

## Quelques commentaires sur des représentations temps-fréquence proposées récemment

*Some remarks about recently proposed time-frequency representations*

---



### François AUGER

Laboratoire d'Automatique de Nantes  
École Centrale de Nantes,  
1 rue de la Noë, 44072 Nantes  
Cedex 03  
Membre du GDR 134 CNRS  
« Traitement du Signal et Images »

François Auger est né le 14 avril 1966 à Saint Germain en Laye. Il est ingénieur E.N.S.M. et titulaire d'un D.E.A. d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'Université de Nantes. Il termine actuellement un doctorat au Laboratoire d'Automatique de Nantes sur les méthodes de représentations temps-fréquence des signaux non stationnaires.



### Christian DONCARLI

Laboratoire d'Automatique de Nantes  
École Centrale de Nantes,  
1 rue de la Noë, 44072 Nantes  
Cedex 03  
Membre du GDR 134 CNRS  
« Traitement du Signal et Images »

Christian Doncarli est Docteur-Ingénieur ENSM, Docteur ès Sciences et Professeur d'Université. Ses domaines de recherches regroupent le filtrage statistique ainsi que la théorie de la détection-décision. Le champ d'application privilégié de ses recherches est l'ingénierie biomédicale.

---

### RÉSUMÉ

---

L'objectif de cet article est d'apporter quelques précisions et quelques résultats théoriques supplémentaires concernant des représentations temps-fréquence définies récemment. A cette occasion, on montre que les représentations de Choi-Williams et de Born-Jordan sont toutes les deux obtenues à partir de filtres passe-bas particuliers, et on donne d'autres exemples de représentations du même type. On étudie également les propriétés théoriques des versions modifiées de la représentation de Choi et Williams, et on propose également l'emploi de ce type de version modifiée pour la représentation de Born-Jordan, proche de la

représentation de Zhao-Atlas-Marks. On aborde ensuite le cas des versions lissées des représentations de Margenau-Hill et de Rihaczek, faisant alors apparaître un lien entre celles-ci et la transformée de Fourier Court-Terme. Quelques conclusions sur les représentations de la classe de Cohen sont enfin formulées.

#### MOTS-CLÉS

Représentation temps-fréquence, analyse spectrale, signaux non stationnaires.

---

### SUMMARY

---

*This paper aims at giving some precise details and further theoretical results about recently proposed time-frequency representations. We especially show that the Choi-Williams and the Born-Jordan representations are both designed using peculiar low-pass filters, and other time-frequency representations of the same kind are given. We also study the theoretical properties of the modified versions of the Choi-Williams representation. We then propose to apply the same kind of smoothing to the Born-Jordan representation, comparing then the result to the Zhao-Atlas-Marks repre-*

*sentation. Finally, the smoothed versions of Margenau-Hill and Rihaczek distributions are tackled. We show that these representations can be expressed with the help of the Short-Time Fourier transform. Some conclusions are at last drawn on the known members of Cohen class of bilinear time-frequency representations.*

#### KEY WORDS

*Time-frequency representations, Spectral analysis, Non-stationary signals.*

## Introduction

Ces derniers mois, la revue IEEE ASSP a publié trois articles [3, 4, 5] sur des nouvelles représentations temps-fréquence (RTF) de la classe de Cohen. Cette relative abondance de publications montre un regain d'intérêt sur ce sujet en traitement du signal, et la faculté de cette classe non seulement de rassembler la plupart des RTF connues, mais aussi d'accueillir encore de nouveaux membres. L'objet de notre travail est d'apporter quelques résultats supplémentaires sur les représentations proposées dans ces articles.

Dans la première partie, on effectue une présentation brève de la classe des représentations de Cohen, qui constitue le cadre général de cette étude. La deuxième partie aborde alors la représentation de Choi-Williams. Celle-ci est définie de façon précise, d'abord pour des signaux continus, puis pour des signaux discrets. On compare ensuite les versions modifiées de cette représentation dites « à fenêtre glissante » avec celles proposées par les auteurs, dont on étudie ensuite les propriétés théoriques. On présente également le calcul de cette représentation pour plusieurs signaux élémentaires, ce qui permet alors notamment de faire apparaître le compromis entre la réduction des interférences et la localisation des termes propres inhérent à cette représentation. Enfin d'autres éléments de la classe de Cohen basés sur les mêmes principes que la représentation de Choi-Williams sont alors proposées.

La troisième partie concerne ensuite la représentation de Zhao-Atlas-Marks. On montre alors que la représentation qu'ils ont définie, obtenue par une approche tout à fait originale, ne vérifie malheureusement pas les propriétés théoriques essentielles pour une RTF, et on propose alors de remplacer celle-ci par une représentation dite « Pseudo Born-Jordan », basée également sur la propriété de conservation des supports du signal, et vérifiant un plus grand nombre de propriétés. On définit ensuite de nouvelles représentations de même type que la représentation de Born-Jordan et vérifiant les mêmes propriétés.

La quatrième partie de cet article concerne la représentation Pseudo Margenau-Hill. On généralise la proposition des auteurs d'effectuer un lissage de la représentation de Margenau-Hill à la représentation de Rihaczek, ce qui permet d'en déduire une conséquence originale sur la possibilité d'obtenir la fréquence instantanée et le retard de groupe à partir de la transformée de Fourier Court-Terme. On étudie également les propriétés de conservation des valeurs nulles du signal et du spectre, propriétés plus fortes que les propriétés de conservation des supports abordés au paragraphe précédent, et on en donne des conditions nécessaires et suffisantes. Enfin, ce paragraphe s'achève par l'étude de la géométrie particulière des termes d'interférence de ces représentations. Une conclusion de ce travail est alors effectuée en récapitulant les éléments connus de la classe des représentations de Cohen.

## 1. Représentations temps-fréquence de la classe de Cohen

### 1.1. PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Les trois articles étudiés possèdent un cadre théorique commun, qui est la classe des représentations de Cohen [1, 5, 6, 7, 16]. Il est constitué, rappelons-le, de toutes les représentations bidimensionnelles d'un signal  $x(t)$  (considéré ici comme déterministe) distribuant son énergie dans le plan temps-fréquence et vérifiant les propriétés d'invariance par translation et par modulation. Une des formulations possibles pour présenter cette classe est de l'écrire comme l'ensemble de toutes les versions lissées en temps et en fréquence de la représentation de Wigner-Wille [1, 2, 8, 9, 16, 17] :

$$\text{RTF}(x \cdot x; t, \omega) = \iint \phi_{\text{TR}}(t - u, \omega - \Omega) \text{WV}(x \cdot x; u, \Omega) du \frac{d\Omega}{2\pi}$$

$$\text{avec} \quad \text{WV}(x \cdot x, u, \Omega) = \int x(u + \tau/2) \cdot x^*(u - \tau/2) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

*N.B.* : dans tout le texte, les intégrales où n'apparaissent pas explicitement les bornes d'intégration s'entendent de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

Dans l'expression précédente, chaque RTF de la classe de Cohen est exprimée en fonction d'un élément particulier, la représentation de Wigner-Ville. Le passage de l'une à l'autre s'effectue dans ce cas au moyen d'une fonction noyau dans le plan temps-fréquence (d'où l'indice TF). Mais il est également possible de caractériser une RTF par l'expression de son noyau dans un plan en utilisant ces deux variables ou leur duales (c'est-à-dire liées par l'opérateur de Fourier) que sont le doppler  $\xi$  et le retard  $\tau$ . Suivant le plan choisi, l'expression précédente peut donc également s'écrire de façon strictement équivalente :

— soit comme la double transformée de Fourier d'une version pondérée de la fonction d'Ambiguïté en translation de Sussman [10] du signal :

$$\text{RTF}(x \cdot x; t, \omega) = \iint \phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) A(x \cdot x; \xi, \tau) e^{j(\xi t - \omega \tau)} d\tau \frac{d\xi}{2\pi}$$

$$\text{avec } A(x \cdot x; \xi, \tau) = \int x(u + \tau/2) \cdot x^*(u - \tau/2) e^{-j\xi u} du$$

$$\text{et } \phi_{\text{TF}}(t, \omega) = \iint \phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) e^{j(\xi t - \omega \tau)} d\tau \frac{d\xi}{2\pi}$$

— soit comme la transformée de Fourier d'une « fonction d'autocorrélation instantanée » du signal. On fait alors le rapprochement avec le calcul de la densité spectrale d'énergie des signaux aléatoires non stationnaires [18, 19] :

$$\text{RTF}(x \cdot x; t, \omega) = \int R(x \cdot x; t, \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

$$\text{avec } R(x \cdot x, t, \tau) = \int \phi_{\text{TR}}(t - u, \tau) x(u + \tau/2) \cdot x^*(u - \tau/2) du$$

$$\text{et } \phi_{\text{TF}}(v, \tau) = \int \phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) e^{j\xi v} \frac{d\xi}{2\pi}$$

— soit comme la version duale de la précédente, obtenue en remplaçant les deux variables par leurs équivalents par la transformée de Fourier. L'interprétation physique de cette expression est cependant moins claire.

$$\text{RTF}(x \cdot x; t, \omega) = \iint \phi_{\text{DF}}(\xi, \Omega) X(\omega - \Omega + \xi/2) \cdot X^*(\omega - \Omega - \xi/2) e^{j\xi t} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{d\xi}{2\pi}$$

$$\text{avec } \phi_{\text{DF}}(\xi, \Omega) = \int \phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau, \text{ et } X(\omega) = \int x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Il existe donc en tout quatre plans dans lesquels il est possible de définir le noyau caractéristique d'une représentation de la classe de Cohen. Les plus couramment utilisés sont les plans doppler-retard (DR) et temps-retard (TR), mais on verra que les relations simples de passage entre plans, réalisées par des transformées de Fourier,

$$\begin{array}{ccccccc} & \omega & & \omega & & \tau & \\ \phi_{\text{TF}}(t, \omega) & \leftrightarrow & \phi_{\text{TR}}(t, \tau) & \leftrightarrow & \phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) & \leftrightarrow & \phi_{\text{DF}}(\xi, \omega) \\ & \tau & & \xi & & \omega & \end{array}$$

permettent d'effectuer un raisonnement dans un plan approprié et d'en répercuter ensuite aisément les conséquences dans les trois autres.

## 1.2. PROPRIÉTÉS DES RTF ET NOYAUX DE TYPE PRODUIT

Un des résultats les plus importants concernant la classe de Cohen est l'étude des contraintes exprimées sur le noyau caractéristique permettant à une RTF de vérifier un ensemble de propriétés souhaitables pour un tel outil d'analyse. La connaissance de ces résultats permet alors à un utilisateur d'établir un cahier des charges en choisissant parmi ces propriétés celles dont il a besoin, afin de déterminer la ou les représentations les mieux adaptées à une application. Le tableau I ci-joint regroupe quelques-unes des propriétés envisageables, et l'expression des contraintes obtenues [1, 2, 16, 20]. Pour présenter ces résultats de façon synthétique, on peut regrouper ces résultats en quatre parties. La première partie (propriétés 0 à 5) rassemble des propriétés d'ordre pratique. Elles correspondent tout d'abord au souhait qu'une représentation se modifie de manière logique lorsque sont appliqués au signal des opérateurs simples, de même nature que l'invariance en translation et en modulation qui définit le groupe de Cohen. Le caractère réel de la RTF correspond au souhait d'avoir un outil facile à manipuler, par exemple à représenter graphiquement. De même, la propriété de causalité exprime le souhait de pouvoir effectuer un calcul en ligne de la représentation. La deuxième partie (propriété 6 à 12) concerne des propriétés plus théoriques. Elle comprend notamment celles sur les moments et marginales d'une représentation, qui sont fortement souhaitables pour que celle-ci s'interprète comme une distribution d'énergie. La propriété de positivité se rattache par contre à son interprétation en tant que densité énergétique. La troisième partie (13 à 15) concerne la compabilité avec les opérateurs classiques en traitement du signal, et la quatrième (16 à 19) concerne des propriétés assurant à une RTF de bonnes qualités de représentation graphique. Il est à noter que la plupart des conditions données dans ce tableau trouvent leur expression la plus simple dans le plan des ambiguïtés (c.-à-d. le plan doppler-retard), ce qui fait de celui-ci un point de vue privilégié pour l'étude théorique des RTF. On aura donc tout intérêt à calculer le noyau caractéristique d'une représentation dans ce plan, afin d'en déduire ses propriétés théoriques par application directe des résultats du tableau I.

n°	Nom	Propriété	Condition
0	compatibilité avec les translations temporelles et fréquentielles	$\forall t_1, \omega_1, \text{ Si } y(t) = x(t-t_1) \cdot e^{j\omega_1 t}$ alors $\forall t, \omega, \text{ RTF}(y, y; t, \omega) = \text{RTF}(x, x; t-t_1, \omega-\omega_1)$	$\phi_{DR}(\xi, \tau)$ quelconque
1	compatibilité avec les changements d'échelle	$\forall b, \text{ Si } y(t) = b^{-1/2} \cdot x(t/b), \text{ RTF}(y, y; t, \omega) = \text{RTF}(x, x; t/b, b \cdot \omega)$	$\forall \xi, \tau, \forall b > 0, \phi_{DR}(b\xi, \tau/b) = \phi_{DR}(\xi, \tau)$ (CNS)
2	compatibilité avec l'inversion temporelle	$\text{ Si } y(t) = x(-t), \forall t, \omega, \text{ RTF}(y, y; t, \omega) = \text{RTF}(x, x; -t, -\omega)$	$\forall \xi, \tau, \phi_{DR}(\xi, \tau) = \phi_{DR}(-\xi, -\tau)$ (CNS)
3	compatibilité avec la conjugaison complexe	$\text{ Si } y(t) = x^*(t), \forall t, \omega, \text{ RTF}(y, y; t, \omega) = \text{RTF}(x, x; t, -\omega)$	$\forall \xi, \tau, \phi_{DR}(\xi, \tau) = \phi_{DR}(\xi, -\tau)$ (CNS)
4	caractère réel de la RTF	$\forall t, \omega, \text{ RTF}(x, x; t, \omega)^* = \text{RTF}(x, x; t, \omega)$	$\forall \xi, \tau, \phi_{DR}^*(\xi, \tau) = \phi_{DR}(-\xi, -\tau)$ (CNS)
5	causalité	RTF(x, x; t, \omega) ne dépend que de x(u) u < t	$\forall t, \tau, ( \tau  > t) \Rightarrow \phi_{TR}(t, \tau) = 0$ (CNS)
6	conservation de l'énergie	$\iint \text{RTF}(x, x; t, \omega) dt \frac{d\omega}{2\pi} = \int  x(u) ^2 du$	$\phi_{DR}(0, 0) = 1$ (CNS)
7	conservation de l'énergie instantanée	$\forall t, \int \text{RTF}(x, x; t, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} =  x(t) ^2$	$\forall \xi, \phi_{DR}(\xi, 0) = 1$ (CNS)
8	conservation du spectre	$\forall \omega, \int \text{RTF}(x, x; t, \omega) dt =  X(\omega) ^2$	$\forall \tau, \phi_{DR}(0, \tau) = 1$ (CNS)
9	conservation de la fréquence instantanée	$\forall t, x(t) =  x(t)  e^{j\phi(t)}, \int \omega \cdot \text{RTF}(x, x; t, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{d\phi}{dt}(t)  x(t) ^2$	$\forall \xi, \phi_{DR}(\xi, 0) = 1$ et $\frac{\partial \phi_{DR}}{\partial \tau}(\xi, 0) = 0$ (CS)
10	conservation du retard de groupe	$\forall \omega, X(\omega) =  X(\omega)  e^{j\psi(\omega)}, \int t \cdot \text{RTF}(x, x; t, \omega) dt = -\frac{d\psi}{d\omega}(\omega)  X(\omega) ^2$	$\forall \tau, \phi_{DR}(0, \tau) = 1$ et $\frac{\partial \phi_{DR}}{\partial \xi}(0, \tau) = 0$ (CS)
11	positivité	$\forall x, \forall t, \omega \text{ RTF}(x, x; t, \omega) > 0$	$\phi_{DR}(\xi, \tau) = \sum_k c_k A(h_k, h_k; \xi, \tau)$ (CNS)
12	réversibilité	x(t) peut être retrouvé à une phase près à partir de la RTF	$\forall \xi, \tau, \phi_{DR}(\xi, \tau) \neq 0$ (CS)
13	compatibilité avec les filtrages linéaires	$\text{ Si } y(t) = x(t) * h(t)$ $\text{ RTF}(y, y; t, \omega) = \text{RTF}(x, x; t, \omega) * h(h; t, \omega)$	$\phi_{DR}(\xi, \tau) \cdot \phi_{DR}(\xi, \tau') = \phi_{DR}(\xi, \tau + \tau')$ (CNS)
14	compatibilité avec les modulations de produit	$\text{ Si } y(t) = x(t) \cdot h(t)$ $\text{ RTF}(y, y; t, \omega) = \text{RTF}(x, x; t, \omega) * h(h; t, \omega)$	$\phi_{DR}(\xi, \tau) \cdot \phi_{DR}(\xi', \tau) = \phi_{DR}(\xi + \xi', \tau)$ (CNS)
15	Formule de Moyal	$\iint \text{RTF}(x, x; t, \omega) \text{RTF}(y, y; t, \omega) dt \frac{d\omega}{2\pi} = \left  \int x(u) y^*(u) du \right ^2$	$\forall \xi, \tau,  \phi_{DR}(\xi, \tau) ^2 = 1$ (CNS)
16	conservation du support du signal	$\text{ Si } \forall  t  < T \ x(t) = 0, \text{ Alors } \forall  t  < T, \forall \omega, \text{ RTF}(x, x; t, \omega) = 0$	$\forall t, \tau, ( \tau  <  t ) \Rightarrow \phi_{TR}(t, \tau) = 0$ (CN)
17	conservation du support du spectre	$\text{ Si } \forall  \omega  < \Omega \ X(\omega) = 0, \text{ Alors } \forall  \omega  < \Omega, \forall t, \text{ RTF}(x, x; t, \omega) = 0$	$\forall \xi, \omega, ( \xi  <  \omega ) \Rightarrow \phi_{DF}(\xi, \omega) = 0$ (CN)
18	conservation des valeurs nulles du signal	$\text{ Si } x(t) = 0, \text{ Alors } \forall \omega, \text{ RTF}(x, x; t, \omega) = 0$	$\phi_{DR}(\xi, \tau) = h_1(\tau) e^{-j\xi\tau/2} + h_2(\tau) e^{j\xi\tau/2}$ (CNS)
19	conservation des valeurs nulles du spectre	$\text{ Si } X(\omega) = 0, \text{ Alors } \forall t, \text{ RTF}(x, x; t, \omega) = 0$	$\phi_{DR}(\xi, \tau) = G_1(\xi) e^{-j\xi\tau/2} + G_2(\xi) e^{j\xi\tau/2}$ (CNS)

Tableau I. — Propriétés théoriques d'une RTF

En examinant ce tableau, on peut constater que les contraintes obtenues conviennent particulièrement bien aux noyaux vérifiant la compatibilité avec les changements d'échelle, c'est-à-dire pour lesquels les variables  $\xi$  et  $\tau$  n'interviennent que par leur produit :

$$\phi_{DR}(\xi, \tau) = F(\alpha\xi\tau), \quad \alpha > 0,$$

où  $\alpha$  est un paramètre d'échelle.

L'examen du tableau I permet en effet de constater que si  $F$  est une fonction réelle paire et telle que  $F(0) = 1$  et  $F'(0) = 0$ , la RTF associée vérifie alors toutes les propriétés 0-4, 6-10. Pour ces noyaux de type produit, on peut également donner certains résultats généraux concernant la formulation du noyau caractéristique dans le plan temps-retard. Cette dernière est obtenue en prenant la transformée de Fourier inverse en  $\xi$  de  $\phi_{DR}(\xi, \tau)$ , en distinguant le cas où  $\tau$  est nul :

$$\begin{cases} \phi_{TR}(v, \tau = 0) = F(0) \delta(v) \\ \phi_{TR}(v, \tau \neq 0) = \int F(\alpha\xi\tau) e^{j\xi v} \frac{d\xi}{2\pi} = \int F(\Omega) e^{j\Omega(v/\alpha\tau)} \frac{d\Omega}{2\pi\alpha|\tau|} = \frac{1}{\alpha|\tau|} f\left(\frac{v}{\alpha\tau}\right) \end{cases}$$

où  $f$  est la transformée de Fourier inverse de  $F$ . Dans cette expression, le retard  $\tau$  intervient donc comme un facteur d'échelle : si la fonction  $f$  est principalement localisée autour de l'origine, la fonction d'autocorrélation instantanée calculée avec un tel noyau effectuera un moyennage du signal sur un horizon de largeur proportionnelle à  $\tau$ , avec une pondération inversement proportionnelle à  $\tau$ . Lorsque  $\tau$  tend vers l'infini, cette fonction d'autocorrélation perd donc son caractère instantané, pour tendre vers la fonction d'autocorrélation utilisée pour un signal stationnaire :

$$\text{quand } \tau \rightarrow +\infty, \quad R(x, x; t, \tau) \neq f(0) \cdot \varphi_{xx}(\tau)$$

$$\text{avec } \varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau/2) \cdot x^*(t - \tau/2) dt.$$

On verra dans les prochains paragraphes que même si d'autres conditions souhaitables, déduites par exemple de la géométrie des interférences dans le plan des ambiguïtés [21], ont pour conséquence de réduire légèrement le choix de la fonction  $F$ , celui-ci demeure très large, et l'ensemble des représentations à noyau de type produit offre un large éventail de représentations temps-fréquence possibles.

### 1.3. VERSIONS MODIFIÉES DES REPRÉSENTATIONS

Pour aboutir à des versions discrètes et calculables des représentations de la classe de Cohen, il sera souvent nécessaire de modifier leurs expressions, pour avoir des sommations de termes en nombre fini. Afin d'arriver à une telle solution, et pour étudier les conséquences de cette troncature au niveau des propriétés théoriques, plusieurs auteurs [1, 16, 17] ont proposé d'étudier des versions modifiées des représentations. La première solution envisagée [16], s'inspirant de l'analyse à court terme du spectrogramme, consiste à construire une représentation du signal pondéré par une fonction fenêtre  $h$  centré sur l'instant d'analyse :

$$x_t(u) = x(u) \cdot h^*(t - u).$$

On obtient alors la famille des versions à fenêtre glissante [16] de cette représentation :

$$\begin{aligned} \text{RTF}_h(x, x; t, \omega) &= \text{RTF}(x_t, x_t; \omega) \\ &= \iint h(v + \tau/2) \cdot h^*(v - \tau/2) \phi_{TR}(v, \tau) x(t - v + \tau/2) \cdot x^*(t - v - \tau/2) e^{-j\omega\tau} dv d\tau \end{aligned}$$

dont les noyaux caractéristiques s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \phi_{TR}^{FG}(v, \tau) &= h(v + \tau/2) \cdot h^*(v - \tau/2) \phi_{TR}(v, \tau) \\ \phi_{DR}^{FG}(v, \tau) &= \int A(h, h; \xi - \Omega, \tau) \phi_{DR}(\Omega, \tau) \frac{d\Omega}{2\pi}. \end{aligned}$$

Comme pour le spectrogramme, les modifications de la pondération  $\phi_{DR}(\xi, \tau)$  suivant ses deux variables s'effectuent de façon non indépendantes, et sont intrinsèquement liées par l'intermédiaire de la fonction d'ambiguïté de la fonction  $h$ . Un autre type de versions modifiées, conduisant cette fois à des modifications indépendantes sur les variables  $\xi$  et  $\tau$ ,

peut être construit en multipliant la pondération  $\phi_{DR}$  par deux fonctions fenêtres. On obtient alors la famille des versions pseudo-lissées [17, 18, 19] d'une représentation, de noyaux caractéristiques :

$$\begin{aligned}\phi_{DR}^{PL}(\xi, \tau) &= h(\tau) \cdot G(\xi) \phi_{DR}(\xi, \tau) \\ \phi_{TR}^{PL}(v, \tau) &= h(\tau) \int g(u) \cdot \phi_{TR}(v - u, \tau) du\end{aligned}$$

et où le terme pseudo correspond à la présence de  $h$  et lissé à celle de  $G$ . Il faut remarquer cependant que la nouvelle expression du noyau caractéristique dans le plan temps-retard ne permet pas de garantir la limitation de son support. En fait, l'emploi des versions pseudo-lissées trouve davantage sa motivation dans le souhait de réduire les termes d'interférence d'une représentation en lui appliquant une double convolution en temps et en fréquence,

$$RTF_{\varphi}(x \cdot x; t, \omega) = \iint \varphi(t - u, \omega - \Omega) RTF(x \cdot x; u, \Omega) du \frac{d\Omega}{2\pi}$$

au moyen d'un noyau de lissage séparable. Les fenêtres  $g$  et  $h$  réalisent alors deux lissages temporels et fréquentiels indépendants, pouvant être aisément adaptés au signal analysé [1, 17] :

$$\begin{aligned}\varphi(t, \omega) &= g(t) \cdot H(\omega) \\ RTF_{\varphi}(x \cdot x; t, \omega) &= \int h(\tau) \left\{ \int g(u) \cdot R(x \cdot x; t - u, \tau) du \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau\end{aligned}$$

où  $G$  et  $H$  sont les transformées de Fourier de  $g$  et  $h$

Ces deux motivations assez différentes, puisqu'elles proviennent en effet du souhait d'élaborer pour la première une version discrète réalisable d'une représentation, et pour la seconde une version doublement lissée, conduisent donc toutes les deux à des versions modifiées d'une représentation, caractérisées par de nouveaux noyaux. On verra au paragraphe 3 que ces différentes versions permettent de conserver certaines des propriétés théoriques de la représentation d'origine.

#### 1.4. DISCRÉTISATION DES RTF

Le dernier point abordé dans cette première partie concerne la définition de la classe de Cohen pour des signaux discrétisés. De manière pratique, le souhait de calculer la représentation temps-fréquence d'un signal discret  $x[t]$  fait apparaître le plan temps-retard comme point de départ naturel : pour chaque instant, on calcule une fonction d'autocorrélation instantanée du signal, le passage dans le plan temps-fréquence s'effectuant ensuite par une transformée de Fourier discrète (comme pour l'analyse spectrale d'un signal stationnaire par un algorithme de Blackman-Tuckey [26]). Ce choix correspond alors à définir la RTF discrète comme la transformée de Fourier discrète de la fonction d'autocorrélation instantanée discrétisée.

Cependant, un tel choix conduit à deux problèmes principaux, pour lesquels plusieurs solutions sont envisageables. Le premier problème réside dans le choix de l'expression du noyau caractéristique dans le plan temps-retard de la RTF discrète. En effet, l'opérateur de discrétisation et les relations de passage entre plans n'étant pas compatibles entre elles, le choix du plan dans lequel s'effectue la discrétisation du noyau peut conduire à différentes expressions de  $\phi_{TR}[v, \tau]$ . On peut par exemple comparer les résultats obtenus en effectuant cette discrétisation dans le plan temps-retard ou dans le plan des ambiguïtés :

$$\phi_{TR}[v, \tau] = \phi_{TR}(vT_e, \tau T_e), \quad \text{ou} \quad \phi_{TR}[v, \tau] = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{DR}\left(\frac{\theta}{T_e}, \tau \cdot T_e\right) e^{jv\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Bien que l'utilisation de la deuxième expression soit parfois évoquée [3], il semble naturel d'effectuer la discrétisation dans le plan temps-retard, aucune relation de passage entre plans n'étant alors ensuite nécessaire.

Enfin, le second problème réside dans le choix de l'expression de la représentation temps-fréquence discrète, et de sa périodicité. Celui-ci est rarement abordé dans le cadre général de la classe de Cohen. Il résulte du fait qu'il est possible, au moins formellement, de faire précéder l'opération de discrétisation par deux types de changements de variables,

$$\begin{aligned}RTF(x \cdot x; t, \omega) &= 2 \iint \phi_{TR}(t - v, 2\tau) x(v + \tau) \cdot x^*(v - \tau) e^{-j2\omega\tau} dv d\tau \\ &= \iint \phi_{TR}(t - v - \tau/2, \tau) x(v + \tau) \cdot x^*(v) e^{-j\omega\tau} dv d\tau\end{aligned}$$

conduisant alors, lorsque la représentation discrète est calculée aux instants multiples de la période d'échantillonnage, à des versions soit de période  $\pi$  soit de période  $2\pi$ . Une règle générale semble alors se déduire des versions discrètes des représentations proposées par différents auteurs [5, 17, 21, 22] :

— Si le noyau dans le plan temps-retard est de la forme :

$$\phi_{TR}(v, \tau) = h(\tau) \delta(v + k\tau/2), \quad k \in \mathbb{Z}$$

alors :

- Si  $k$  est impair, on ne peut construire que des versions discrètes de période  $2\pi$ . C'est le cas notamment de la représentation de Rihaczek, et de ses versions lissées. Aucun repliement spectral supplémentaire ne se produira pour un signal échantillonné vérifiant la condition de Shanon.

- Si  $k$  est pair, on ne peut construire que des versions discrètes de période  $\pi$ , ce qui entraîne un repliement supplémentaire. C'est le cas par exemple de la représentation de Wigner-Ville. Des solutions classiques permettent alors de résoudre ce problème, dont on retiendra principalement l'emploi du signal analytique [9, 16].

Sinon, on peut construire indifféremment des versions discrètes de période  $\pi$  et de période  $2\pi$  :

$$\text{RTF}[x \cdot x; t, \theta] = 2 T_e \sum_{\tau} \sum_{\mu} \phi_{TR}[\mu, 2\tau] x[t - \mu + \tau] \cdot x^*[t - \mu - \tau] e^{-2j\theta\tau}$$

$$\text{ou} \quad \text{RTF}[x \cdot x; t, \theta] = T_e \sum_{\tau} \sum_{\mu} \phi_{TR}[\mu - \tau/2, \tau] x[t - \mu + \tau] \cdot x^*[t - \mu] e^{-j\theta\tau}$$

(N.B. : dans tout le texte, la notation entre crochets permet de distinguer les fonctions à temps discret des fonctions à temps continu).

Le choix entre l'une ou l'autre version peut par exemple s'effectuer en fonction des formulations des propriétés théoriques du tableau I adoptées pour des signaux discrets, et notamment de la définition choisie de la fréquence instantanée d'un signal discret [16, p. 292].

## 2. Représentation de Choi-Williams

### 2.1. DÉFINITION

L'article de MM. Choi et Williams [3] est peut être le plus novateur des trois articles étudiés ici, mais il semble néanmoins que les caractéristiques de la représentation proposée ne soient pas aussi parfaites que l'on a pu le prétendre [2]. La motivation première de leur travail semble avoir été la réduction des termes d'interférence des RTF, dans le but d'une application à la reconnaissance de forme de signaux biomédicaux. La proposition originale des auteurs est d'élaborer une représentation à noyau du type produit, en choisissant comme fonction une gaussienne paramétrée par sa « variance » [23] :

$$F(x) = e^{-x^2/\sigma}, \quad \text{soit} \quad \phi_{DR}(\xi, \tau) = e^{-\xi^2 \tau^2/\sigma}, \quad \sigma > 0.$$

La représentation ainsi définie vérifiée donc *de facto* les propriétés 0-4, 6-10, 12.

Pour effectuer le passage dans le plan temps-retard, afin d'exprimer la représentation en fonction du signal  $x(t)$ , on utilise les résultats du paragraphe I.2 ; en prenant la transformée de Fourier inverse en  $\xi$  de  $\phi_{DR}(\xi, \tau)$ , on obtient :

$$\begin{cases} \phi_{TR}(v, \tau = 0) = \delta(v) \\ \phi_{TR}(v, \tau \neq 0) = \frac{1}{(4\pi\tau^2/\sigma)^{1/2}} e^{-\frac{v^2}{4\tau^2/\sigma}} \end{cases}$$

De plus, en utilisant une propriété des fonctions gaussiennes,

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau \neq 0}} \phi_{TR}(v, \tau) = \lim_{\substack{\Sigma \rightarrow 0 \\ \Sigma \neq 0}} \frac{1}{(2\pi\Sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{v^2}{2\Sigma^2}} = \delta(v), \quad \text{avec} \quad \Sigma^2 = 2\tau^2/\sigma$$

on peut montrer que le noyau  $\phi_{TR}(v, \tau)$  est défini et continu sur la droite  $\tau = 0$ . On peut donc admettre que  $\phi_{TR}(v, \tau \neq 0)$  peut être prolongé en  $\tau = 0$  et écrire cette nouvelle RTF sous la forme effectivement donnée par les auteurs :

$$\begin{aligned} CW(x \cdot x; t, \omega) &= \iint \frac{1}{(4\pi^2/\sigma)^{1/2}} e^{-\frac{v^2}{4\tau^2/\sigma}} x(t+v+\tau/2) \cdot x^*(t+v-\tau/2) e^{-j\omega\tau} dv d\tau \\ &= 2 \iint \frac{1}{(16\pi^2/\sigma)^{1/2}} e^{-\frac{v^2}{16\tau^2/\sigma}} x(t+v+\tau) \cdot x^*(t+v-\tau) e^{-j2\omega\tau} dv d\tau \end{aligned}$$

ce qui permet alors de définir la représentation de Choi-Williams discrète :

$$CW[x \cdot x; t, \theta] = 2 \left\{ |x[t]|^2 + \sum_{\tau \neq 0} \sum_{\mu} \frac{e^{-\frac{\mu^2}{16\tau^2/\sigma}}}{(16\pi^2/\sigma)^{1/2}} x[t+\mu+\tau] \cdot x^*[t+\mu-\tau] e^{-2j\theta\tau} \right\}.$$

Cette expression, obtenue en effectuant la discrétisation dans le plan temps-retard, et en prenant la définition correcte pour  $\tau = 0$ , semble se justifier davantage que celle des auteurs, obtenue en discrétisant dans le plan doppler-retard, dans la mesure où elle ne nécessite aucune approximation.

## 2.2. REPRÉSENTATION DE CHOI-WILLIAMS PSEUDO-MASQUÉE

Pour aboutir à une estimation de cette représentation calculable numériquement, il est nécessaire de transformer cette dernière expression pour avoir des sommations de termes en nombre fini, puisque le noyau  $\phi_{TR}$  n'est pas de support borné. Comme on l'a vu au paragraphe 1.2, l'élaboration d'une version à fenêtre glissante de cette représentation conduit à de nouveaux noyaux caractéristiques n'offrant qu'un seul degré de liberté à l'utilisateur. La proposition originale des auteurs, permettant d'obtenir des domaines d'intégration sur les deux variables du plan temps-retard à la fois bornés et de largeurs indépendantes, consiste alors à multiplier le noyau de Choi-Williams par deux fonctions fenêtres dans le plan temps-retard, au lieu du plan doppler-retard pour les versions pseudo-lissées. Cette solution conduit donc à un nouveau type de versions modifiées, pour laquelle on propose l'appellation de version pseudo-masquée, par analogie avec les versions pseudo-lissées, et dont les noyaux caractéristiques s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \phi_{TR}^{PM}(v, \tau) &= g(v) \cdot h(\tau) \phi_{TR}(v, \tau) \\ \phi_{DR}^{PM}(v, \tau) &= h(\tau) \int \phi_{DR}(\Omega, \tau) G(\xi - \Omega) \frac{d\Omega}{2\pi}. \end{aligned}$$

La nouvelle représentation obtenue, appelée représentation pseudo Choi-Williams masquée, a donc pour expression [3, 23] :

$$PCWM(x \cdot x; t, \omega) = \iint \frac{h(\tau) g(v)}{(4\pi^2/\sigma)^{1/2}} e^{-\frac{v^2}{4\tau^2/\sigma}} x(t+v+\tau/2) \cdot x^*(t+v-\tau/2) e^{-j\omega\tau} dv d\tau.$$

Le tableau II présente alors une comparaison entre les trois types de versions modifiées d'une représentation. Il présente les expressions des contraintes sur le noyau caractéristique et les conditions suffisantes pour que les propriétés 6 à 10 soient vérifiées. On peut alors constater que contrairement à une opération de lissage, l'opération de masquage permet de conserver les propriétés sur l'énergie instantanée et la fréquence instantanée, moyennant des conditions peu draconiennes. Les propriétés duales sur la densité spectrale et le retard de groupe semblent par contre assez difficiles à obtenir. Les versions à fenêtre glissante conservent également les mêmes propriétés que les versions pseudo-masquées, avec des contraintes moins strictes sur la fenêtre, mais elles offrent à l'utilisateur un degré de liberté en moins, et semblent donc moins intéressantes.

A l'aide des deux tableaux présentés, on peut alors vérifier que si  $g$  et  $h$  sont des fonctions réelles paires vérifiant  $h(0) = g(0) = 1$  et  $h'(0) = 0$ , la version pseudo-masquée de la représentation de Choi-Williams vérifie les propriétés 0, 2, 3, 4, 6, 7, 9. On peut donc dire que la version discrète définie comme précédemment mais en effectuant des sommes finies de termes constitue une estimation correcte de la représentation de Choi-Williams, puisque son équivalent à temps continu possède un bon nombre de propriétés intéressantes. On pourrait cependant lui reprocher, tout comme aux versions à fenêtre glissante et aux pseudo-représentations, d'introduire une dissymétrie entre les variables de temps et de fréquence, et de privilégier l'aspect de représentation de la fréquence en fonction du temps, au détriment de l'inverse. Il semble cependant que, dans de nombreux cas, cet aspect corresponde à l'utilisation recherchée des RTF.

	Version Pseudo Lissée	Version Pseudo Masquée	Version à fenêtre glissante
$\phi_{DR}(\xi, \tau)$	$\phi_{DR}^{PL}(\xi, \tau) = G(\xi) h(\tau) \phi_{DR}(\xi, \tau)$	$\phi_{DR}^{PM}(\xi, \tau) = h(\tau) \int \phi_{DR}(\Omega, \tau) G(\xi - \Omega) \frac{d\Omega}{2\pi}$	$\phi_{DR}^{FG}(\xi, \tau) = \int \phi_{DR}(\Omega, \tau) A(h, h; \xi - \Omega, \tau) \frac{d\Omega}{2\pi}$
$\phi_{TR}(v, \tau)$	$\phi_{TR}^{PL}(v, \tau) = h(\tau) \int \phi_{TR}(u, \tau) g(v - u) du$	$\phi_{TR}^{PM}(v, \tau) = g(v) h(\tau) \phi_{TR}(v, \tau)$	$\phi_{TR}^{FG}(v, \tau) = h(v + \tau/2) h^*(v - \tau/2) \phi_{TR}(v, \tau)$
$\phi_{DR}(0, 0)$	$h(0) G(0) \phi_{DR}(0, 0)$	$h(0) \int \phi_{DR}(\Omega, 0) G(-\Omega) \frac{d\Omega}{2\pi}$	$\int \phi_{DR}(\Omega, 0) A(h, h; -\Omega, 0) \frac{d\Omega}{2\pi}$
Propriété 6	$h(0) = G(0) = 1$	$h(0) = g(0) = 1$	$ h(0) ^2 = 1$
$\phi_{DR}(\xi, 0)$	$h(0) G(\xi) \phi_{DR}(\xi, 0)$	$h(0) \int \phi_{DR}(\Omega, 0) G(\xi - \Omega) \frac{d\Omega}{2\pi}$	$\int \phi_{DR}(\Omega, 0) A(h, h; \xi - \Omega, 0) \frac{d\Omega}{2\pi}$
Propriété 7	$G(\xi) = 1, h(0) = 1$	$h(0) = g(0) = 1$	$ h(0) ^2 = 1$
$\phi_{DR}(0, \tau)$	$h(\tau) G(0) \phi_{DR}(0, \tau)$	$h(\tau) \int \phi_{DR}(\Omega, \tau) G(-\Omega) \frac{d\Omega}{2\pi}$	$\int \phi_{DR}(\Omega, \tau) A(h, h; -\Omega, \tau) \frac{d\Omega}{2\pi}$
Propriété 8	$h(\tau) = 1, G(0) = 1$	contrainte intégrale entre h et G (??)	(??)
$\frac{\partial \phi_{DR}}{\partial \tau}(\xi, 0)$	$G(\xi) \{ h'(0) \phi_{DR}(\xi, 0) + h(0) \frac{\partial \phi_{DR}}{\partial \tau}(\xi, 0) \}$	$\int \{ h'(0) \phi_{DR}(\Omega, 0) + h(0) \frac{\partial \phi_{DR}}{\partial \tau}(\Omega, 0) \} G(\xi - \Omega) \frac{d\Omega}{2\pi}$	$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} [A(h, h; \xi - \Omega, \tau)]_{(\tau=0)} \phi_{DR}(\Omega, 0) + A(h, h; \xi - \Omega, 0) \frac{\partial \phi_{DR}}{\partial \tau}(\Omega, 0) \right\} \frac{d\Omega}{2\pi}$
Propriété 9	$G(\xi) = 1, h(0) = 1, h'(0) = 0$	$h(0) = g(0) = 1, h'(0) = 0$	$h(t) = v(t) e^{i\varphi(t)}$ avec $\varphi(0) = 0$ et $v(t)$ continue et de dérivée continue en 0
$\frac{\partial \phi_{DR}}{\partial \xi}(0, \tau)$	$h(\tau) \{ G'(0) \phi_{DR}(0, \tau) + G(0) \frac{\partial \phi_{DR}}{\partial \xi}(0, \tau) \}$	$\frac{h(\tau)}{2} \int \{ \phi_{DR}(\Omega, \tau) G'(-\Omega) + \frac{\partial \phi_{DR}}{\partial \xi}(\Omega, \tau) G(-\Omega) \} \frac{d\Omega}{2\pi}$	$\frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [A(h, h; \xi/2 - \Omega, \tau)]_{(\xi=0)} \phi_{DR}(\Omega, 0) + A(h, h; \Omega, \tau) \frac{\partial \phi_{DR}}{\partial \xi}(\Omega, \tau) \right\} \frac{d\Omega}{2\pi}$
Propriété 10	$h(\tau) = 1, G(0) = 1, G'(0) = 0$	équation différentielle entre G et $\phi_{DR}$ (??)	(??)

Tableau II. — Comparaison entre les versions modifiées des représentations

Enfin, on notera que dans le cas de la représentation de Wigner-Ville, les versions pseudo-masquées et à fenêtre glissante sont confondues avec la représentation pseudo Wigner-Ville :

$$\begin{aligned} \phi_{TR}^{WVFG}(v, \tau) &= h(v + \tau/2) \cdot h^*(v - \tau/2) \phi_{TR}^{WV}(v, \tau) \\ &= h(\tau/2) \cdot h^*(-\tau/2) \delta(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{TR}^{PWVM}(v, \tau) &= h(\tau) g(v) \phi_{TR}^{WV}(v, \tau) \\ &= h(\tau) \cdot g(0) \delta(v). \end{aligned}$$

De façon plus générale, ce résultat montre qu'il n'est pas toujours possible, pour une représentation temps-fréquence donnée, d'obtenir des représentations différentes en utilisant ces trois types de versions modifiées.

### 2.3. CARACTÉRISTIQUES DE LA REPRÉSENTATION DE CHOI-WILLIAMS

Après avoir défini et donné les propriétés théoriques de la représentation de Choi-Williams et de ses versions pseudo-masquées, on va à présent étudier le calcul de cette représentation pour différents signaux classiques. Ces calculs permettront alors de dégager certaines remarques sur les possibilités d'utilisation pour des signaux réels. On conviendra pour cela de noter  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $y_1(t)$  les différents signaux :

$$x_1(t) = e^{j\omega_1 t}, \quad x_2(t) = e^{j\omega_2 t}, \quad y_1(t) = e^{j(\omega_1 t + \alpha_1 t^2/2)}.$$

Comme le signalent ses auteurs, la représentation de Choi-Williams est parfaitement localisée pour des signaux sinusoïdaux, ce qui résulte du fait qu'elle vérifie la propriété 8 de conservation de la densité spectrale d'énergie [1] :

$$(\phi_{DR}(\xi = 0, \tau) = 1) \Rightarrow CW(x_1 \cdot x_1; t, \omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_1).$$

Pour la somme de deux sinusoïdes,  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ , cette représentation va alors comporter deux termes parfaitement localisés en  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , et un terme d'interférence supplémentaire dont l'amplitude maximale est localisée à égale distance des deux fréquences, comme pour la représentation de Wigner-Ville [16] :

$$CW(x \cdot x; t, \omega) - CW(x_1 \cdot x_1; t, \omega) - CW(x_2 \cdot x_2; t, \omega) = 2 \mathcal{R} \{ CW(x_1 \cdot x_2; t, \omega) \}$$

$$\text{avec } CX(x_1 \cdot x_2; t, \omega) = \sqrt{\frac{\pi\sigma}{(\omega_1 - \omega_2)^2}} e^{-\frac{\sigma \left(\omega - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)^2}{4(\omega_1 - \omega_2)^2}} e^{j(\omega_1 - \omega_2)t}$$

et que l'on peut également écrire de la forme :

$$CW(x_1 \cdot x_2; t, \omega) = \sqrt{\frac{\sigma}{(\omega_1 - \omega_2)^2}} G_2 \left( \sqrt{\frac{\sigma}{(\omega_1 - \omega_2)^2}} \left( \omega - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right) e^{j(\omega_1 - \omega_2)t}$$

$$\text{avec } G_2(\omega) = \int e^{-u^2} e^{-j\omega u} du = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Comme le font remarquer les auteurs, une des caractéristiques intéressantes de cette représentation est que l'amplitude de ce terme d'interférence est inversement proportionnelle à la distance entre les deux fréquences. Mais cette qualité intéressante est obtenue au prix d'autres caractéristiques plus gênantes :

Le premier point à remarquer est que l'enveloppe de cette fonction a une aire indépendante de  $\sigma$  :

$$\int |CW(x_1 \cdot x_2; t, \omega)| \frac{d\omega}{2\pi} = 1.$$

Ce résultat montre en effet que la diminution de la valeur maximale du terme d'interférence située au milieu des deux fréquences entraîne son étalement sur tout le domaine spectral. Lorsque  $\sigma$  tend vers l'infini, la représentation de Choi-Williams tend vers celle de Wigner-Ville, et le terme d'interférence tend vers un dirac. Si par contre  $\sigma$  tend vers 0, ce dernier tend vers une fonction à décroissance très lente. Une réduction de plus en plus importante de la valeur maximale du terme d'interférence est donc indissociable de la présence d'une composante oscillante non négligeable sur une bande de plus en plus large.

Une conséquence supplémentaire de ce résultat est que ce terme d'interférence n'est pas nul à chacune des deux fréquences :

$$CW(x_1 \cdot x_2; t, \omega_1) = CW(x_1 \cdot x_2; t, \omega_2) = \sqrt{\frac{\pi\sigma}{(\omega_1 - \omega_2)^2}} e^{-\frac{\sigma}{16}} e^{j(\omega_1 - \omega_2)t}.$$

L'utilisation de la représentation de Choi-Williams pour estimer l'amplitude instantanée des composantes élémentaires d'un signal doit donc être envisagée avec une certaine prudence, puisque le recouvrement des termes d'interférence sur les composantes propres peut perturber ces dernières de façon non négligeable à l'endroit de leur localisation spectrale. Enfin, ces quelques remarques peuvent être complétées en effectuant le calcul de la représentation de Choi-Williams pour un signal à modulation linéaire de fréquence :

$$\begin{aligned} CW(y_1 \cdot y_1; t, \omega) &= \int e^{-\alpha_1^2 \tau^4 / \sigma} e^{-j(\omega - \omega_1 - \alpha_1 t)\tau} d\tau \\ &= \sqrt{\frac{4\sqrt{\sigma}}{\alpha_1^2}} \int e^{-u^4} e^{-j\sqrt{\frac{4\sqrt{\sigma}}{\alpha_1^2}}(\omega - \omega_1 - \alpha_1 t)u} du \\ &= \sqrt{\frac{4\sqrt{\sigma}}{\alpha_1^2}} G_4 \left( \sqrt{\frac{4\sqrt{\sigma}}{\alpha_1^2}} (\omega - \omega_1 - \alpha_1 t) \right) \end{aligned}$$

où  $G_4(\omega) = \int e^{-u^4} e^{-j\omega u} du$  est la transformée de Fourier de  $e^{-u^4}$ .

La représentation de Choi-Williams donne donc lieu à des expressions sensiblement identiques pour l'interférence entre deux sinusoides et pour un chirp, dans lesquelles le paramètre  $\sigma$  intervient à la fois comme un facteur de gain et comme un facteur de localisation spectrale. La diminution du paramètre  $\sigma$ , permettant précédemment la réduction de l'amplitude de l'interférence entre deux sinusoides, entraîne donc ici la réduction de l'amplitude de ce terme propre. Pour un signal quelconque comprenant plusieurs composantes, il est donc nécessaire de trouver la valeur du paramètre qui réalise un compromis acceptable entre la réduction de l'amplitude et la concentration de la localisation des termes d'interférence, mais aussi de certains termes propres, ainsi que leurs recouvrements mutuels.

## 2.4. AUTRES REPRÉSENTATIONS DU MÊME TYPE

Pour conclure ce deuxième paragraphe, on va revenir sur les motivations qui ont conduit à l'élaboration de la représentation de Choi-Williams. Comme on l'a vu, celle-ci est construite au moyen d'un noyau de type produit, qui lui permet donc de vérifier un bon nombre de propriétés théoriques. Mais cet aspect théorique s'accompagne également du souhait de réduire l'amplitude des termes d'interférence, comme on l'a vu dans le cas particulier d'une somme de deux sinusoïdes, afin d'obtenir dans la pratique une représentation ayant de bonnes qualités descriptives et facilement interprétable. Pour des signaux moins particuliers que des sommes de sinusoïdes pures, on peut encore mettre en évidence cette réduction des termes d'interférence en raisonnant dans le plan des ambiguïtés. Un résultat désormais bien connu [21] montre en effet que la fonction d'ambiguïté d'un signal comportant plusieurs composantes possède des termes propres localisés dans une zone comprenant l'origine, alors que ses termes d'interférence sont localisés dans des zones excentrées du plan. Le choix d'utiliser une gaussienne pour construire la représentation de Choi-Williams permet alors de réduire l'amplitude de ces dernières, en pondérant la fonction d'ambiguïté par un noyau caractéristique  $\Phi_{DR}$  dont la valeur devient très faible pour les points éloignés de l'origine et des axes.

De façon plus générale, ce choix correspond à l'utilisation du module carré de la transmittance d'un filtre passe-bas comme fonction initiale pour le noyau. On diminue ainsi l'amplitude des valeurs de la fonction d'ambiguïté pour les points situés au-delà des deux hyperboles d'équations  $\xi\tau = \omega_c$  et  $\xi\tau = -\omega_c$ ,  $\omega_c$  étant la fréquence de coupure du filtre passe-bas. Le choix des auteurs s'est porté sur une fonction gaussienne, mais on peut trouver beaucoup d'autres fonctions vérifiant les conditions nécessaires pour assurer les propriétés 0-4, 6-10 du tableau I, et permettant de mener les différents calculs nécessaires jusqu'à leur terme. On va illustrer ce propos par deux exemples. Le premier est obtenu en prenant une fenêtre rectangulaire, c'est-à-dire un filtre passe-bas idéal :

$$\Phi_{DR}(\xi, \tau) = F(\xi\tau) = \text{Rect}(\xi\tau, 2\pi\alpha), \quad \alpha > 0$$

où  $\text{Rect}(x, T)$  est la fonction rectangle classique, définie par :

$$\text{Rect}(x, T) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'effet de ce noyau est donc de laisser inchangée la valeur de la fonction d'ambiguïté du signal sur une surface délimitée par les deux hyperboles  $\xi\tau = 2\pi\alpha$  et  $\xi\tau = -2\pi\alpha$ , et de mettre à zéro le reste du plan des ambiguïtés. Le noyau dans le plan temps-retard de cette représentation est alors égal à :

$$\begin{cases} \Phi_{TR}(v, \tau = 0) = \delta(v) \\ \Phi_{TR}(v, \tau \neq 0) = \frac{2\alpha}{|\tau|} \text{sinc}(2\pi\alpha v/\tau) \end{cases}$$

Comme pour la représentation de Choi-Williams, ce noyau est continu sur la droite  $\tau = 0$  puisque :

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau \neq 0}} \Phi_{TR}(v, \tau) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\lambda v)}{\pi v} = \delta(v), \quad \text{avec } \lambda = \frac{2\pi\alpha}{|\tau|}$$

On obtient alors une RTF que nous avons appelée Distribution à Noyau Rectangulaire :

$$\text{DNR}(x \cdot x; t, \omega) = \iint \frac{2\alpha}{|\tau|} \text{sinc}(2\pi\alpha v/\tau) x(t+v+\tau/2) \cdot x^*(t+v-\tau/2) e^{-j\omega\tau} dv d\tau$$

Pour des signaux discrets, l'expression correspondante devient :

$$\text{DNR}[x \cdot x; t, \theta] = 2 \left\{ |x[t]|^2 + \sum_{\tau \neq 0} \sum_{\mu} \frac{\alpha}{|\tau|} \text{sinc}(\pi\alpha\mu/\tau) x[t+\mu+\tau] \cdot x^*[t+\mu-\tau] e^{-2j\theta\tau} \right\}$$

Un autre exemple de représentation de ce type peut être obtenu en construisant un noyau caractéristique au moyen d'une fonction de Cauchy, correspondant alors au module carré de la transmittance d'un filtre passe-bas de Butterworth du premier ordre :

$$F(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{soit } \Phi_{DR}(\xi, \tau) = \frac{1}{1+\alpha^2 \xi^2 \tau^2}, \quad \alpha > 0$$

et donc :

$$\begin{cases} \Phi_{\text{TR}}(v, \tau = 0) = \delta(v) \\ \Phi_{\text{TR}}(v, \tau \neq 0) = \frac{e^{-(|v|/\alpha |\tau|)}}{2 \alpha |\tau|} . \end{cases}$$

La représentation obtenue, appelée « Distribution à Noyau de Cauchy » présente une certaine ressemblance avec la représentation de Choi-Williams :

$$\text{DNC}[x \cdot x; t, \omega] = \iint \frac{e^{-(|v|/\alpha |\tau|)}}{2 \alpha |\tau|} x(t + v + \tau/2) \cdot x^*(t + v - \tau/2) e^{-j\omega\tau} dv d\tau .$$

Pour des signaux discrets, l'expression correspondante devient :

$$\text{DNC}[x \cdot x; t, \theta] = 2 \left\{ |x[t]|^2 + \sum_{\tau \neq 0} \sum_{\mu} \frac{e^{-(|\mu|/2\alpha |\tau|)}}{4 \alpha |\tau|} x[t + \mu + \tau] \cdot x^*[t + \mu - \tau] e^{-2j\theta\tau} \right\} .$$

Ces deux représentations possèdent alors les mêmes propriétés que la représentation de Choi-Williams (sauf la représentation à noyau rectangulaire qui ne vérifie pas la propriété 12 de réversibilité). De même, des résultats identiques à ceux du paragraphe II.3 pourraient être présentés, aboutissant là encore à la nécessité d'un compromis entre la réduction des termes d'interférence et la localisation des termes propres. Enfin, il faut noter que la représentation de Choi-Williams et les deux représentations proposées utilisent des filtres passe-bas à réponse impulsionnelle infinie, ce qui est contradictoire avec l'obtention de versions discrètes et calculables qui entraînent nécessairement des troncatures, et donc des versions pseudo-masquées. Il est possible bien évidemment d'utiliser des filtres passe-bas à réponse impulsionnelle finie, ce qui est le cas de la représentation de Born-Jordan, qui va être abordée au chapitre suivant.

## 3. Représentations de Zhao-Atlas-Marks et pseudo Born-Jordan

### 3.1. REPRÉSENTATION DE ZHAO-ATLAS-MARKS

L'article de MM. Zhao, Atlas et Marks [4] est original par leur façon d'appréhender le problème des RTF. Le principal objectif de leur travail est la conception d'une représentation temps-fréquence ayant des termes d'interférence réduits et respectant la condition de conservation des supports, avec une application sous-jacente à l'analyse et la reconnaissance des signaux de parole. L'étude de cette propriété les conduit alors à faire une analogie intéressante avec les fonctions d'inhibition latérale utilisées en traitement d'image et dans les réseaux neuronaux, prenant pour cela comme point de départ de leurs raisonnements le plan doppler-fréquence, rarement utilisé jusqu'à présent.

De façon plus précise, le respect de la condition de conservation du support du signal (cf. tableau I) conduit les auteurs à proposer une famille de représentations temps-fréquence paramétrée par une fonction fenêtre mono-variable  $h$ , dont les noyaux caractéristiques s'écrivent sous la forme :

$$\Phi_{\text{TR}}(v, \tau) = h(\tau) \cdot \text{Rect} \left( v, \frac{|\tau|}{2} \right) .$$

La représentation obtenue avec ce type de noyau est alors égale à

$$\text{Zam}(x \cdot x; t, \omega) = \int h(\tau) \left\{ \int_{-|\tau|/2}^{|\tau|/2} x(t + u + \tau/2) \cdot x^*(t + u - \tau/2) du \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau .$$

La version discrète se déduit de cette dernière expression :

$$\text{Zam}[x \cdot x; t, \theta] = 2 \sum_{\tau} h[\tau] \left\{ \sum_{\mu=-|\tau|}^{\mu=|\tau|} x[t + \mu + \tau] \cdot x^*[t + \mu - \tau] \right\} e^{-2j\theta\tau} .$$

### 3.2. PROPRIÉTÉS THÉORIQUES ET REPRÉSENTATION PSEUDO BORN-JORDAN

L'originalité de leurs analyses dans le plan Doppler-Fréquence est cependant entachée par le fait qu'ils n'ont pas réalisé une étude classique des propriétés de cette représentation. Celle-ci débute bien évidemment en calculant son noyau dans le plan doppler-retard :

$$\Phi_{DR}(\xi, \tau) = h(\tau) \int \text{Rect}(v, |\tau|/2) e^{-j\xi v} dv = h(\tau) \frac{\sin(\xi |\tau|/2)}{\xi/2}.$$

Si, conformément à la suggestion des auteurs [4], la fenêtre  $h$  est une gaussienne, le noyau peut s'écrire alors au moyen d'un sinus cardinal :

$$\Phi_{DR}(\xi, \tau) = |\tau| e^{-\alpha\tau^2} \text{sinc}(\xi\tau/2)$$

et on peut vérifier que la représentation de Zhao-Atlas-Marks vérifie les propriétés 0, 2, 3, 4, 16, mais ne vérifie aucune des propriétés sur les moments et marginales (6 à 10 du tableau). Notamment, comme  $\Phi_{DR}(0, 0) = 0$ , elle ne vérifie même pas la propriété de conservation de l'énergie, ni les marginales en temps et en fréquence. Il semble donc que bien que ses qualités visuelles de représentation des signaux semblent très intéressantes, l'absence de ces propriétés sur les marginales empêchent son utilisation pour estimer les grandeurs locales (amplitudes et fréquences instantanées) des composantes d'un signal.

De plus, il semble tout à fait justifié et nécessaire de faire le rapprochement entre cette représentation et la représentation de Born-Jordan [11, 1, 2, 16, 21] (pourtant jamais citée dans [4]), que l'on retrouve en prenant  $h(\tau) = 1/|\tau|$ . Cette dernière est une autre représentation à noyau de type produit, utilisant cette fois un filtre passe-bas à réponse impulsionnelle finie, avec un paramètre d'échelle ajusté pour vérifier également les propriétés de conservation des supports temporels et fréquentiels. En prenant alors une version lissée en fréquence de la représentation de Born-Jordan, on obtient une représentation dont les noyaux caractéristiques s'écrivent sous une forme très similaire à ceux de la représentation de Zhao-Atlas-Marks :

$$\Phi_{DR}(\xi, \tau) = h(\tau) \text{sinc}(\xi\tau/2) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Phi_{TR}(v, \tau = 0) = h(0) \cdot \delta(v) \\ \Phi_{TR}(v, \tau \neq 0) = \frac{h(\tau)}{|\tau|} \text{Rect}(v, |\tau|/2). \end{cases}$$

Si  $h$  est une fonction réelle paire vérifiant  $h(0) = 1$  et  $h'(0) = 0$ , cette représentation vérifie alors les conditions 0, 2-4, 6, 7, 9, 16. La représentation ainsi définie, appelée pseudo Born-Jordan, vérifie donc également la conservation des supports du signal, mais contrairement à la représentation de Zhao-Atlas-Marks, elle vérifie la propriété de conservation de l'énergie, et ses moments temporels sont non-biaisés. Cette représentation semble donc constituer une solution préférable du point de vue théorique, et s'écrit alors :

$$\text{PBJ}[x \cdot x; t, \omega] = \int \frac{h(\tau)}{|\tau|} \left\{ \int_{-|\tau|/2}^{|\tau|/2} x(t+u+\tau/2) \cdot x^*(t+u-\tau/2) du \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Et sa version discrète, obtenue en suivant la même démarche que la représentation de Choi-Williams discrète, s'écrit :

$$\text{PBJ}[x \cdot x; t, \theta] = 2 \left\{ h[0] |x[t]|^2 + \sum_{\tau \neq 0} \frac{h[\tau]}{2|\tau|+1} \left\{ \sum_{\mu=-|\tau|}^{\mu=|\tau|} x[t+\mu+\tau] \cdot x^*[t+\mu+\tau] \right\} \right\} e^{-2j\theta\tau}$$

où le facteur  $(2|\tau|+1)$  correspond à la normalisation de la fenêtre rectangulaire discrète.

### 3.3. REPRÉSENTATION PSEUDO BORN-JORDAN MASQUÉE

En utilisant l'idée originale de MM. Choi & Williams, il est possible d'enrichir la classe des RTF vérifiant la conservation des supports en construisant une version pseudo-masquée de la représentation de Born-Jordan. Ceci s'obtient alors en multipliant son noyau caractéristique dans le plan temps-retard par deux fonctions fenêtres :

$$\begin{cases} \Phi_{TR}(v, \tau = 0) = h(0) \cdot g(0) \cdot \delta(v) \\ \Phi_{TR}(v, \tau \neq 0) = \frac{h(\tau) g(v)}{|\tau|} \text{Rect}(v, |\tau|/2). \end{cases}$$

Comme précédemment, si  $g(0) = h(0) = 1$  et  $h'(0) = 0$ , une telle représentation vérifie les propriétés 0, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 16.

Une telle représentation s'exprime alors de façon analogue à la représentation Pseudo Born-Jordan :

$$\text{PBJM}(x \cdot x; t, \omega) = \int \frac{h(\tau)}{|\tau|} \left\{ \int_{-|\tau|/2}^{|\tau|/2} g(v) x(t+v+\tau/2) \cdot x^*(t+v-\tau/2) dv \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

et sa version discrète s'écrit :

$$\text{PBJM}[x . x ; t, \theta] = 2 \left\{ g[0] \cdot h[0] |x[t]|^2 + \sum_{\tau \neq 0} \frac{h[\tau]}{2|\tau|+1} \left\{ \sum_{\mu=-|\tau|}^{\mu=|\tau|} g[\mu] x[t+\mu+\tau] \cdot x^*[t+\mu-\tau] \right\} e^{-2j\theta\tau} \right\}.$$

Il faut noter alors que ces versions modifiées ne se justifient pas par le souhait d'élaborer une version discrète réalisable, puisque seul un lissage en fréquence est nécessaire pour cela, mais par le souhait de réaliser un lissage à deux degrés de liberté de la représentation de Born-Jordan [21], sans perdre les marginales temporelles et la propriété de conservation de supports temporels.

### 3.4. AUTRES REPRÉSENTATIONS CONSERVANT LES SUPPORTS TEMPORELS

Si on adopte cette dernière solution, la largeur de la genêtre  $g$  ne dépend pas de  $\tau$ . Par exemple, on peut prendre une fonction gaussienne paramétrée par sa variance. Mais il est également possible de construire d'autres représentations à noyau de type produit vérifiant la conservation des supports temporels, et qui ne sont pas des versions modifiées de la représentation de Born-Jordan. On va donner deux exemples de telles représentations, correspondant à d'autres choix de filtres à réponse impulsionnelle finie, et donc à d'autres fonctions fenêtres que la fonction rectangulaire. Pour ces deux exemples, ainsi que pour la représentation de Born-Jordan, les raisonnements du paragraphe 2.4 sur la réduction de l'amplitude des termes d'interférence dans le plan des ambiguïtés réalisés par ce type de noyau caractéristique s'appliquent donc également ici.

Comme premier exemple, on peut prendre une fonction triangulaire :

$$\begin{cases} \Phi_{\text{TR}}(v, \tau = 0) = \delta(v) \\ \Phi_{\text{TR}}(v, \tau \neq 0) = \frac{2}{|\tau|} \left( 1 - \frac{2|v|}{|\tau|} \right) \text{Rect}(v, |\tau|/2). \end{cases}$$

Dans le plan des ambiguïtés, le noyau de cette représentation correspond alors au carré du noyau de Born-Jordan, avec une décimation d'un facteur 2 :

$$\Phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) = \text{sinc}^2(\xi\tau/4).$$

Cette nouvelle représentation, que nous avons appelée « Distribution à Noyau de Bartlett », s'écrit donc :

$$\text{DNB}(x . x ; t, \omega) = \int \frac{2}{|\tau|} \left\{ \int_{-|\tau|/2}^{|\tau|/2} \left( 1 - \frac{2|v|}{|\tau|} \right) x(t+v+\tau/2) \cdot x^*(t+v-\tau/2) dv \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

La version discrète s'en déduit simplement :

$$\text{DNB}[x . x ; t, \theta] = 2 \left\{ |x[t]|^2 + \sum_{\tau \neq 0} \frac{1}{|\tau|} \left\{ \sum_{\mu=-|\tau|}^{\mu=|\tau|} \left( 1 - \frac{|\mu|}{|\tau|} \right) x[t+\mu+\tau] \cdot x^*[t+\mu-\tau] \right\} e^{-2j\theta\tau} \right\}.$$

Enfin, pour le deuxième exemple, on utilise une fenêtre de Hanning :

$$\begin{cases} \Phi_{\text{TR}}(v, \tau = 0) = \delta(v) \\ \Phi_{\text{TR}}(v, \tau \neq 0) = \frac{1}{|\tau|} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi v}{\tau} \right) \right] \text{Rect}(v, |\tau|/2). \end{cases}$$

le noyau correspondant dans le plan des ambiguïtés est [27] :

$$\Phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) = \text{sinc}(\xi\tau/2) \frac{1}{1 - \xi^2 \tau^2 / 4\pi^2}.$$

Cette nouvelle représentation, que nous avons appelée « Distribution à Noyau de Hanning », s'écrit donc :

$$\text{DNH}(x . x ; t, \omega) = \int \left\{ \int_{-|\tau|/2}^{|\tau|/2} \frac{1 + \cos(2\pi v/\tau)}{|\tau|} x(t+v+\tau/2) \cdot x^*(t+v-\tau/2) dv \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

La version discrète s'en déduit simplement :

$$\text{DNH}[x . x ; t, \theta] = 2 \left\{ |x[t]|^2 + \sum_{\tau \neq 0} \left\{ \sum_{\mu=-|\tau|}^{\mu=|\tau|} \frac{1 + \cos(\pi\mu/\tau)}{2|\tau|} x[t+\mu+\tau] \cdot x^*[t+\mu-\tau] \right\} e^{-2j\theta\tau} \right\}.$$

Comme pour les représentations proposées au paragraphe 2.4, ces deux représentations montrent que la représentation de Born-Jordan n'est pas l'unique représentation à noyau de type produit, réalisant une réduction des termes d'interférence tout en vérifiant la conservation des supports et les propriétés sur les marginales. Comme cette dernière, elles vérifient les propriétés 0-4, 6-10, 16-17. On peut cependant remarquer que les filtres passe-bas utilisés par ces deux représentations ont une décroissance plus rapide que la fonction rectangle utilisée pour Born-Jordan. Cette meilleure concentration autour de l'origine entraîne alors une meilleure localisation temporelle de ces représentations que l'on a pu vérifier expérimentalement sur des signaux synthétiques. Enfin, il est également possible de construire des versions lissées en fréquence et des versions pseudo-masquées de ces deux représentations. Globalement, ces différentes solutions conduisent alors à des représentations ayant de meilleurs propriétés théoriques que la représentation de Zhao-Atlas-Marks.

## 4. Représentation Pseudo margenau-Hill

### 4.1. DÉFINITION

L'article de MM. Hippenstiél et De Oliveira [5] propose également de généraliser à une famille de noyaux de lissage des résultats déjà connus pour la représentation de Margenau-Hill [22]. Les principales propriétés qu'ils mettent en valeur sont la conservation des valeurs nulles, c'est-à-dire le souhait que la représentation soit nulle aux instants où le signal s'annule, ce qui constitue donc une contrainte plus forte que la conservation des supports, et la rapidité de l'augmentation de la résolution spectrale aux bords des intervalles.

Le point de départ de leur étude est la représentation de Margenau-Hill, elle-même cousine des représentations de Page [13], de Levin [14] et de Rihaczek [15]. La représentation de Margenau-Hill est en effet égale à la partie réelle de cette dernière :

$$\text{MH}(x \cdot x; t, \omega) = \mathcal{R}\{\text{Ri}(x \cdot x; t, \omega)\} = \int \frac{1}{2} \{x(t) \cdot x^*(t - \tau) + x(t + \tau) \cdot x^*(t)\} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

avec  $\text{Ri}(x \cdot x; t, \omega) = x(t) \cdot X^*(\omega) e^{-j\omega t}$ .

Il est alors important de remarquer que cette extraction de la partie réelle de la représentation de Rihaczek ne correspond pas seulement à une opération mathématique permettant d'obtenir une représentation réelle et donc aisément représentable graphiquement, mais possède également une interprétation physique significative. Cette partie réelle correspond en effet à la partie active de la distribution énergétique de Rihaczek, alors que la partie imaginaire correspond à la partie réactive de cette énergie [2, 24].

Ses noyaux caractéristiques s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{TR}}(v, \tau) &= \frac{1}{2} \{\delta(v - \tau/2) + \delta(v + \tau/2)\} \\ \Phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) &= \frac{e^{-j\xi\tau/2} + e^{j\xi\tau/2}}{2} = \cos(\xi\tau/2). \end{aligned}$$

La représentation de Margenau-Hill possède donc également un noyau de type produit, et elle vérifie les propriétés 0-4, 6-10, 16, 17, 18, 19. Cependant, malgré ces nombreuses propriétés, la lisibilité de cette représentation est diminuée par le fait que toutes les fréquences du signal sont présentes à chaque instant. Pour diminuer ces composantes indésirables, et pour étudier les caractéristiques d'une version discrète réalisable de la représentation de Margenau-Hill, les auteurs proposent d'effectuer un lissage spectral de la représentation en introduisant une fonction fenêtre  $h$ . L'expression de cette nouvelle représentation, appelée Pseudo-Margenau-Hill est alors :

$$\text{PMH}(x \cdot x; t, \omega) = \int \frac{h(\tau)}{2} \{x(t) \cdot x^*(t - \tau) + x(t + \tau) \cdot x^*(t)\} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

et sa version discrète s'écrit :

$$\text{PMH}[x \cdot x; t, \theta] = \sum_{\tau} \frac{h[\tau]}{2} \{x[t] \cdot x^*[t - \tau] + x[t + \tau] \cdot x^*[t]\} e^{-j\theta\tau}.$$

L'étude de ses propriétés découle naturellement du calcul de ses noyaux caractéristiques :

$$\Phi_{\text{TR}}(v, \tau) = \frac{h(\tau)}{2} \{\delta(v + \tau/2) + \delta(v - \tau/2)\} \quad \text{et} \quad \Phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) = h(\tau) \cos(\xi\tau/2).$$

Les auteurs démontrent alors que moyennant les conditions habituelles pour des fenêtres de lissage ( $h$  est une fonction réelle paire et  $h(0) = 1, h'(0) = 0$ ), les propriétés 0, 2-4, 6, 7, 9, 16, 18 sont vérifiées. L'utilisation de ce lissage permet donc de réduire les termes d'interférence de la représentation de Margenau-Hill, tout en conservant les propriétés sur les moments temporels et les valeurs nulles du signal.

Si cet ensemble de conditions est vérifié, une conséquence non signalée par les auteurs est que cette représentation s'exprime comme la partie réelle d'une version lissée en fréquence de la représentation de Rihaczek, obtenue en remplaçant dans l'expression de cette dernière la transformée de Fourier par une transformée de Fourier Court-Terme, et appelée représentation Pseudo Rihaczek :

$$\begin{aligned} \text{PMH}(x . x ; t, \omega) &= \Re \{ \text{PRi}(x . x ; t, \omega) \} \\ \text{PRi}(x . x ; t, \omega) &= x(t) \text{FCT}_h^*(x ; t, \omega) e^{-j\omega t} \\ \text{avec } \text{FCT}_h(x ; t, \omega) &= \int x(u) h^*(t-u) e^{-j\omega u} du . \end{aligned}$$

Pour un signal discrétisé, on peut par exemple utiliser l'expression :

$$\text{PMH}[x . x ; t, \theta] = \Re \left\{ x^*[t] \sum_{\mu} h[\mu] x[t + \mu] \cdot e^{-j\theta\mu} \right\} .$$

Cette expression permet alors de fournir une seconde interprétation de l'action de la fenêtre  $h$  : si on examine la représentation de Rihaczek, on peut voir que la localisation temporelle est obtenue par le signal  $x(t)$  et sa localisation fréquentielle par sa transformée de Fourier  $X(\omega)$ . En remplaçant cette dernière par une transformée de Fourier court-terme, la localisation fréquentielle est alors obtenue à partir des valeurs de  $x(u)$  comprises dans un intervalle centré sur l'instant  $t$  d'analyse et délimité par le support de  $h$ , ce qui a pour effet d'améliorer la localisation temporelle de la représentation, mais entraîne alors, comme pour le spectrogramme, une diminution de la localisation fréquentielle, du fait de la convolution de  $X(\Omega)$  qui en résulte :

$$\begin{aligned} \text{PMH}(x . x ; t, \omega) &= \Re \left\{ x(t) \cdot \int x^*(t-u) h(u) e^{-j\omega u} du \right\} \\ &= \Re \left\{ x(t) \cdot \left[ \int X(\Omega) \cdot H^*(\omega - \Omega) e^{j\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} \right]^* \right\} . \end{aligned}$$

Enfin, cette expression présente un intérêt supplémentaire du point de vue théorique : elle montre en effet que le spectrogramme (c'est-à-dire la module carré de la transformée de Fourier court-terme) n'est pas la seule représentation de la classe de Cohen déduite de la transformée de Fourier court-terme et digne d'intérêt. Cette expression montre en effet qu'il est possible d'atteindre l'énergie instantanée et la fréquence instantanée du signal à partir de la transformée de Fourier court-terme, en utilisant la représentation pseudo Margenau-Hill plutôt que le spectrogramme, dont les marginales sont biaisées. Dans le cas notamment de la fréquence instantanée, on obtient en effet :

$$\begin{aligned} \int \omega |\text{FCT}_h(x ; t, \omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} &= \int (\varphi'_x(t-v) + \varphi'_h(v)) |h(v)|^2 \cdot |x(t-v)|^2 dv \\ \int \omega \text{PMH}(x . x ; t, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} &= \varphi'_x(t) \cdot |x(t)|^2 \\ \text{avec } x(t) &= |x(t)| e^{j\varphi_x(t)} \quad \text{et} \quad h(t) = |h(t)| e^{j\varphi_h(t)} . \end{aligned}$$

On verra par la suite que l'on peut encore poursuivre cette possibilité d'atteindre les grandeurs caractéristiques d'un signal à partir de la transformée de Fourier court-terme.

## 4.2. PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION DES VALEURS NULLES

La proposition des auteurs [5] suggère en outre de s'intéresser aux propriétés de conservation des valeurs nulles. Dans certaines applications, il peut en effet être souhaitable de garantir que lorsque le signal est nul à un instant  $t_0$ , sa RTF à cet instant soit nulle pour toutes les fréquences :

$$\text{si } \exists t_0, \quad x(t_0) = 0, \quad \text{alors } \forall \omega, \quad \text{RTF}(x . x ; t_0, \omega) = 0 .$$

Si la RTF est nulle à cet instant pour toutes les fréquences, sa fonction d'autocorrélation instantanée associée est nécessairement nulle pour toutes les valeurs du retard  $\tau$  :

$$(\forall \omega, \text{RTF}(x \cdot x; t_0, \omega) = 0) \Leftrightarrow \left( \forall \tau, \text{R}(x \cdot x; t_0, \tau) = \int \phi_{\text{TR}}(u, \tau) x(t_0 - u + \tau/2) \cdot x^*(t_0 - u - \tau/2) du = 0 \right).$$

On en déduit alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour avoir la nullité de  $\text{R}(x \cdot x; t_0, \tau)$  quelle que soit la valeur du signal aux autres instants est que le noyau de lissage s'écrive sous la forme :

$$\phi_{\text{TR}}(v, \tau) = h_1(\tau) \delta(v + \tau/2) + h_2(\tau) \delta(v - \tau/2)$$

et

$$\phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) = h_1(\tau) \cdot e^{+j\xi\tau/2} + h_2(\tau) \cdot e^{-j\xi\tau/2}.$$

(Cette condition est bien évidemment suffisante. Pour démontrer qu'elle est nécessaire, on peut utiliser le fait que si un signal donné s'annule à un instant  $t_0$ ,  $x(t_0) = 0$ , alors le signal  $y(t) = x(t) + \delta(t - t_1)$  pour  $t_1 \neq t_0$  s'annule aussi à  $t_0$ . On a alors  $\forall \tau, t_1 \neq t_0, \text{R}(y \cdot y; t_0, \tau) = 0$ , ce qui entraîne nécessairement cette structure du noyau  $\phi_{\text{TR}}$ .)

On peut s'assurer par exemple que le noyau caractéristique de la représentation causale de Page [13], qui vérifie cette propriété, possède bien cette structure :

$$\begin{aligned} P^-(x \cdot x; t, \omega) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left| \int_{-\infty}^t x(u) e^{-j\omega u} du \right|^2 \right] \\ &= 2 \Re \left\{ x(t) \left( \int_{-\infty}^t x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right)^* e^{-j\omega t} \right\}. \end{aligned}$$

Ce qui conduit effectivement à :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{TR}}(v, \tau) &= \delta(v - |\tau|/2) = \Gamma(-\tau) \delta(v + \tau/2) + \Gamma(\tau) \delta(v - \tau/2) \\ \text{où } \Gamma(\tau) &\text{ est l'échelon de Heaviside.} \end{aligned}$$

En prenant par ailleurs deux fonctions égales à  $h(\tau)/2$ , on retrouve alors la représentation pseudo Margenau-Hill, que l'on pourrait donc présenter comme la famille des représentations vérifiant cette propriété 17 et auxquelles on impose également de vérifier les propriétés 2, 3, 4.

De même, si on s'intéresse à la propriété de conservation des valeurs nulles de la transformée de Fourier du signal, duale de la précédente :

$$\text{si } \exists \omega_0, \quad X(\omega_0) = 0, \quad \text{alors } \forall t, \quad \text{RTF}(x \cdot x; t, \omega_0) = 0.$$

En exprimant la RTF dans le plan doppler-fréquence, on obtient alors une condition nécessaire et suffisante analogue à la précédente :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{DF}}(\xi, \Omega) &= G_1(\xi) \cdot \delta(\Omega + \xi/2) + G_2(\xi) \cdot \delta(\Omega - \xi/2) \\ \text{soit } \phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) &= G_1(\xi) \cdot e^{-j\xi\tau/2} + G_2(\xi) \cdot e^{j\xi\tau/2}. \end{aligned}$$

On peut alors remarquer que la représentation de Margenau-Hill vérifie ces deux propriétés, avec  $G_1(\xi) = G_2(\xi) = h_1(\tau) = h_2(\tau) = 1/2$ . Plus précisément, les seules RTF vérifiant ces deux propriétés de conservation des valeurs nulles du signal et du spectre sont la représentation de Rihaczek, son complexe conjugué, sa partie réelle (c.-à-d. Margenau-Hill), sa partie imaginaire (qui n'est pas étudiée car elle ne conserve pas l'énergie), et leurs multiples.

### 4.3. REPRÉSENTATION DE MARGENAU-HILL LISSÉE

A partir de cette contrainte sur le noyau, on peut chercher à construire une famille de représentations temps-fréquence vérifiant la propriété de conservation des fréquences nulles en réalisant à présent un lissage temporel de la représentation de Margenau-Hill, c'est-à-dire en prenant :

$$G_1(\xi) = G_2(\xi) = G(\xi)/2, \quad \text{soit } \phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) = G(\xi) \cdot \cos(\xi\tau/2).$$

On obtient alors la représentation de Margenau-Hill Lissée, égale à :

$$\begin{aligned} \text{MHL}(x \cdot x; t, \omega) &= \frac{1}{2} \iint g(u) \{x(t+u+\tau) \cdot x^*(t+u) + x(t+u) \cdot x^*(t+u-\tau)\} e^{-j\omega\tau} du d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left\{ X(\omega) \left( \int g^*(u) x(t+u) e^{-j\omega u} du \right)^* + X^*(\omega) \left( \int g(u) x(t+u) e^{-j\omega u} du \right) \right\}. \end{aligned}$$

Si la fonction fenêtre  $g$  est réelle paire et si sa transformée de Fourier  $G$  vérifie  $G(0) = 1$  et  $G'(0) = 0$ , la RTF obtenue vérifie alors les propriétés 0, 2-4, 6, 8, 10, 17, 19. Elle correspond alors d'une part à l'ensemble des représentations vérifiant les propriétés 2, 3, 4, 18, et d'autre part à la partie réelle d'une version lissée en fréquence de la représentation de Rihaczek, obtenue en remplaçant dans l'expression de cette dernière le signal par une transformée de Fourier court-terme, et appelée représentation de Rihaczek lissée :

$$\begin{aligned} \text{MHL}(x \cdot x; t, \omega) &= \mathcal{R} \{ \text{RiL}(x \cdot x; t, \omega) \} \\ \text{RiL}(x \cdot x; t, \omega) &= \text{FCT}_g(x; t, \omega) \cdot X^*(\omega). \end{aligned}$$

Pour des signaux discrets, cette expression devient :

$$\text{MHL}[x \cdot x; t, \theta] = \mathcal{R} \left\{ X^*(\theta) \left( \sum_{\mu} g[t - \mu] x[\mu] e^{-j\theta\mu} \right) \right\}, \quad \text{avec } X(\theta) = \sum_t x[t] e^{-j\theta t}.$$

Là encore, cette expression permet de voir l'effet opéré par le lissage temporel de la représentation de Rihaczek : en remplaçant le signal  $x(t)$  par une transformée de Fourier court-terme, la localisation temporelle de cette représentation s'effectue à partir des valeurs de  $X(\Omega)$  avec  $\Omega$  voisin de  $\omega$ , ce qui a pour effet d'améliorer la localisation fréquentielle, mais entraîne nécessairement une diminution de la résolution temporelle, comme on peut le voir en écrivant cette représentation sous ses deux formes équivalentes :

$$\begin{aligned} \text{MHL}(x \cdot x; t, \omega) &= \mathcal{R} \left\{ X^*(\omega) \int X(\omega - \Omega) G^*(\Omega) e^{-j\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} \right\} \\ &= \mathcal{R} \left\{ X^*(\omega) \int x(u) g^*(t - u) e^{-j\omega u} du \right\}. \end{aligned}$$

De plus, cette expression montre également qu'il est possible de construire à partir de la transformée de Fourier court-terme une représentation dont les marginales fréquentielles sont égales à la densité spectrale d'énergie et au retard de groupe, en utilisant une représentation Margenau-Hill lissée et non un spectrogramme. Dans le cas du retard de groupe, on obtient en effet :

$$\begin{aligned} \int_t | \text{FCT}_g(x; t; \omega) |^2 dt &= \int - (\psi'_x(\omega - \Omega) + \psi'_g(\Omega)) |G(\Omega)|^2 \cdot |X(\omega - \Omega)|^2 \frac{d\Omega}{2\pi} \\ \int_t \mathcal{R} \{ \text{FCT}_g(x; t; \omega) \cdot X^*(\omega) \} dt &= - \psi'_x(\omega) \cdot |X(\omega)|^2 \\ \text{avec } X(\omega) &= |X(\omega)| e^{j\psi_x(\omega)} \quad \text{et} \quad G(\omega) = |G(\omega)| e^{j\psi_g(\omega)}. \end{aligned}$$

Les deux versions lissées de la représentation de Margenau-Hill que l'on a présentées ici montrent donc qu'il est possible à partir de la transformée de Fourier court-terme de construire des représentations qui vérifient chacune une partie des propriétés du deuxième groupe. Elles incitent donc à reconsidérer la position de la transformée de Fourier court-terme au sein des représentations temps-fréquence, puisque le spectrogramme classique, que l'on construit usuellement en prenant son module carré, ne permet pas d'atteindre ces propriétés théoriques.

#### 4.4. UTILISATION D'UN DOUBLE LISSAGE DE LA REPRÉSENTATION DE MARGENAU-HILL

La combinaison des deux paragraphes précédents suggère alors assez naturellement de s'intéresser à une version doublement lissée de la représentation de Margenau-Hill, dans le but de réduire l'amplitude de ses termes d'interférence au moyen d'un lissage à deux degrés de liberté. On peut alors envisager une première solution en utilisant une version pseudo-lissée, comme on l'a vu au paragraphe I.3, conduisant alors des noyaux caractéristiques de la forme :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{DR}}(\xi, \tau) &= h(\tau) \cdot G(\xi) \cos(\xi\tau/2) \\ \Phi_{\text{TR}}(v, \tau) &= \frac{h(\tau)}{2} (g(v + \tau/2) + g(v - \tau/2)). \end{aligned}$$

Si  $g$  et  $h$  sont des fonctions réelles paires vérifiant  $G(0) = h(0) = 1$ , la représentation pseudo Margenau-Hill lissée ainsi obtenue vérifie les propriétés 0, 2-4, 6, et est égale à la partie réelle de la représentation pseudo Rihaczek lissée :

$$\begin{aligned} \text{PMHL}(x \cdot x; t, \omega) &= \int \frac{h(\tau)}{2} \left[ \int g(t - u) \{ x(u) x^*(u - \tau) + x(u + \tau) x^*(u) \} du \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \mathcal{R} \{ \text{PRiL}(x \cdot x; t, \omega) \} \end{aligned}$$

$$\text{PRiL}(x . x ; t, \omega) = \iint h(\tau) g(t-u) x(u) x^*(u-\tau) e^{-j\omega\tau} du d\tau .$$

Cette dernière peut également s'écrire à l'aide de deux transformées de Fourier court-terme,

$$\text{PRiL}(x . x ; t, \omega) = \iint \text{FCT}_g(x ; t, \omega - \Omega) . \text{FCT}_h^*(x ; v, \omega) e^{-j\Omega v} dv \frac{d\Omega}{2\pi}$$

mais il semble que, contrairement aux deux versions lissées précédentes, cette dernière expression ne conduise pas à une méthode de calcul intéressante.

Par contre, en remarquant dans les expressions de  $\text{PRi}(x . x ; t, \omega)$  et  $\text{RiL}(x . x ; t, \omega)$  que les termes  $x(t) e^{-j\omega t}$  et  $X(\omega)$  sont les deux cas extrêmes d'une transformée de Fourier court-terme, correspondant à  $h(t) = \delta(t)$  et  $h(t) = 1$ , on peut envisager d'élaborer une autre forme de lissage à deux degrés de liberté de la représentation de Rihaczek en effectuant le produit de deux transformées de Fourier court-terme, donnant alors lieu à deux familles de représentations temps-fréquence de la forme :

$$\begin{aligned} \text{MHS}(x . x ; t, \omega) &= \mathcal{R} \{ \text{RiS}(x . x ; t, \omega) \} \\ \text{RiS}(x . x ; t, \omega) &= K_{gh}^{-1} \text{FCT}_g(x ; t, \omega) \text{FCT}_h^*(x ; t, \omega) \\ \text{avec } K_{gh} &= A(h . g ; 0, 0) = \int h(u) . g^*(u) du . \end{aligned}$$

Les deux fonctions fenêtres étant choisies telles que  $K_{gh} \neq 0$ . Comme pour la représentation précédente, la représentation réelle ainsi obtenue vérifie les propriétés 0, 2-4, 6 si  $g$  et  $h$  sont des fonctions réelles paires. En prenant  $g(t) = \delta(t)$ , on retrouve la représentation pseudo Margenau-Hill, et les propriétés 7, 9, 16, 18 sont vérifiées. Si  $h(t) = 1$ , on retrouve cette fois la représentation Margenau-Hill lissée, et les propriétés 8, 10, 17, 19 sont vérifiées. Par contre, la propriété 11 de positivité peut facilement être obtenue en prenant deux fenêtres  $g$  et  $h$  égales, qui correspond en effet à un spectrogramme. Le tableau III présente également ces résultats et permet de comparer les différentes représentations obtenues à partir de la transformée de Fourier court-terme. Cette famille de représentations, d'aspect

Nom	Spectrogramme	Pseudo Margenau-Hill	Margenau-Hill Lissée	Margenau-Hill Spectrogramme
Notation	$S_h(x.x;t,\omega)$	$\text{PMH}_h(x.x;t,\omega)$	$\text{MHL}_g(x.x;t,\omega)$	$\text{MHS}_{gh}(x.x;t,\omega)$
Définition	$ \text{FCT}_h(x;t,\omega) ^2$	$\mathcal{R} \{ x(t) . \text{FCT}_h^*(x;t,\omega) . e^{-j\omega t} \}$	$\mathcal{R} \{ \text{FCT}_g(x;t,\omega) . X^*(\omega) \}$	$\mathcal{R} \{ K_{gh}^{-1} \text{FCT}_g(x;t,\omega) . \text{FCT}_h^*(x;t,\omega) \}$
$\Phi_{DR}(\xi,\tau)$	$A(h.h;\xi,\tau)$	$h(\tau) \cos(\xi\tau/2)$ , $h$ réelle	$G(\xi) \cos(\xi\tau/2)$	$\frac{1}{2} [K_{gh}^{-1} . A(h.g;\xi,\tau) + K_{hg}^{-1} . A(g.h;\xi,\tau)]$
Compatibilité avec l'inversion temporelle	oui si $h$ est paire	oui si $h$ est paire	oui si $G$ est paire	oui si $h$ et $g$ paires
Compatibilité avec la conjugaison complexe	oui si $h$ est réelle	oui si $h$ est paire	oui	oui si $h$ et $g$ paires
conservation de l'énergie	oui si $\int h^2(v) dv=1$	oui si $h(0) = 1$	oui si $G(0)=\int g(v) dv = 1$	oui, par construction
conservation de l'énergie instantanée	non sauf si $h(t) = \delta(t)$ i.e. $S_h(x.x;t,\omega)= x(t) ^2$	oui si $h(0) = 1$	non sauf si $G(\xi) = 1$ i.e. $\text{MHL}_g(x.x;t,\omega)=\text{MH}(x.x;t,\omega)$	non sauf si $G(\xi) = 1$ i.e. $\text{MHS}_{gh}(x.x;t,\omega)=\text{PMH}_h(x.x;t,\omega)$
conservation du Spectre	non sauf si $h(t) = 1$ i.e. $S_h(x.x;t,\omega)= X(\omega) ^2$	non sauf si $h(t)=1$ i.e. $\text{PMH}_h(x.x;t,\omega)=\text{MH}(x.x;t,\omega)$	oui si $H(0)=1$	non sauf si $h(t) = 1$ i.e. $\text{MHS}_{gh}(x.x;t,\omega)=\text{MHL}_g(x.x;t,\omega)$
conservation de la fréquence instantanée	non	oui si $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$	non sauf si $H(\xi) = 1$ i.e. $\text{MHL}_g(x.x;t,\omega)=\text{MH}(x.x;t,\omega)$	non sauf si $G(\xi) = 1$ i.e. $\text{MHS}_{gh}(x.x;t,\omega)=\text{PMH}_h(x.x;t,\omega)$
conservation du retard de groupe	non	non sauf si $h(t) = 1$ i.e. $\text{PMH}_h(x.x;t,\omega)=\text{MH}(x.x;t,\omega)$	oui si $G(0)=1$ et $G'(0)=0$	non sauf si $h(t) = 1$ i.e. $\text{MHS}_{gh}(x.x;t,\omega)=\text{MHL}_g(x.x;t,\omega)$
positivité	oui, par construction	?	?	non sauf si $h(t) = g(t)$ i.e. i.e. $\text{MHS}_{gh}(x.x;t,\omega)=S_h(x.x;t,\omega)$

Tableau III. — Comparaison entre les représentations obtenues à partir de la transformée de Fourier Court-Terme

très simple, englobe donc notamment les spectrogrammes, la représentation de Margenau-Hill et ses deux versions lissées en temps et en fréquence, ainsi que la représentation de Page. En prenant alors deux fonctions fenêtres « intermédiaires » entre l'impulsion et la constante, la représentation obtenue, appelée Margenau-Hill-Spectrogramme, réalise un compromis entre les propriétés de positivité et de conservation des marginales et des valeurs nulles. Enfin, en remarquant que la représentation appelée Rihaczek-Spectrogramme peut s'écrire sous la forme :

$$\text{RiS}(x \cdot x; t, \omega) = \iint \mathbf{K}_{gh}^{-1} g^*(t-v) \cdot \mathbf{H}(\omega - \Omega) e^{j(\omega - \Omega)(t-v)} \text{Ri}(x \cdot x; v, \Omega) \cdot dv \frac{d\Omega}{2\pi}$$

on peut voir que cette représentation correspond à un double lissage de la représentation de Rihaczek utilisant un noyau de lissage de module séparable. Elle joue donc un rôle vis-à-vis de la représentation de Rihaczek analogue à la représentation pseudo Wigner-Ville lissée vis-à-vis de la représentation de Wigner-Ville : toutes deux réalisent une réduction de l'amplitude des termes d'interférence d'une représentation, par un double lissage dont l'utilisateur peut adapter facilement les caractéristiques en fonction du signal analysé. Il semble cependant que la façon dont ce double lissage conduit à un rapprochement vers la positivité soit plus facilement compréhensible pour la version doublement lissée de la représentation de Rihaczek.

#### 4.5. GÉOMÉTRIE DES INTERFÉRENCES DE LA REPRÉSENTATION DE MARGENAU-HILL

Pour terminer cette dernière partie, on va revenir brièvement à la représentation pseudo Margenau-Hill, et s'intéresser à la géométrie de ses termes d'interférence. Contrairement à l'affirmation des auteurs [5], cette représentation peut présenter des termes d'interférence non négligeables, comme de nombreuses représentations de la classe de Cohen [25]. L'étude de la localisation dans le plan temps-fréquence de ces termes, permettant de savoir les distinguer des zones de localisation de l'énergie de chaque composante du signal, constitue alors une étape indispensable entre l'étude mathématique de cette représentation et l'analyse temps-fréquence expérimentale qu'elle permet d'effectuer pour des signaux « réels ».

Comme la représentation pseudo Margenau-Hill, dans les conditions précédemment citées, est égale à la partie réelle de la représentation pseudo Rihaczek, la géométrie de ses interférences va donc se déduire de celle de la représentation de Rihaczek. Le lissage spectral ne réalise en effet qu'une atténuation de leur amplitude, sans modifier leur localisation dans le plan temps-fréquence. Une façon simple de montrer la géométrie des termes d'interférence de la représentation de Rihaczek consiste alors [25] à étudier la représentation d'un signal égal à la somme de deux versions translatées et modulées d'un même signal  $x(t)$  dont les localisations moyennes temporelles et fréquentielles sont nulles :

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(t) = x(t - t_1) e^{j\omega_1 t} \quad \text{et} \quad x_2(t) = x(t - t_2) e^{j\omega_2 t}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \text{Ri}(y \cdot y; t, \omega) &= \text{Ri}(x \cdot x; t - t_1, \omega - \omega_1) + \text{Ri}(x \cdot x; t - t_2, \omega - \omega_2) \\ &+ x(t - t_1) \cdot \mathbf{X}^*(\omega - \omega_2) e^{-j[(\omega - \omega_1)t - (\omega - \omega_2)t_2]} \\ &+ x(t - t_2) \cdot \mathbf{X}^*(\omega - \omega_1) e^{-j[(\omega - \omega_2)t - (\omega - \omega_1)t_1]} \end{aligned}$$

Les deux composantes du signal vont donc générer deux termes propres localisés en  $(t_1, \omega_1)$  et  $(t_2, \omega_2)$ , et deux termes d'interférence non confondus localisés en  $(t_1, \omega_2)$  et  $(t_2, \omega_1)$ . Chaque terme d'interférence ajoute donc dans le plan temps-fréquence une composante oscillante localisée au point de croisement de la localisation temporelle de l'une des composantes et de la localisation fréquentielle de l'autre, comme le montre la figure 1.a. Par rapport à la représentation de Wigner-Ville, pour laquelle deux composantes distinctes génèrent une seule interférence localisée au point milieu de leurs localisations temporelles et fréquentielles, cette structure est entièrement différente, et correspond à un cas nettement plus défavorable, dans la mesure où un plus grand nombre de termes d'interférence peut entraîner une plus grande difficulté de lecture et d'interprétation de l'analyse temps-fréquence d'un signal.

De plus, dans le cas où les deux localisations temporelles des composantes sont identiques, les termes d'interférence sont alors superposés aux termes propres. L'utilisation de la représentation de Rihaczek et de sa version lissée en fréquence semble donc peu conseillée pour des signaux présentant plusieurs composantes simultanées. On peut alors remarquer en exprimant un signal réel (non complexe) en fonction de son signal analytique associé [9],

$$x(t) = \frac{1}{2} [x_a(t) + x_a^*(t)]$$

que ce signal correspond à une situation de ce type, puisque le signal analytique et son conjugué ont bien évidemment des localisations temporelles identiques et des localisations spectrales symétriques par rapport à l'axe des temps. Chaque

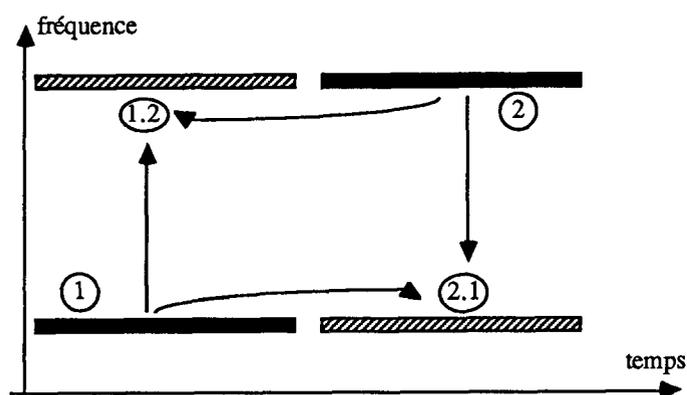


Figure 1.a : Localisation des interférences entre deux composantes.

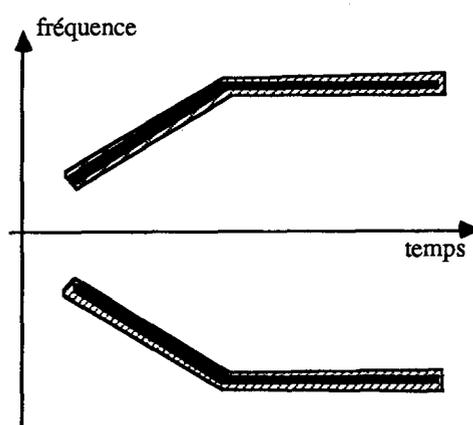


Figure 1.b : Cas du signal réel.

termes propres  
 termes d'interférence

Figure 1. — Géométrie des interférences des représentations du type Rihaczek.

terme propre de la représentation de Rihaczek sera donc superposé à un terme d'interférence, comme le montre la figure 1.b. L'utilisation du signal analytique nous semble donc, contrairement à l'opinion des auteurs [5], tout autant conseillée pour la représentation pseudo Margenau-Hill que pour les autres représentations temps-fréquence.

Enfin, la localisation des termes d'interférence de ces représentations peut être effectuée de façon plus générale en cherchant pour ces dernières des expressions analogues à la formule des interférences externes de Janssen [1, 25]. Cette méthode permet en effet de construire point par point la localisation des termes d'interférence d'un signal en exprimant le module carré de la représentation croisée de deux composantes en fonction de chaque composante prise individuellement. Pour les différentes versions lissées de la représentation de Rihaczek, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 |\text{Ri}(x_1, x_2; t, \omega)|^2 &= |x_1(t)|^2 \cdot |X_2(\omega)|^2 \\
 |\text{PRi}(x_1, x_2; t, \omega)|^2 &= |x_1(t)|^2 \cdot |\text{FCT}_h(x_2; t, \omega)|^2 \\
 |\text{RiL}(x_1, x_2; t, \omega)|^2 &= |\text{FCT}_g(x_1; t, \omega)|^2 \cdot |X_2(\omega)|^2 \\
 |\text{RiS}(x_1, x_2; t, \omega)|^2 &= |K_{gh}^{-1}|^2 \cdot |\text{FCT}_g(x_1; t, \omega)|^2 \cdot |\text{FCT}_h(x_2; t, \omega)|^2.
 \end{aligned}$$

Ces expressions permettent alors non seulement de retrouver le résultat précédent, en localisant les termes d'interférence de la représentation de Rihaczek dans les zones du plan temps-fréquence où le produit de l'énergie instantanée de l'une des composantes par la densité spectrale de l'autre est non négligeable, mais également de justifier la réduction de l'amplitude des termes d'interférence de la représentation de Rihaczek réalisée par ces différentes versions lissées, en montrant que ces dernières conduisent à remplacer dans l'expression du module de ce produit croisé l'énergie instantanée ou la densité spectrale d'une des composantes par un spectrogramme. Elles permettent également à l'utilisateur de déterminer, en fonction du signal analysé, la largeur des fenêtres qu'il convient de choisir pour obtenir une analyse temps-fréquence facilement déchiffrable.

## Conclusion

Le travail présenté ici avait pour but de présenter quelques résultats supplémentaires sur des représentations temps-fréquence proposées récemment. Pour cela, on a d'abord resitué celles-ci dans le cadre général des représentations de la classe de Cohen, ce qui nous a permis alors d'effectuer une présentation homogène de ces nouvelles représentations, et de déterminer une liste de propriétés théoriques qui constitue pour celles-ci un ensemble significatif de critères de jugement et de comparaison.

Cette étude a alors permis de faire apparaître une certaine identité des raisonnements conduisant à l'élaboration des différents éléments de cette classe : on a pu montrer par exemple que les représentations de Choi-Williams et de Born-Jordan étaient toutes les deux motivées par le souhait de réduire les termes d'interférence tout en conservant les propriétés sur les marginales. On a alors présenté d'autres représentations du même type, montrant ainsi la richesse de ce raisonnement.

On a montré également que, de même que la représentation de Wigner-Ville peut être présentée comme l'unique élément de la classe de Cohen vérifiant un ensemble de propriétés théoriques [1], les différentes versions lissées de la représentation de Rihaczek peuvent être construites par un raisonnement théorique à partir des propriétés de conservation des valeurs nulles et en rajoutant d'autres propriétés simples. Ces résultats ont également conduit à agrandir la famille des représentations construites à partir de la transformée de Fourier court-terme, resituant ainsi le spectrogramme au sein d'une famille assez vaste.

Enfin, on a vu également que les différentes versions modifiées des représentations étudiées ici permettent généralement de conserver certaines de leurs propriétés fondamentales que sont par exemple les marginales, la conservation des supports ou des valeurs nulles. Ces différentes remarques soulignent donc le caractère homogène et structuré de la classe de Cohen, dont on a donné ici un rapide panorama dans le cadre des signaux déterministes, mais dont il faut aussi rappeler le bien-fondé de son utilisation pour des signaux aléatoires [1, 17, 18, 19]. La figure 2 représente alors de façon symbolique la plupart des éléments connus de cette classe, en reliant ceux-ci aux conditions fortes sur lesquelles ils s'appuient. Cette figure permet alors de voir que la formulation générale de Cohen constitue un cadre fructueux, pouvant rassembler des éléments très différents, notamment du point de vue de la géométrie des termes d'interférence [25]. Cette multiplicité des représentations temps-fréquence constitue d'après nous un atout majeur de ce type d'outil d'analyse des signaux non stationnaires : grâce aux nombreux degrés de liberté disponibles dans cette formulation, elle permet en effet à un utilisateur de choisir la représentation la mieux adaptée à ses exigences théoriques, à la structure du signal à analyser (en cherchant une représentation dont la géométrie des interférences est adaptée à cette structure [25]), et à la nature du traitement succédant au calcul de la représentation, pouvant aller de la simple visualisation de l'image obtenue jusqu'à des tâches plus complexes [1, 2] d'estimation de paramètres physiques ou de reconnaissance de formes.

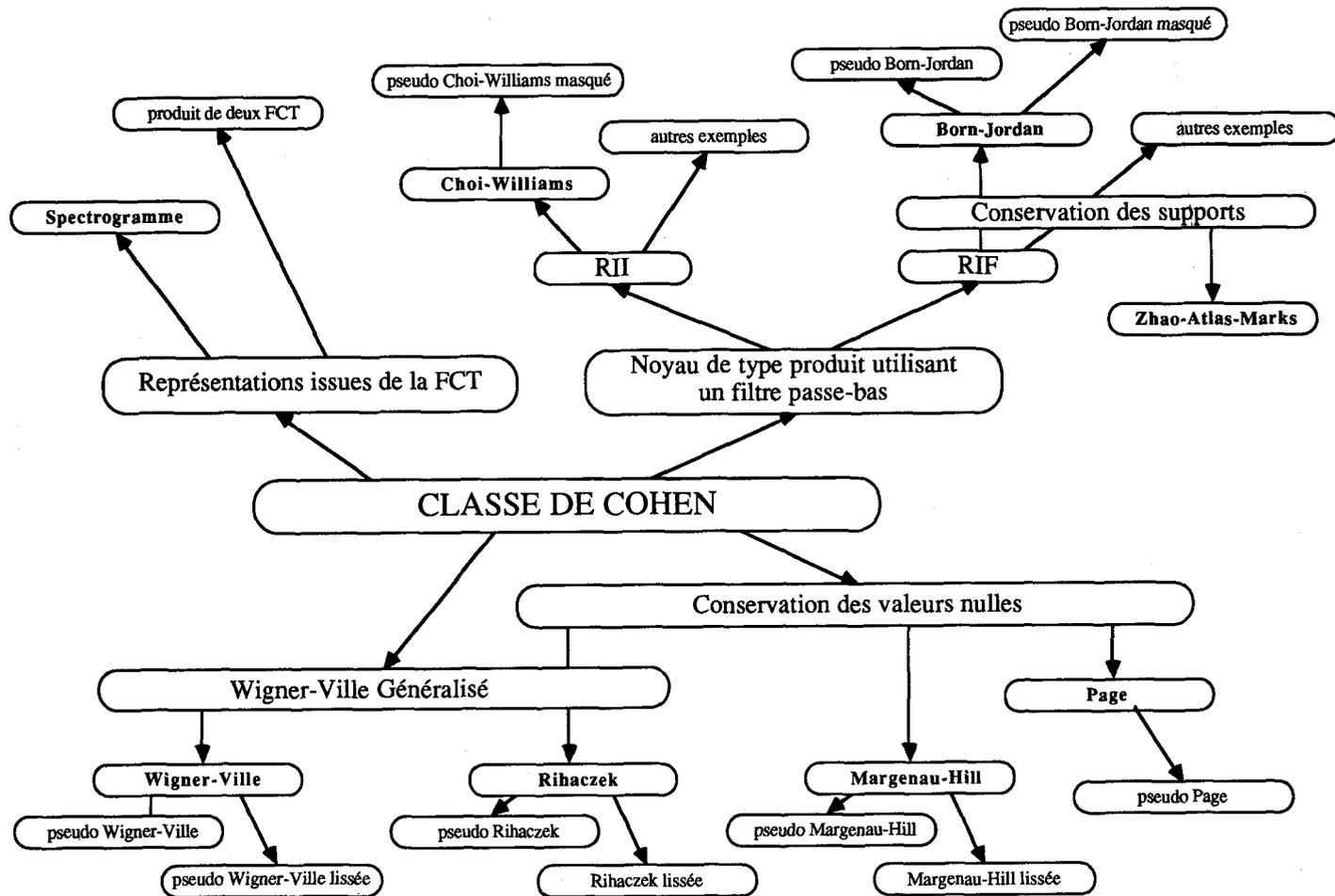


Figure 2. — Représentation schématique des éléments de la classe de Cohen.

Les auteurs tiennent à remercier P. Flandrin pour ses commentaires pertinents sur les premières versions de ce texte, et son activité de coordination du groupe de travail n° 1 du GDR CNRS « traitement du signal et des images ». Ils remercient également les experts pour leurs nombreuses recommandations avisées.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. FLANDRIN, Représentations temps-fréquence des signaux Non-Stationnaires, thèse de doctorat d'état, INPG, 1987.
- [2] L. COHEN, Time-Frequency Distributions — A Review, *Proceedings IEEE*, Vol. 77, No. 7, pp. 941-981, July 89.
- [3] H. I. CHOI, W. J. WILLIAMS, Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels, *IEEE Acoustic Speech and Signal Processing*, Vol. 37, No. 6, pp. 862-871, June 89. Voir aussi : H. I. Choi, W. J. Williams, H. Zaveri, Analysis of Event Related Potentials : Time Frequency Energy Distribution, *Biomedical Scien. Instr.*, Vol. 23, pp. 251-258, 1987.
- [4] Y. ZHAO, L. E. ATLAS, R. J. MARKS, The Use of Cone-Shaped Kernels for Generalized Time-Frequency Representations of Non-Stationary Signals, *IEEE ASSP*, Vol. 38, No. 7, pp. 1084-1091, July 90.
- [5] R. D. HIPPENSTIEL P. M. DE OLIVEIRA, Time Varying Spectral Estimation Using the Instantaneous Power Spectrum (IPS), *IEEE ASSP*, Vol. 38, No. 10, pp. 1752-1759, October 1990. Voir aussi : R. D. Hippenstiel, P. M. de Oliveira, Contributions to time-varying spectrum estimation using the instantaneous power spectrum, *Proc. IEEE ICASSP*, pp. 2093-2096, 1989.
- [6] L. COHEN, Generalized Phase Space Distribution Functions, *J. Math Phys.* Vol. 7, No. 5, pp. 781-786, 1966.
- [7] B. ESCUDIÉ, J. GRÉA, Sur une formulation générale de la représentation en temps et en fréquence dans l'analyse des signaux d'énergie finie, *Comptes Rendus A. S.*, Vol. 283, pp. 1049-1051, 1976.
- [8] E. P. WIGNER, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Phys. Rev.*, Vol. 40, pp. 749-759, 1932.
- [9] J. VILLE, Théorie et applications de la notion de signal analytique, *Câbles et Transmissions*, Vol. 2A, pp. 66-74, 1948.
- [10] S. M. SUSSMAN, Least Squares Synthesis of Radar Ambiguity Functions, *Trans. IRE*, Vol. IT-8, pp. 246-254, 1962.
- [11] M. BORN, P. JORDAN, Zur Quantenmechanik, *Z. Phys.* Vol. 34, pp. 858-888, 1925.
- [12] H. MARGUENAU, R. N. HILL, Correlation between Measurements in Quantum Theory, *Prog. Theor. Phys.* Vol. 26, pp. 772-738, 1961.
- [13] C. H. PAGE, Instantaneous Power Spectra, *J. Appl. Phys.* Vol. 23, pp. 103-106, 1952.
- [14] M. J. LEVIN, Instantaneous Spectra and Ambiguity Functions, *IEEE Trans. on Inf. Theory*, Vol. IT-13, pp. 95-97, 1967.
- [15] W. RIHACZEK, Signal Energy Distribution in Time and Frequency, *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. IT-14, pp. 369-374, 1968.
- [16] T.A.C.M. CLAASEN, W. F. G. MECKLENBRAUKER, The Wigner Distribution — A Tool for Time Frequency Analysis, Part I : *Continuous Time Signals*, Vol. 35, No. 3, pp. 217-250 ; Part II : *Discrete Time Signals*, Vol. 35, No. 4/5, pp. 276-300 ; Part III : *Relations with other Time-Frequency Signal Transformations*, Vol. 35, No. 6, pp. 372-389, Philips Journal of Research, 1980.
- [17] P. FLANDRIN, B. ESCUDIÉ, Principe et mise en œuvre de l'analyse temps-fréquence par la représentation de Wigner-Ville, *traitement du Signal*, Vol. 2, n° 1, pp. 143-151, 1985.
- [18] P. FLANDRIN, W. MARTIN, A General Class of Estimators for the Wigner-Ville Spectrum of Non-Stationary Processes, *System Analysis and Optimization of Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer Verlag, pp. 15-23, 1984.
- [19] W. MARTIN, P. FLANDRIN, Analysis of Non-Stationary Processes : Short-Time Periodograms versus a Pseudo Wigner Estimator, *Eusipco 83*, Shüsser Eds., North Holland.
- [20] P. FLANDRIN, B. ESCUDIÉ, Time and Frequency Representation of Finite Energy Signals : A physical Property as a Result of an Hilbertian Condition, *Signal Processing*, Vol. 2, No. 2, pp. 93-100, April 1980.
- [21] P. FLANDRIN, Some Features of Time-Frequency Representations of multicomponent Signals, *Proc. IEEE ICASSP*, pp. 41, B. 4.1-4, 1984.
- [22] Y. M. ZHU, F. PEYRIN, R. GOUTTE, Transformation de Wigner-Ville discrète simplifiée : versions périodiques et aperiodiques, *Traitement du Signal*, Vol. 7, n° 2, pp. 129-141, 1990.
- [23] P. FLANDRIN, N. MARTIN et al., Fiches Méthodes Temps-Fréquence, Opération Signaux tests du GT1 du GDR CNRS Traitement du Signal et des Images, 1991.
- [24] B. ESCUDIÉ, J. GRÉA, Joint Representation (JR) in Signal Theory (ST) and Hilbertian Analysis : A Powerful Tool for Signal Analysis, *Proc. IEEE ICASSP*, pp. 41.B.6.1-4, 1984.
- [25] F. HLAWATSCH, P. FLANDRIN, The interference structure of Wigner distribution and related time-frequency signal representations, à paraître dans « *The Wigner Distribution — Theory and Applications in Signal Processing* », W. Mecklenbrauker ed., Elsevier Science Publishers, 1991.
- [26] S. M. KAY, S. L. MARPLE, Spectrum Analysis — A Modern Perspective, *Proceedings IEEE*, Vol. 66, No. 11, November 1981.
- [27] J. DUPRAZ, Probabilités, Signaux, Bruits, Eyrolles, 1983.

Manuscrit reçu le 13 février 1991.