P_s[n] =$ Puissance du signal sur la mémoire N. Algorithme récursif MCR.
① Estimateur de Corrélation R	Toutes possibilités envisageables. Choix : Méthode de covariance progressive et rétrograde. $\mathbf{R}'[n]$ est estimée sur une longueur $L \geq N$ du signal $\mathbf{x}'[n]$. N est la longueur minimale de la mémoire choisie par l'utilisateur.
② Estimation a et P_e	<p>OBJECTIF Cf. Fiche Autorégressive glissante.</p> <p>CONTRAINTE</p> <p>SOLUTION Solution récursive</p> $\mathbf{a}'[n+1] = \mathbf{a}'[n] - \frac{\mathbf{R}'[n]^{-1}}{2(1 + \mathbf{x}'^T[n] \mathbf{R}'[n]^{-1} \mathbf{x}'[n])} \mathbf{V}e'^2[n]$ <p>avec</p> $\mathbf{V}e'^2[n] = -2 \mathbf{e}'[n] \mathbf{x}'[n]$ $\mathbf{R}'[n+1]^{-1} = \mathbf{R}'[n]^{-1} = \frac{\mathbf{R}'[n]^{-1} \mathbf{x}'[n] \mathbf{x}'^T[n] \mathbf{R}'[n]^{-1}}{(1 + \mathbf{x}'^T[n] \mathbf{R}'[n]^{-1} \mathbf{x}'[n])}$
Particularité	Date n : $\mathbf{a}'[n]$ estimé sur une longueur L du signal. Date $n + \Delta$: Calcul en parallèle de $Q_{L+\Delta}[n + \Delta]$ associée à la longueur $L + \Delta$ et $Q_N[n + \Delta]$ associée à la longueur minimale N. → Estimation de $\mathbf{a}[n + \Delta]$ sur la longueur L' où $L' = L + \Delta$ ou N tel que $Q_{L'}[n + \Delta]$ minimale.
③ Estimateur de temps-fréquence	Cf. Fiche Autorégressive glissante.

4. Quelques caractéristiques

Cf. Fiche Autorégressive glissante.

Longueur de mémoire optimale par rapport à un critère quadratique.

5. Algorithme

Objets manipulés

N : longueur de la fenêtre minimale.

$$\mathbf{R}' = |r_{jk}| \quad j = 1, p; \quad k = 1, p$$

$$\mathbf{s} = |s_j| \quad j = 1, p.$$

$P_e[n]$: Puissance d'erreur.

Seuil = 1 : Valeur par défaut (cf. Fiche AR glissante).

p : longueur de la mémoire.

$$r'_{jk} = \sum_{i=p+1}^N x(i-j) \cdot x(i-k) + \sum_{i=1}^{N-p} x(i+j) \cdot x(i+k)$$

$$s_j = \sum_{i=p+1}^N x(i-j) \cdot x(i) + \sum_{i=1}^{N-p} x(i+j) \cdot x(i).$$

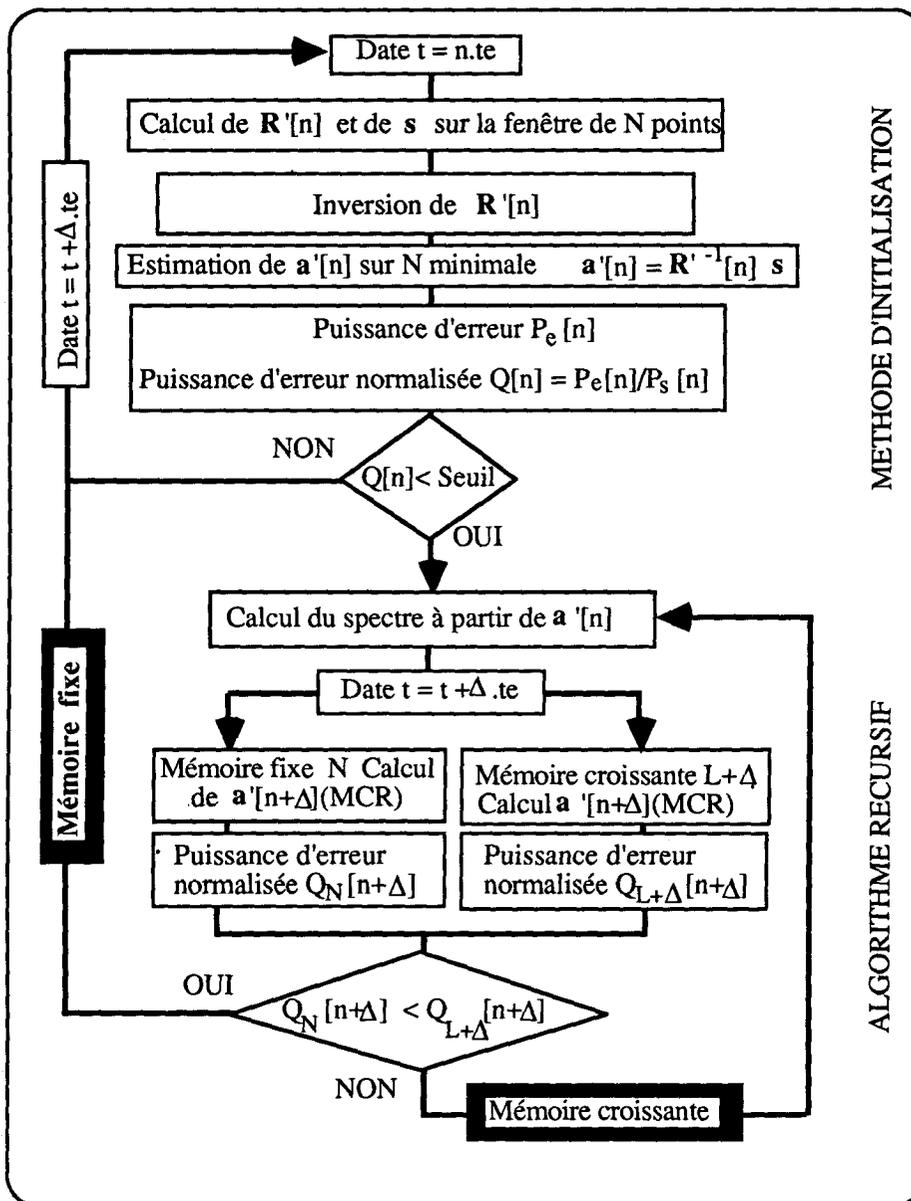
$P_s[n]$: Puissance du signal :

$$Q[n] = \frac{(P_e)_L}{(P_s)_L} \text{ sur une longueur } L \text{ à la date } n.$$

Δ : Valeur du décalage entre chaque date.

Procédure annexe : algorithme des Moindres Carrés Récursifs (MCR).

Séquencement



Méthodes hybrides (ARCAP-LAGCAP)

1. Références bibliographiques

Publication originale

M. DUBESSET, B. BERRIANI, J. L. LACOUME, N. MARTIN, C. CLIET : « Analysis and modeling of seismic signals over short time windows », 57th Annual International Meeting, SEG, New-Orleans, 1987.

Point d'entrée bibliographique conseillé

L. BONDANT, J. MARS, N. MARTIN, Analyse de signaux non stationnaires par des méthodes Temps-Fréquence. 1^{er} CFA, Lyon 1990, pp. 725-728.

Exemples d'applications

J. MARS, N. MARTIN, J. L. LACOUME, M. DUBESSET,

« Analysis of signal over short time windows », Soumis à *Signal Processing*.

2. Idée générale et hypothèses

Combinaison de la méthode AR ou Lagunas (Estimateurs fréquentiels) et de la méthode de Capon (Estimateur de puissance). Stationnarité locale.

3. Principe de la Méthode

Cf. Fiche Capon en annexe.

Modèle	Autorégressif pour ARCAP - Aucun pour LAGCAP
Algorithme adaptatif ① Estimateur de Corrélation R	Mémoire glissante mais fixe - Stationnarité locale - Estimateur de Puissance par Capon. Toutes possibilités envisageables. Choix : Méthode de covariance progressive et rétrograde.
② Estimation de a OBJECTIF CONTRAINTES et P _e SOLUTION	Voir AR Glissant et MCR pour ARCAP et Lagunas glissant pour LAGCAP.
③ Estimateur de temps-fréquence	→ L'estimateur AR ou Lagunas est calculé sur une longueur de mémoire finie et glissante (estimateurs de fréquence). La méthode de Capon permet une estimation pour une fréquence donnée de la puissance du signal par construction d'un filtre passe-bande (estimateur de puissance).

Fréquence : Voir fiche Autorégressive glissante ou Lagunas glissant.
Amplitude : Voir fiche de Capon.

4. Quelques caractéristiques de la méthode

Haute résolution fréquentielle par AR ou Lagunas. Bonne estimation de la puissance par Capon.

Voir fiche AR ou Lagunas, stationnarité locale.
Voir fiche AR ou Lagunas.

Autorégressive évolutive

1. Références bibliographiques

Publication originale

T. S. RAO, « The fitting of nonstationary time-series models with time-dependent parameters, *J. Royal Statist. Soc. Series B*, Vol. 32, N° 2, pp. 312-322, 1970.

Point d'entrée bibliographique conseillé

Y. GRENIER, « Modèles ARMA à coefficients dépendant du temps : estimateurs et applications », *Traitement du signal*, Vol. 3, N° 4-5, pp. 219-233, 1986.

Exemples d'applications

Parole : voir référence ci-dessus.

Sonar chauve-souris : Y. GRENIER, « Nonstationary signal modeling with application to Bat echolocation calls », *Acustica*, 61, N° 3, 1986.

2. Idée générale et hypothèses

Modélisation bloc des signaux non stationnaires. La non-stationnarité du signal est caractérisée par l'évolution temporelle des paramètres du modèle. Ceux-ci s'expriment comme combinaisons linéaires d'une famille de fonctions.

3. Principe de la Méthode

$x[n]$ est modélisé par :

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a_k[n-k] x[n-k] + e[n]$$

avec
$$a_k[n] = \sum_{l=0}^m a_{kl} f_l[n]$$

$e[n]$ bruit blanc gaussien, $a_k[n]$ paramètres autorégressifs combinaisons linéaires de fonctions $f_l[n]$ variant avec le temps.

Les familles de fonctions usuelles sont les puissances du temps, les polynômes de Legendre, la série de Fourier et les fonctions sphéroïdales.

L'expression du spectre instantané est donné par :

$$\rho[n, \nu] = \frac{P_e[n]^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k[n] e^{-2j\pi\nu k} \right|^2}$$

$P_e[n]$ est la puissance de l'erreur à l'instant n .

4. Quelques caractéristiques de la méthode

- Modélisation bloc du signal.
- Avantage d'un modèle paramétrique pour un processus non stationnaire : jeu de paramètres restreint pouvant représenter par exemple une transition entre contenus spectraux différents.

- Possibilité de choisir une base de fonctions bien adaptée à son signal.
- Lissage des changements rapides du signal.

5. Algorithme

Objets manipulés

- N_x nombre d'échantillons
- p ordre du modèle
- m degré de la base
- $\theta[]$ vecteur paramètres à déterminer de longueur $(m+1) \cdot p$
- $a[n]$ vecteur paramètres AR à l'instant n de longueur p
- $x[]$ vecteur signal de longueur N_x
- $x_{pr}[]$ signal projeté de longueur $(m+1) \cdot N_x$.

Procédures externes requises

- Un algorithme de TFR pour déterminer les spectres instantanés.
- Un algorithme de résolution d'un système linéaire (coût en $O(p^3)$) ou algorithme vectoriel rapide de type Levinson (coût en $O(p^2)$).

Séquencement

θ est le vecteur paramètre à déterminer, il est défini par :

$$\theta = (a_{10} \dots a_{1m} a_{20} \dots a_{pm})^T.$$

1) **Projection $x_{pr}[n]$ du signal $x[n]$ sur la base de fonctions**
 $x_{pr}[n] = x[n] \cdot (f_0[n] \dots f_m[n])^T.$

2) **Résolution du système (en discret) :**

$$\sum_{N \in \Gamma} \left(\begin{bmatrix} x_{pr}[n-1] \\ \vdots \\ x_{pr}[n-p] \end{bmatrix} [x_{pr}^T[n-1] \dots x_{pr}^T[n-p]] \right) \theta = - \sum_{N \in \Gamma} \begin{bmatrix} x_{pr}[n-1] \\ \vdots \\ x_{pr}[n-p] \end{bmatrix} x[n].$$

Deux algorithmes rapides sont disponibles :

- méthode des corrélations $\Gamma = [0, N_x + p]$
- méthode des covariances $\Gamma = [p, N_x]$.

3) **Détermination des spectres instantanés.** Une TFR est effectuée sur les p premiers coefficients $a_k[n]$ pour tous les instants n désirés. L'expression du spectre instantané est donnée à la page précédente.

Références complémentaires

Pour plus de détails sur les algorithmes rapides :

Y. GRENIER, « Modèles autorégressifs non stationnaires, modèles autorégressifs vectoriels et algorithme de Levinson », ENST D 82005, 1982.

Prony adaptatif

1. Références bibliographiques

Publications originales

- C. LAMBERT-NEBOUT et F. CASTANIÉ, « An adaptive Prony algorithm », EUSIPCO 88, pp. 403-406.
- F. CASTANIÉ et C. LAMBERT-NEBOUT, « A fast and parallel Algorithm to solve the Van der Monde system in Prony modeling », EUSIPCO 88, pp. 571-574.
- F. HOXHA *et al.*, « Experiments in concurrently computing polynomial roots », EUSIPCO 88, pp. 659-662.

Point d'entrée bibliographique conseillé

- S. M. KAY et S. L. MARPLE, « Spectrum analysis, a modern perspective », *Proc. of IEEE*, Vol. 69, n° 11, November 1981, pp. 1380-1419.

Exemples d'applications

Signal ILS (atterrissage aux instruments utilisé dans l'aviation civile).

2. Idée générale et hypothèses

Écriture adaptative de la méthode de Prony pour des fonctions sinusoïdales bruitées dont les paramètres sont soumis à des sauts ou des dérives.

3. Principe de la Méthode

$x(n)$ est modélisé par une somme d'exponentielles complexes :

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=1}^p b_m[n] z_m^n[n]$$

p : ordre du modèle

$b_m[n]$: amplitudes complexes à l'instant n

$z_m[n]$ = exponentielles complexes à l'instant n

$$z_m[n] = e^{2i\pi\nu_m t_e n}$$

ν_m les fréquences du modèle d'où $|b_m[n]|$: amplitude du M -ième « mode » de $x[n]$ à l'instant n

$\tan^{-1} [\text{Im}(b_m[n]) / \text{Re}(b_m[n])]$: coefficient d'amortissement

$\ln(z_m[n])$: phase en radian

$\tan^{-1} [\text{Im}(z_m[n]) / \text{Re}(z_m[n])] / 2\pi$: fréquence en hertz.

Chacune des trois étapes de la modélisation de Prony est

résolue par un algorithme adaptatif : modélisation AR, recherche des zéros et calcul des amplitudes complexes.

4. Quelques caractéristiques de la méthode

Précautions d'emploi : fort rapport Signal sur Bruit (> 10 dB).

Avantages : adaptativité et implantation parallèle (calcul des zéros et des amplitudes complexes en parallèle).

5. Algorithme

Objets manipulés

- p ordre du modèle AR
- $a[n]$ vecteur paramètres réels du modèle AR de longueur $p + 1$ à l'instant n
- $z_m[n]$ pôles complexes du modèle AR à l'instant n
 $m = 1, p$
- β vecteur réel des approximants de Padé de longueur p
- $b_m[n]$ amplitudes complexes du modèle à l'instant n
 $m = 1, p$
- λ facteur d'oubli à introduire par l'utilisateur :
 $0,95 \leq \lambda \leq 1$.

- Algorithme de modélisation autorégressive récursive.
- Algorithme pour le calcul des racines d'un polynôme (algorithme de Hoxha, cf. références pour un calcul en parallèle).

Séquencement

1) Modélisation autorégressive récursive

$$\mathbf{a}[n] = (1, a_1, \dots, a_p)^T.$$

2) Recherche adaptative des zéros,

$$\text{racines de } A[z] = 1 - \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}.$$

L'estimation des p zéros $z_m[n]$ à l'instant courant n se fait à partir de l'estimation des p zéros $z_m[n-1]$ à l'instant $(n-1)$ grâce à l'algorithme de Hoxha ou de Newton modifié, d'où l'estimation des fréquences ν_m .

3) Résolution du système de Van der Monde par utilisation des approximants de Padé

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &= (\beta_0, \dots, \beta_{p-1})^T = \\ &= \begin{pmatrix} x[n-p+1] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x[n-p] & x[n-p+1] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x[n] & \cdot & \cdot & \dots & x[n-p+1] & 0 \end{pmatrix} \\ &\times \mathbf{a}[n] \end{aligned}$$

d'où

$$b_m[n] = z_m^{-(n-p+1)}[n] \frac{\sum_{k=0}^{p-1} \beta_k z_m^{-k}[n]}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^p (1 - z_l[n] \cdot z_m^{-1}[n])}$$
$$\hat{b}_m[n] = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} b_m[i]}{\sum_{i=1}^n \lambda^{n-i}}$$

moyennage effectué sur les n dernières valeurs pour diminuer la variance.

Références complémentaires

- F. HOXHA, « Calcul simultané des racines d'un polynôme complexe : contribution à l'algorithme et mise en œuvre sur un réseau de processeurs », thèse de l'INPT, octobre 1988.
- L. WEISS and R. N. MCDONOUGH, « Prony's method, Z-transform and Padé approximation », SIAM Review, Vol. 5, N° 2, pp. 145-149, April 1963.
- J. DELLA DORA, « Quelques notions sur les approximants de Padé », Colloque CNRS Outils mathématiques pour le traitement du signal, Ed. CNRS, Paris, 1981.
- C. LAMBERT-NEBOUT, « Étude des moyens d'analyse du signal basse fréquence d'un récepteur d'alignement de piste », thèse de l'INPT, novembre 1989.

ARMA par filtrage de Kalman étendu

1. Références bibliographiques

Publication originale

R. K. MEHRA, « On-line Identification of Linear Dynamic Systems with Applications to Kalman Filtering », IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 1, pp. 12-21, 1971.

Point d'entrée bibliographique conseillé

L. LJUNG, T. SODESTROM, « Theory and Practice of Recursive Identification », MIT Press, 1985.

Exemples d'applications

M. GUGLIELMI *et al.*, « Burst Detection in Surface EMG during a perturbed movement », Congrès IEEE/EMBS Philadelphie 1-4/11/1990.

2. Idée générale et hypothèses

La méthode consiste à identifier en ligne un modèle ARMA évolutif par filtrage de Kalman étendu (EKF) adaptatif (ce qui nécessite d'écrire le modèle sous forme d'état), puis à calculer à chaque instant la densité spectrale de puissance du modèle courant. On peut ainsi obtenir une représentation Temps-Fréquence du signal considéré.

3. Principe de la méthode

Soit y_k le signal considéré, supposé modélisable par un processus ARMA d'ordre n

$$y_k = \mathbf{M}[\theta, z] e_k \text{ avec}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}[\theta, z] = \left(1 + \sum_{i=1}^n c_i z^{-i} \right) / \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} \right) \\ e_k = \text{séquence aléatoire blanche centrée de variance } \sigma^2 \\ \theta = [a_1, \dots, a_n, g_1, \dots, g_n] \\ g_i = a_i + c_i. \end{array} \right.$$

A partir de ce modèle, on obtient le modèle Markovien suivant (de dimension n) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_{[k+1]} = \mathbf{A}[\theta] \mathbf{X}[k] + \mathbf{G}[\theta] e[k] \\ \quad = \{ \mathbf{A}[\theta] - \mathbf{G}[\theta] \mathbf{C} \} \mathbf{X}[k] + \mathbf{G}[\theta] y[k] \\ y[k] = \mathbf{C} \mathbf{X}[k] + e[k] \end{array} \right.$$

Avec

$$\mathbf{A}[\theta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 1 & 0 & & 0 & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [0, \dots, 0, 1] \quad \mathbf{G}[\theta] = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}.$$

Si le système est supposé non stationnaire, θ dépend du temps, soit $\theta = \theta[k]$; on introduit alors un modèle de marche aléatoire sur $\theta[k]$: $\theta_{k+1} = \theta[k] + \mathbf{b}[k]$ où $\mathbf{b}[k]$ est une séquence aléatoire blanche de variance \mathbf{Q} .

On définit alors l'état étendu $\mathbf{Z}[k] = [\mathbf{X}_k^T \theta_k^T]^T$ de dimension $3n$, pour lequel une nouvelle équation dynamique d'évolution est obtenue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Z}_{k+1} = f[\mathbf{Z}[k]] + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}[k] \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}[k] = [\mathbf{C} \ 0] \mathbf{Z}[k] + e[k] \end{array} \right.$$

où

$$f[\mathbf{Z}[k]] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}[\theta[k]] - \mathbf{G}[\theta[k]] \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{Z}[k] + \begin{bmatrix} \mathbf{G}[\theta[k]] \\ 0 \end{bmatrix} y[k] \text{ est non linéaire en } \mathbf{Z}[k].$$

L'identification de θ par EKF consiste alors à appliquer un filtre de Kalman à ce modèle non linéaire, en le linéarisant à chaque instant k autour de l'estimation courante $\hat{\mathbf{Z}}[k/k]$ de $\mathbf{Z}[k]$ (c'est la meilleure valeur approchée disponible) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Z}_{k+1} = f[\hat{\mathbf{Z}}[k/k]] + \mathbf{F}[k](\mathbf{Z}[k] - \hat{\mathbf{Z}}[k/k]) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}[k] \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}[k] = \mathbf{H} \mathbf{Z}[k] + e[k] \end{array} \right.$$

où $\mathbf{F}[k]$ est la matrice jacobienne de f au point $\hat{\mathbf{Z}}[k/k]$, et $\mathbf{H} = [\mathbf{C} \ 0]$.

4. Quelques caractéristiques de la méthode

Méthode récurrente dont la convergence n'est pas démontrée. Estimation des paramètres et de leur matrice de covariance. Validation de la méthode *via* la variance des paramètres estimés ainsi que l'autocorrélation de la pseudo-innovation $y[k] - \mathbf{H} \hat{\mathbf{Z}}[k/k - 1]$.

5. Algorithme

Objets manipulés

- $y[k]$: signal temporel $1 \leq k \leq N$
- σ^2 : variance de $e[k]$
- \mathbf{Q} : matrice de covariance de $\mathbf{b}[k]$
- $\mathbf{P}[0]$: initialisation de la matrice de variance-covariance de l'état étendu (dim $3n \cdot 3n$)
- $\mathbf{Z}[0]$: initialisation de l'état étendu
- $\hat{\mathbf{Z}}[k/k]$: estimation
- $\mathbf{P}[k/k]$: matrice de covariance de $\hat{\mathbf{Z}}[k/k]$
- $\hat{\mathbf{Z}}_{k+1/k}$: prédiction
- $\mathbf{P}_{k+1/k}$: matrice de covariance de $\hat{\mathbf{Z}}_{k+1/k}$
- $\mathbf{K}[k]$: gain du filtre de Kalman

Séquencement

Initialisation

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Z}}[1/0] &= \mathbf{Z}[0] \\ \mathbf{P}[1/0] &= \mathbf{P}[0]. \end{aligned}$$

Récurrence

Pour k variant de 1 à N faire

Estimation

$$\begin{cases} \mathbf{K}[k] = \mathbf{P}[k/k-1] \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}[k/k-1] \mathbf{H}^T + \sigma^2)^{-1} \\ \hat{\mathbf{Z}}[k/k] = \hat{\mathbf{Z}}[k/k-1] + \mathbf{K}[k] (y[k] - \mathbf{H} \hat{\mathbf{Z}}[k/k-1]) \\ \mathbf{P}[k/k] = \mathbf{P}[k/k-1] - \mathbf{K}[k] \mathbf{H} \mathbf{P}[k/k-1]. \end{cases}$$

Prédiction $\begin{cases} \hat{\mathbf{Z}}_{k+1/k} = f[\hat{\mathbf{Z}}[k/k]] \\ \mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{F}[k] \mathbf{P}[k/k] \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}. \end{cases}$

Spectre $\rho[k, \nu] = \sigma^2 |\mathbf{M}(\hat{\theta}_{k+1/k}, e^{-2j\pi\nu te})|^2$

en $[-1/2 te, 1/2 te]$.

Fin pour

Références complémentaires et remarques

Amélioration des performances numériques en utilisant une factorisation de la matrice de variance-covariance sous la forme $\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$. Si σ^2 est inconnu, on l'estime en parallèle en filtrant le carré de la pseudo-innovation $y[k] - \mathbf{H} \hat{\mathbf{Z}}[k/k-1]$ par un premier ordre : $\sigma_k^2 = \alpha \sigma_{k-1}^2 + (1 - \alpha)(y[k] - \mathbf{H} \hat{\mathbf{Z}}[k/k-1])^2$, où α est proche de 1. Méthode applicable aussi à un AR en faisant $\mathbf{G} = 0$.

ANNEXE : Capon

1. Références bibliographiques

Publication originale

J. CAPON, « High resolution frequency wavenumber spectrum analysis », *Proc. IEEE*, Vol. 57, pp. 1408-1418, Aug. 1969.

Point d'entrée bibliographique conseillé

S. M. KAY, « Modern Spectral Estimation : Theory & Applications », Prentice Hall Editor. 1988.

Exemples d'applications

L. BONDANT, J. MARS, N. MARTIN, « Analyse de signaux non stationnaires par des méthodes Temps-Fréquence », 1^{er} CFA, pp. 725-728, Lyon, 1990.

2. Idée générale et hypothèses

Estimation pour une fréquence donnée de la puissance du signal par construction d'un filtre passe bande autour de n_k sous les conditions initiales

— le spectre à la fréquence n_k n'est pas altéré (Puissance de sortie = Puissance d'entrée), minimisation des interférences dues aux autres fréquences et hypothèse de stationnarité locale.

3. Principe de la méthode

$$x^T[n] = (x[n], \dots, x[n-p])$$

$$e^T[n] = (e[n], \dots, e[n-p])$$

$$x[n] = a[n] + e[n]$$

$$a[n] = (a_0, a_1, \dots, a_p)$$

$$\mathbf{R}[n] = E \{ \mathbf{x}[n] \cdot \mathbf{x}^T[n] \} \text{ dimension } (p+1) \cdot (p+1)$$

Modèle	Aucun
① Estimateur de Corrélation R	Toutes possibilités envisageables. Choix : méthode de covariance progressive et rétrograde.
② Estimation a et P_e	<p>OBJECTIF → Puissance $P_e[n] = \mathbf{a}[n]^T \mathbf{R}[n] \mathbf{a}[n]$ minimale.</p> <p>CONTRAINTE → $\mathbf{a}[n]^T \mathbf{z} = 1$ où $\mathbf{z}^T = [1, \exp(2i\pi\nu t_e), \dots, \exp(2i\pi\nu t_e p)]$</p> <p>SOLUTION → $\mathbf{a}[n] = \frac{\mathbf{R}[n]^{-1} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{R}[n]^{-1} \mathbf{z}}$ réponse impulsionnelle du filtre de Capon</p> <p>$P_e[n] = \mathbf{a}[n]^T \mathbf{R}[n] \mathbf{a}[n] = \frac{1}{\mathbf{z}^H \mathbf{R}[n]^{-1} \mathbf{z}}$</p>
③ Estimateur de temps-fréquence Amplitude	Amplitude de P_e à toutes les fréquences.

Quelques caractéristiques de la méthode

Estimateur de puissance uniquement et non de densité spectrale de puissance.
Courtes fenêtres d'analyse. Pas de modélisation.

Mauvaise résolution fréquentielle. Stationnarité locale.
S'emploie seul, uniquement sur des signaux monocomposantes, sinon couplage avec les estimateurs de fréquences ARCAP-LAGCAP.