

Échantillonnage et ondelettes : la méthode du zero-padding revisitée

Sampling and Wavelets : a New Approach to the Zero-Padding Method



Françoise BROUAYE

École Supérieure d'Électricité
CNRS : Groupe Électromagnétisme-LSS
Plateau du Moulon,
91192 Gif sur Yvette

Professeur de Mathématiques à l'École Supérieure d'Électricité. Après avoir travaillé dans le domaine de la statistique bayésienne empirique dans l'équipe CNRS UA 743 de l'Université Paris-Sud, je travaille maintenant sur des problèmes de traitement du signal provenant notamment de mesures de champs proches rayonnés par des antennes.

RÉSUMÉ

En utilisant des techniques provenant de la théorie des ondelettes, on peut représenter un signal en série de fonctions orthogonales à partir de son échantillonnage lorsque celui-ci est supposé à bande limitée. La méthode du zero-padding peut ensuite être généralisée pour interpoler le signal au pas moitié et débouche sur des algorithmes rapides. Un paragraphe est consacré à des essais sur des fonctions connues.

MOTS CLÉS

Échantillonnage, sur-échantillonnage, ondelettes, interpolation.

ABSTRACT

Using wavelets techniques, one can construct orthogonal expansions for a signal which is sampled, when this signal is a square integrable function and is band-limited. The zero-padding method can be generalized and the signal can be interpolated with this new method through fast algorithms. Numerical results for various known functions are presented.

KEY WORDS

Sampling, over-sampling, wavelets, interpolation.

1. Introduction

Il existe de nombreuses méthodes visant à interpoler un signal, interpolation de Lagrange [8] ou par des fonctions splines par exemple [2], méthode du zero-padding [4]. Quand aux applications elles sont nombreuses en théorie du signal [1, 8]. De telles méthodes peuvent être des outils précieux pour un traitement préalable des données comme c'est le cas, par exemple, pour des mesures du champ électrique rayonné par une antenne : le champ électrique en un point est un vecteur à composantes dans \mathbb{C} ; dans certaines expériences, on mesure le carré d'une composante du champ électrique le long d'un axe, au lieu de mesurer la composante elle-même ; l'interpolation au pas moitié permet ainsi d'avoir plus d'informations sur la composante du champ.

Nous nous intéressons ici au cas où le signal est à spectre limité à un intervalle $[-F, F]$, et échantillonné à un pas Δt

inférieur ou égal au pas de Nyquist $\frac{1}{2F}$. Avec ces hypothèses, on sait que le signal est complètement déterminé par ses valeurs aux points d'échantillonnage, en particulier on peut théoriquement donner sa valeur sur les points multiples du pas moitié. Dans [8], les auteurs ont étudié les performances des filtres à réponse impulsionnelle finie, notamment ceux que l'on obtient par des interpolations de Lagrange. Par ailleurs, on peut interpoler le signal par la méthode dite du zero-padding [4]. Cette méthode est en fait basée sur la décomposition du signal suivant des sinus cardinaux, décomposition donnée par le théorème d'échantillonnage [1]. Dans cet article nous nous intéressons à des décompositions orthogonales du même type que cette dernière :

$$(1) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n \Delta t) \phi(t - n \Delta t)$$

lorsque le pas est strictement inférieur au pas de Nyquist,

et avec une fonction ϕ qui, au lieu d'être un sinus cardinal, est construite grâce aux techniques utilisées dans le domaine des ondelettes.

Pour chaque représentation, on peut ensuite construire un algorithme d'interpolation au pas moitié, qui généralise la méthode du zero-padding.

Les essais ont été effectués sur des fonctions connues à spectre limité à l'intervalle $[-0,5, 0,5]$, et les résultats comparés à ceux obtenus par la méthode du zero-padding.

Dans la suite de l'article, toutes les fonctions considérées seront supposées des fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans \mathbb{C} et de carré intégrable, c'est-à-dire appartenant à l'espace $L^2(\mathbb{R})$. On notera \hat{f} la transformée de Fourier d'une fonction f , définie par

$$(2) \quad \hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\lambda t} dt.$$

2. Représentations par échantillonnage et ondelettes

Soit $s(t)$ un signal de carré intégrable, à spectre limité à l'intervalle $[-F, F]$. On choisit un pas d'échantillonnage Δt inférieur strictement au pas de Nyquist $\frac{1}{2F}$. On peut

alors développer le signal en série de fonctions orthogonales en utilisant les ondelettes. En suivant la méthode décrite par Y. Meyer [6] et R. R. Coifman [3], construisons une fonction $\theta(\lambda)$ réelle continue, mais non nécessairement paire, égale à 1 sur $[-F, F]$, nulle en dehors de $[-a, a]$ et telle que

$$(3) \quad \theta^2\left(\lambda - \frac{1}{\Delta t}\right) + \theta^2(\lambda) = 1$$

si $F \leq \lambda \leq a$ avec $a = \frac{1}{\Delta t} - F$.

On impose à $\theta(\lambda)$ de ne pas s'annuler sur $] -a, a[$. La fonction $\theta(\lambda)$ aura alors l'allure donnée par la figure 1. On

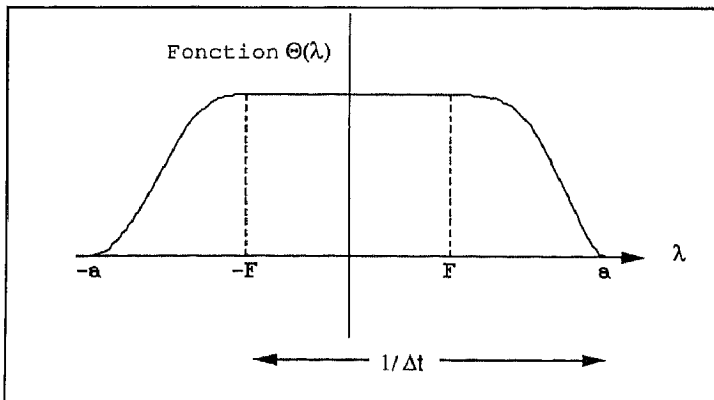


Figure 1.

remarquera que l'intervalle $[-F, a]$ est de longueur $\frac{1}{\Delta t}$.

Si l'on définit le sous-espace V_0 de $L^2(\mathbb{R})$ par (4) :

$$(4) \quad V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / \hat{f}(\lambda) = \theta(\lambda) m(\lambda)\}$$

avec $m(\lambda)$ périodique, de période $\frac{1}{\Delta t}$ }

alors les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ qui sont à spectre limité à l'intervalle $[-F, F]$, appartiennent à V_0 et le sous-espace V_0 a des propriétés intéressantes. En effet, soit f_1 et f_2 deux fonctions qui sont dans V_0 ; on a alors,

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\lambda) &= \theta(\lambda) m_1(\lambda) \\ \hat{f}_2(\lambda) &= \theta(\lambda) m_2(\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}} |\theta(\lambda)|^2 m_1(\lambda) \overline{m_2(\lambda)} d\lambda \\ &= \int_{-F}^F m_1(\lambda) \overline{m_2(\lambda)} d\lambda + \\ &\quad + \int_F^a \left[\theta^2\left(\lambda - \frac{1}{\Delta t}\right) + \theta^2(\lambda) \right] m_1(\lambda) \overline{m_2(\lambda)} d\lambda \end{aligned}$$

soit,

$$(5) \quad \langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-F}^a m_1(\lambda) \overline{m_2(\lambda)} d\lambda.$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont donc orthogonales si et seulement si les fonctions m_1 et m_2 le sont en tant que fonctions périodiques de période $\frac{1}{\Delta t}$. En particulier, en revenant dans le domaine temporel, les fonctions obtenues en prenant $m(\lambda) = e^{2i\pi n \lambda \Delta t}$, sont orthogonales. On définit alors $\phi(t)$ par

$$(6) \quad \hat{\phi}(\lambda) = \Delta t \theta(\lambda).$$

Les fonctions $\phi(t - n \Delta t)$ sont orthogonales et la formule d'échantillonnage de Shannon se généralise comme suit [6] :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n \Delta t) \phi(t - n \Delta t).$$

Les fonctions $\phi(t - n \Delta t)$ ne sont pas à spectre limité à l'intervalle $[-F, F]$ mais seulement $[-a, a]$; on admet donc des « bavures » sur les côtés. Néanmoins cette formule est intéressante car elle permet d'avoir un développement en série de fonctions orthogonales qui décroissent beaucoup plus rapidement que les sinus cardinaux; en effet, plus la fonction $\theta(\lambda)$ est régulière plus la fonction $\phi(t)$ décroît rapidement à l'infini, plus précisément, si $\theta(\lambda)$ est de classe C^k alors $\phi(t)$ est un $o(|t|^{-k})$ à l'infini. Cela nous permet d'avoir une représentation plus localisée dans le domaine temporel. D'autre part, si la fonction réelle $\theta(\lambda)$ n'est pas paire, la fonction $\phi(t)$ n'a pas de raison d'être réelle; nous allons voir que la représentation

est néanmoins suffisante pour interpoler un signal réel ou complexe.

Il est important de remarquer que l'on ne peut pas avoir de représentation (1) avec les fonctions $\phi(t - n \Delta t)$ à la fois orthogonales et à la fois à spectre dans $[-F, F]$; la démonstration est donnée en annexe 1.

L'intérêt d'une décomposition (1) avec des fonctions orthogonales tient au fait que l'on peut alors écrire une formule du type Parseval-Plancherel :

$$\langle f, g \rangle = \|\phi\|^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n \Delta t) \overline{g(n \Delta t)}$$

et que les différents points d'échantillonnage ont des contributions « indépendantes » les unes des autres.

3. Interpolation du signal au pas moitié

3.1. LA MÉTHODE DU ZERO-PADDING

Pour interpoler le signal, on peut soit partir de la formule (1) en l'appliquant aux points t qui sont des multiples impairs de $\frac{\Delta t}{2}$, soit utiliser un changement d'échelle comme c'est le cas dans les analyses multi-résolution [7]. Les deux méthodes sont identiques lorsque le pas est suffisamment proche du pas de Nyquist, plus précisément si $\frac{1}{2F} > \Delta t > \frac{1}{3F}$ (démonstration en annexe 4) et sont alors des généralisations de la méthode du « zero-padding » lorsqu'on les regarde dans le domaine spectral, comme nous allons le voir.

La méthode du zero-padding est une méthode pratique, rapide car on utilise des algorithmes rapides pour calculer les transformées de Fourier discrètes, et qui s'applique à un nombre fini de données : on utilise les valeurs $s(n \Delta t)$ sur N points consécutifs pour calculer $\hat{s}(\lambda)$ en N points de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}\right]$ grâce à une FFT [4] ; on double l'intervalle spectral qui devient $\left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right]$ et en ce qui concerne $\hat{s}(\lambda)$ on rajoute des zéros de chaque côté de l'intervalle initial $\left[-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}\right]$; on a ainsi $2N$ valeurs qui, par FFT inverse, nous permettent d'accéder à $2N$ valeurs approchées de $s\left(n\frac{\Delta t}{2}\right)$: pour n pair on retrouve les valeurs initiales et pour n impair, on trouve les valeurs interpolées. Sur le plan théorique, on écrit

$$\hat{s}(\lambda) = \hat{s}(\lambda) 1_{[-1/(2\Delta t), 1/(2\Delta t)]}(\lambda) \quad \text{sur} \quad \left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right]$$

$$1_{[-1/(2\Delta t), 1/(2\Delta t)]}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{-2i\pi n\lambda \Delta t/2}$$

$$\text{sur} \quad \left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right].$$

Rappelons le développement de $\hat{s}(\lambda)$ en série de Fourier sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}\right]$:

$$(7) \quad \hat{s}(\lambda) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n \Delta t) e^{-2i\pi n\lambda \Delta t}$$

$$\text{sur} \quad \left[-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}\right].$$

On a une formule du même type en remplaçant Δt par $\frac{\Delta t}{2}$.

On obtient alors dans le domaine spectral, sur l'intervalle

$$\left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right] \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n \Delta t/2) e^{-2i\pi n\lambda \Delta t/2} = 2 \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n \Delta t) e^{-2i\pi n\lambda \Delta t} \right] \\ \times \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{-2i\pi n\lambda \Delta t/2} \right]$$

ce qui donne dans le domaine temporel, la formule de filtrage suivante :

$$s(n \Delta t/2) = 2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} s(p \Delta t) \gamma_{n-2p}.$$

Dans cette formule de filtrage, $2\gamma_n$ est la valeur prise par le sinus cardinal $\frac{\sin(\pi t/\Delta t)}{\pi t/\Delta t}$ au point $n \Delta t/2$. Les coefficients γ_n décroissent lentement vers 0 et c'est pour cette raison que l'on préfère résoudre le problème numériquement dans le domaine spectral.

3.2. LA MÉTHODE DU CHANGEMENT D'ÉCHELLE

Définissons le sous-espace V_1 de $L^2(\mathbb{R})$ comme le sous-espace vectoriel fermé engendré par les fonctions $\phi(2t - n \Delta t)$. On pourrait en fait construire une analyse multi-résolution [7] à partir de la fonction $\theta(\lambda)$ qui serait une analyse de Paley-Littlewood [6], mais ici seul nous intéresse le sous-espace V_1 . Le sous-espace V_0 est inclus dans V_1 (démonstration en annexe 2) et après un calcul dans le domaine spectral, on obtient la formule (8) :

$$(8) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(n\frac{\Delta t}{2}\right) \phi\left[2\left(t - n\frac{\Delta t}{2}\right)\right]$$

lorsque $s(t)$ est à spectre limité à l'intervalle $[-F, F]$; la démonstration est donnée en annexe 3.

D'autre part, on passe de (1) à (8) en utilisant l'inclusion

de V_0 dans V_1 et en développant les fonctions $\phi(t - n \Delta t)$ sur la base $\phi(2t - k \Delta t)$.

$$(9) \quad \phi(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \phi\left[2\left(t - n \frac{\Delta t}{2}\right)\right]$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n \Delta t) \phi(t - n \Delta t)$$

$$= 2 \sum_{n,k} s(n \Delta t) \alpha_k \phi[2t - (2n + k) \Delta t].$$

Posons

$$\tilde{\alpha}_{2n} = s(n \Delta t)$$

$$\tilde{\alpha}_{2n+1} = 0.$$

On a alors,

$$(10) \quad (\tilde{\alpha} * \alpha)_p = \sum_{\substack{n,k \\ 2n+k=p}} s(n \Delta t) \alpha_k.$$

Pour interpoler le signal au pas moitié, on regarde le résultat de cette convolution aux points qui sont des multiples impairs de $\frac{\Delta t}{2}$.

$$(11) \quad s\left[(2p+1) \frac{\Delta t}{2}\right] = 2(\tilde{\alpha} * \alpha)_{2p+1}.$$

En passant dans le domaine des fréquences, la relation (9) s'écrit sous la forme (12) :

$$(12) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \exp\left\{-2i\pi n \frac{\Delta t}{2} \lambda\right\} = \frac{\theta(\lambda)}{\theta\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$$

sur $\left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right]$.

La relation (11) s'écrit elle aussi dans le domaine spectral :

$$(13) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\tilde{\alpha} * \alpha)_n \exp\left\{-2i\pi n \frac{\Delta t}{2} \lambda\right\} =$$

$$= \frac{\theta(\lambda)}{\theta\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n \Delta t) e^{-2i\pi n \lambda \Delta t} \text{ sur } \left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right].$$

Les formules (11) et (8) sont des formules exactes où les indices varient de $-\infty$ à $+\infty$ mais, dans la pratique, on effectue une FFT sur un nombre fini de données et on utilise la formule (13) afin d'avoir des algorithmes de calcul rapides.

4. Applications

4.1. DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

Nous allons interpoler le signal aux points qui sont des multiples impairs de $\frac{\Delta t}{2}$ en utilisant la formule (13); la

formule (11) nécessite de connaître les coefficients α_n que l'on obtient par la formule (9). Or $\theta(\lambda)$ est nulle lorsque $|\lambda| > a$ et, si $\frac{1}{2F} > \Delta t > \frac{1}{3F}$, $\theta\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ est égale à 1 lorsque $|\lambda|$ est compris entre F et a , d'où la formule (14) dans ce cas :

$$(14) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \exp\left\{-2i\pi n \frac{\Delta t}{2} \lambda\right\} = \theta(\lambda) \text{ sur } \left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right].$$

Les coefficients α_n sont donc obtenus en développant la fonction $\theta(\lambda)$ en série de Fourier sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right]$ si $\Delta t > \frac{1}{3F}$, en développant $\frac{\theta(\lambda)}{\theta\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ dans le cas

contraire.

En fait, dans la pratique, une convolution discrète du type (11) est calculée rapidement à l'aide de FFT sauf s'il y a très peu de coefficients α_n non nuls ce qui n'est pas le cas ici; il est donc inutile de calculer explicitement les coefficients α_n , il vaut mieux partir directement de la formule (13), la somme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n \Delta t) e^{-2i\pi n \lambda \Delta t}$ étant calculée de façon approchée, par FFT, sur le nombre N de données dont on dispose en ne retenant que les indices entre $-N/2$ et $N/2 - 1$, et sur les points λ qui sont multiples de $\frac{1}{N \Delta t}$. Comme dans la méthode du zero-

padding, la formule (13) est une formule d'extrapolation du spectre où on double la largeur avant de revenir dans le domaine temporel par une FFT inverse. La méthode d'interpolation issue de la formule (1) écrite aux points t qui sont des multiples de $\frac{\Delta t}{2}$ sera elle aussi traitée numériquement dans le domaine fréquentiel; au lieu de multiplier la fonction $\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} s(n \Delta t) e^{-2i\pi n \lambda \Delta t}$ par la fonction $\frac{\theta(\lambda)}{\theta\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ on doit alors la multiplier par $\theta(\lambda)$ (voir

l'annexe 4) avant de revenir dans le domaine temporel de regarder le résultat pour les multiples impairs de $\frac{\Delta t}{2}$. Ces

deux méthodes sont donc des généralisations de la méthode du zero-padding et nécessiteront la même longueur de FFT; la seule complexité supplémentaire par rapport à la méthode du zero-padding, provient de la multiplication dans le domaine fréquentiel par une fonction fenêtre qui n'est pas rectangulaire. Lorsque $\Delta t < \frac{1}{3F}$ c'est la méthode issue de (1) qui est la plus simple car elle ne nécessite d'évaluer que la fonction $\theta(\lambda)$. Dans la pratique, on est généralement dans le cas $\frac{1}{2F} > \Delta t > \frac{1}{3F}$, et les deux méthodes sont identiques (multiplication par $\theta(\lambda)$ dans le domaine fréquentiel).

Une façon simple de construire une fenêtre $\theta(\lambda)$ qui

satisfait la condition (3) imposée dans le paragraphe 2, et qui soit régulière, consiste à prendre un polynôme $P(\lambda)$ sur l'intervalle $[F, a]$ et d'ajuster sur l'intervalle $[-a, -F]$, plus précisément on peut imposer les conditions suivantes :

$\theta(\lambda)$ est continûment dérivable

$$\begin{aligned} \theta(\lambda) &= 1 && \text{sur } [-F, F] \\ &= P(\lambda) && \text{sur } [F, a] \\ &= \sqrt{1 - P^2\left(\lambda + \frac{1}{\Delta t}\right)} && \text{sur } [-a, -F] \\ &= 0 && \text{en dehors.} \end{aligned}$$

Si le polynôme $P(\lambda)$ est de degré 3, il est complètement déterminé [2] par les conditions $P(F) = 1$, $P(a) = P'(a) = P'(F) = 0$ et on obtient,

$$(15) \quad P(\lambda) = 2 \frac{(\lambda - F)^3}{(a - F)^3} - 3 \frac{(\lambda - F)^2}{(a - F)^2} + 1$$

mais la fonction $\theta(\lambda)$ n'est pas continûment dérivable (à cause du point $\lambda = -F$). Néanmoins la fonction $\theta_1(\lambda)$ ainsi construite, qui est continue, donne déjà de bons résultats. Si on veut satisfaire la condition de dérivabilité, on choisit un polynôme de degré 5 :

$$(16) \quad P(\lambda) = - \frac{(\lambda - a)^2}{(F - a)^5} \times [4(\lambda - F)^3 + 3(\lambda - F)^2(a - F) + 2(\lambda - F)(a - F)^2 + (a - F)^3].$$

On appelle $\theta_2(\lambda)$ la fenêtre (continûment dérivable) construite à partir de ce polynôme.

D'autre part, Lemarié et Meyer [5] ont montré que l'on pouvait construire une fonction indéfiniment dérivable satisfaisant la condition (3), à l'aide d'une fonction $w(t)$ impaire et indéfiniment dérivable en prenant $\sin\left[\frac{\pi}{4}(1 + \sin(w(t)))\right]$. La construction de $w(t)$ est numériquement difficile et l'on se contentera d'une fonction continûment dérivable jusqu'à un certain ordre. Par exemple, si on remplace $w(t)$ par $\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ on obtient la

fonction $\beta(t) = \sin\left[\frac{\pi}{4}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)\right]$ qui fait passer de la valeur 0 en $t = -1$ à la valeur 1 en $t = +1$. La dérivée seconde de la fonction β s'annule en $t = +1$ mais ne s'annule pas en $t = -1$. La fenêtre construite à l'aide de cette fonction est notée $\theta_3(\lambda)$; au lieu d'être un polynôme, $P(\lambda)$ est donné par la formule (17) :

$$(17) \quad P(\lambda) = \sin\left[\frac{\pi}{4}\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{2\lambda - (a + F)}{a - F}\right)\right)\right].$$

Les fonctions $\theta_2(\lambda)$ et $\theta_3(\lambda)$ sont de classe C^1 ; la dérivée seconde de $\theta_3(\lambda)$ est discontinue en $\lambda = \pm a$, alors que celle de $\theta_2(\lambda)$ est discontinue en $\lambda = \pm a$ et $\lambda = +F$. Dans les deux cas la fonction $\phi(t)$ construite est en $o(|t|^{-2})$ à l'infini.

On peut augmenter l'ordre de régularité, en prenant par

exemple $w(t)$ impaire vérifiant $w'(t) = A(t^2 - 1)^4$ et $w(1) = 1$, et $P(\lambda)$ donné par la formule (18) :

$$(18) \quad P(\lambda) = \cos\left[\frac{\pi}{4}\left(1 + w\left(\frac{2\lambda - (a + F)}{a - F}\right)\right)\right].$$

On notera $\theta_4(\lambda)$ la fenêtre de classe C^3 ainsi obtenue.

4.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans la pratique, on a une information plus ou moins précise sur la largeur du spectre et on sait que le signal est dans une bande de fréquences connue, sans nécessairement connaître la largeur exacte à l'intérieur de cette bande. Les essais ont été effectués en échantillonnant les fonctions

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \\ f_2(t) &= \frac{\sin(0,8111 \pi t)}{0,8111 \pi t}, \\ f_3(t) &= \frac{\sin(\pi(t - 0,8))}{\pi(t - 0,8)} + \frac{\sin(\pi(t + 0,8))}{\pi(t + 0,8)}, \\ f_4(t) &= \frac{\sin(0,5 \pi t)}{0,5 \pi t} \end{aligned}$$

sur $[-n \Delta t, (n - 1) \Delta t]$ avec 128 points d'échantillonnage, un pas Δt choisi égal à 0,92 et $F = 0,5$.

Il faut donc, pour chaque essai, effectuer une FFT sur 128 points, doubler la longueur et effectuer la multiplication par la fonction par la formule (13) avant de faire une FFT inverse sur 256 points.

Pour ces fonctions qui sont toutes à spectre limité à l'intervalle $[-0,5, 0,5]$, on a comparé les valeurs interpolées aux valeurs exactes, aux points qui sont multiples impairs du pas moitié. Les calculs ont été effectués à l'aide du logiciel Mathematica de Wolfram Research Inc., sur Macintosh SE/30; tous les calculs y sont effectués avec 19 chiffres significatifs.

Sur les figures 2 et 3, on compare la méthode du zero-

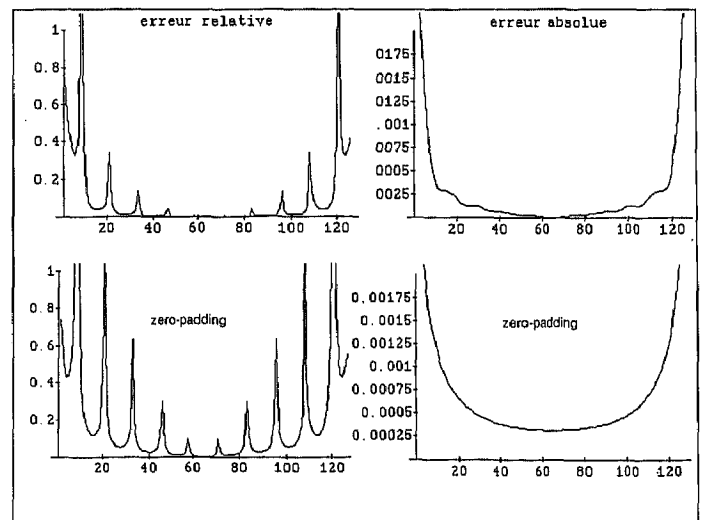


Figure 2. — Fonction n° 1, fenêtre $\theta_1(\lambda)$.

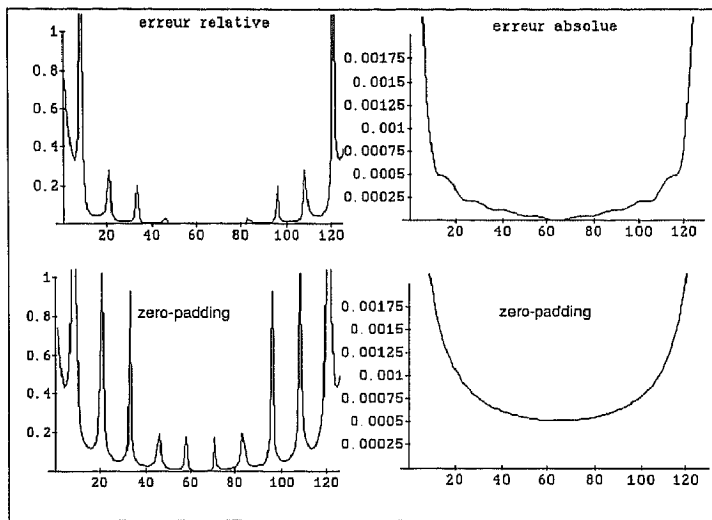


Figure 3. — Fonction n° 3, fenêtre n° 1.

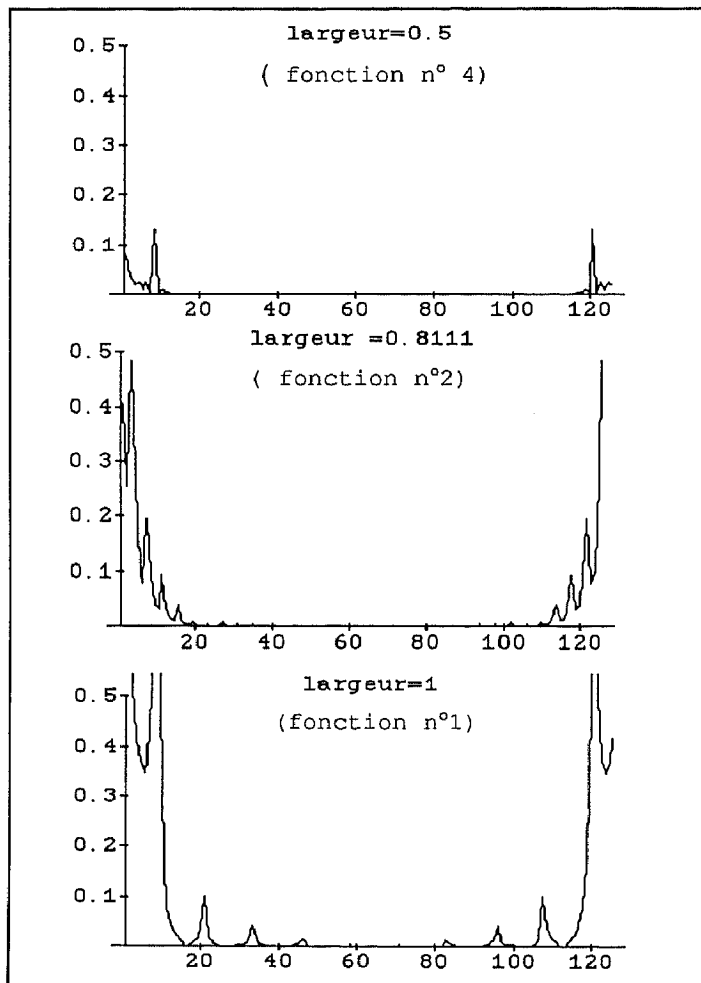


Figure 4. — Erreur relative avec la fenêtre n° 3.

padding avec la méthode ondelette associée à la fenêtre $\Theta_1(\lambda)$ pour la fonction n° 1 (fig. 2) et la fonction n° 3

(fig. 3) en représentant à gauche l'erreur relative et à droite l'erreur absolue. On constate que la méthode ondelette apporte une nette amélioration bien que la fonction ne soit pas dérivable partout. D'autre part, on sait que la méthode du zero-padding provoque des effets de bord [4]; le même effet existe avec la méthode ondelettes, mais il est moins fort. Les essais effectués avec la fenêtre $\theta_2(\lambda)$ ou avec la fenêtre $\theta_3(\lambda)$ donnent des résultats peu différents, qui améliorent les résultats en obtenus avec $\theta_1(\lambda)$; en ce qui concerne la fenêtre $\theta_4(\lambda)$, les résultats sont encore meilleurs au centre et sur une plus grande zone comme le montre la figure 5; on note toutefois une remontée sur les bords probablement due à la dérivée quatrième.

Sur la figure 4, on a représenté l'erreur relative pour les fonctions f_1, f_2, f_4 de bas en haut et la fenêtre $\theta_3(\lambda)$; pour ces fonctions on a reporté la largeur du spectre, le pas étant toujours égal à 0,92. On constate que plus le signal est à spectre étroit plus la méthode ondelettes donne de bons résultats, la fonction $\theta_3(\lambda)$ couvrant de mieux en mieux le spectre.

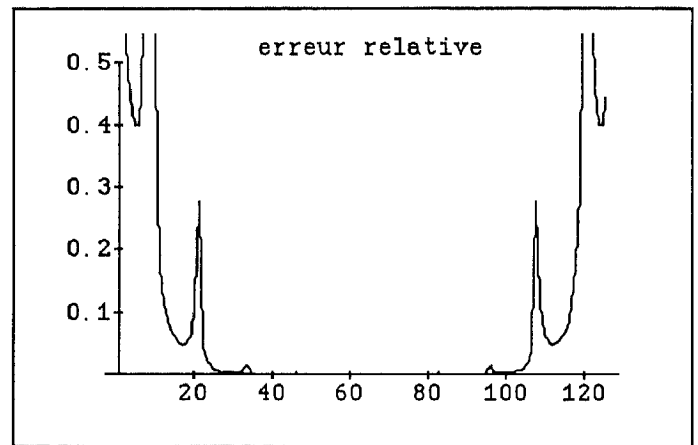


Figure 5. — Fonction f_1 , fenêtre $\Theta_4(\lambda)$.

5. Conclusions

La méthode du zero-padding peut être ré-interprétée à la lumière des analyses multi-résolutions et généralisée en introduisant une fenêtre $\theta(\lambda)$ régulière dans le domaine spectral. En imposant à cette fonction de satisfaire une condition simple, on obtient une décomposition du signal en série de fonctions orthogonales et un algorithme d'interpolation du signal au pas moitié. La décomposition que l'on obtient est plus intéressante que celle donnée par le théorème de Shannon car les fonctions de base sont plus localisées dans le domaine temporel au sens où elles décroissent plus vite vers 0 à l'infini. Il existe de nombreuses fenêtres $\theta(\lambda)$ possibles. Ainsi qu'il est montré dans l'article, il est facile de construire une fonction $\theta(\lambda)$ qui satisfait la condition demandée et qui soit continûment dérivable jusqu'à un ordre voulu; les essais d'interpolation au pas moitié donnent de meilleurs résultats que la

méthode du zero-padding ainsi que le montrent les graphes des erreurs absolues et relatives : les effets de bord sont atténués, les valeurs du signal sont plus fidèlement reconstruites sur une plus grande zone et c'est en augmentant la régularité de la fonction $\theta(\lambda)$ que l'on obtient les meilleurs résultats.

Annexe 1

Soit $\phi(t)$ une fonction de carré intégrable, à spectre limité à l'intervalle $[-F, F]$. Supposons la fonction $\theta(\lambda)$ définie par la relation (6).

$$\begin{aligned} \langle \phi(t - n \Delta t), \phi(t - k \Delta t) \rangle &= \\ &= (\Delta t)^2 \int_{-F}^F |\theta(\lambda)|^2 e^{-2i\pi(n-k)\lambda \Delta t} d\lambda \\ &= (\Delta t)^2 \int_{-F}^{-F+1/\Delta t} |\theta(\lambda)|^2 e^{-2i\pi(n-k)\lambda \Delta t} d\lambda. \end{aligned}$$

Les fonctions $\phi(t - n \Delta t)$ sont orthogonales si et seulement si tous les coefficients de Fourier d'indice non nul de la fonction $|\theta(\lambda)|^2$ sont nuls, c'est-à-dire si $|\theta(\lambda)|^2$ est une fonction constante ce qui contredit le fait que $\theta(\lambda)$ est nulle sur $[F, -F + \frac{1}{\Delta t}]$.

Annexe 2

$$V_0 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) / \hat{f}(\lambda) = \theta(\lambda) m(\lambda) \text{ avec } m(\lambda) \text{ périodique, de période } \frac{1}{\Delta t} \right\}.$$

En passant dans le domaine spectral, on obtient la caractérisation de V_1 .

$$\begin{aligned} V_1 &= \\ &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) / \hat{f}(\lambda) = \theta\left(\frac{\lambda}{2}\right) m(\lambda) \text{ avec } m(\lambda) \text{ périodique, de période } \frac{1}{2\Delta t} \right\}. \end{aligned}$$

Pour montrer l'inclusion de V_0 dans V_1 , il suffit de remarquer que la fonction $\theta\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ ne s'annulant pas sur $\left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right]$, on a l'égalité

$$\theta(\lambda) = \frac{\theta(\lambda)}{\theta\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \theta\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad \text{sur} \quad \left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right].$$

Annexe 3

$$\begin{aligned} s\left(n \frac{\Delta t}{2}\right) &= \int_{-F}^F \hat{s}(\lambda) e^{2i\pi n \lambda \Delta t/2} d\lambda \\ \hat{s}(\lambda) &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(n \frac{\Delta t}{2}\right) e^{-2i\pi n \lambda \Delta t/2} \end{aligned}$$

$$\text{sur} \quad \left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right].$$

La fonction $\theta\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ est égale à 1 sur $[-F, F]$ et on a :

$$\begin{aligned} \hat{s}(\lambda) &= \theta\left(\frac{\lambda}{2}\right) \hat{s}(\lambda) \\ &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(n \frac{\Delta t}{2}\right) \theta\left(\frac{\lambda}{2}\right) e^{-2i\pi n \lambda \Delta t/2}. \end{aligned}$$

En revenant dans le domaine temporel, on retrouve la relation (8).

Annexe 4

$$\begin{aligned} \beta_n &= \phi\left(n \frac{\Delta t}{2}\right) = \int_{-a}^a \Delta t \theta(\lambda) e^{2i\pi n \lambda \Delta t/2} d\lambda \\ &= \Delta t \int_{-1/\Delta t}^{1/\Delta t} \theta(\lambda) e^{2i\pi n \lambda \Delta t/2} d\lambda. \end{aligned}$$

Si Δt vérifie l'inégalité $\frac{1}{2F} > \Delta t > \frac{1}{3F}$, $\theta(\lambda) = \frac{\theta(\lambda)}{\theta\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$

sur $\left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right]$ et $\beta_n = 2 \alpha_n$ de sorte que les deux méthodes sont identiques. Lorsque $\Delta t < \frac{1}{3F}$, les deux méthodes sont différentes ; regardons la méthode issue de la formule (1) dans le domaine spectral, pour comparer avec les formules (11) et (13) utilisées dans la méthode de changement d'échelle.

$$\begin{aligned} s\left(n \frac{\Delta t}{2}\right) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} s(p \Delta t) \beta_{n-2p} \\ s\left(n \frac{\Delta t}{2}\right) &= (\tilde{a} * \beta)_n \text{ avec les notations du paragraphe 3} \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n \Delta t/2) e^{-2i\pi n \lambda \Delta t/2} &= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n \Delta t) e^{-2i\pi n \lambda \Delta t} \right] \times \\ &\quad \times \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n e^{-2i\pi n \lambda \Delta t/2} \right] \\ \hat{s}(\lambda) &= \theta(\lambda) \times m(\lambda) \quad \text{sur} \quad \left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right] \end{aligned}$$

où $m(\lambda)$ est périodique, de période $\frac{1}{\Delta t}$ et égale à $\hat{s}(\lambda)$ sur $\left[-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}\right]$.

$$\hat{s}(\lambda) = m(\lambda) \frac{\theta(\lambda)}{\theta\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \theta\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad \text{sur} \quad \left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right]$$

car $\theta\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ ne s'annule pas sur $\left[-\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\right]$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. K. BOSE, *Digital filters, Theory and applications*. Éd. North Holland.
- [2] CIARLET, *Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation*. Éd. Masson.
- [3] R. R. COIFMAN et Y. MEYER, *Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre*. Série I, C.R.A.S., Paris 1991, pp. 256-261.
- [4] L. B. JACKSON, *Digital Filters and signal processing*. Kluwer Academic Publishers.
- [5] P. G. LEMARIÉ et Y. MEYER, *Ondelettes et bases hilbertiennes*. Rev. Mat. Iberoamericana, vol. 2, 1986, p. 1, 18.
- [6] Y. MEYER, *Ondelettes et opérateurs*, vol. 1, Ed. Hermann.
- [7] S. MALLAT, *A theory of multi-resolution signal decomposition : the wavelet decomposition*. IEEE PAMI 11 (7) 1989, p. 674, 693.
- [8] R. N. SCHAFER, L. R. RABINER, *A digital signal processing approach to interpolation*. Proc. IEEE, vol. 61, pp. 692-702, June 1973.

Manuscrit reçu le 22 juillet 1991.