

Filtrage d'ordre, vraisemblance et optimalité des prétraitements d'image

Order Filters, Likelihood and Optimality of Image Processing Operators



Philippe BOLON

Laboratoire d'Automatique et MicroInformatique Industrielle LAMII - Université de Savoie
BP 806 - F.74016 Annecy Cedex
(CNRS GdR 134 - Traitement du Signal et Image)

Ingénieur Électricien (INPG 1978), puis Docteur-Ingénieur (INPG 1981), Ph. Bolon a été assistant à l'ENSIEG de 1980 à 1983. Maître de Conférences à l'Université de Savoie depuis 1984, il a contribué au démarrage d'une activité de recherche en vision par ordinateur et traitement d'image au sein de la Faculté Annécienne des Sciences et Techniques. Les travaux de recherche de Ph. Bolon portent sur le développement d'opérateurs locaux non linéaires pour le prétraitement d'image, ainsi que sur l'utilisation de méthodes de géométrie discrète en vision industrielle.

RÉSUMÉ

Les filtres d'ordre sont généralement vus comme des combinaisons linéaires des statistiques d'ordre d'un ensemble d'observations. Prenant en compte la distribution statistique des perturbations, il est possible d'améliorer les performances, en réduction de bruit, par rapport au filtrage linéaire.

Dans cet article nous proposons trois différentes approches pour la mise au point d'opérateurs optimaux : approximation au sens d'un critère de distance non euclidienne, maximum de vraisemblance, estimation bayésienne à variance minimale. Les opérateurs ainsi construits apparaissent comme étant des fonctions non linéaires des statistiques d'ordre (NL-

filtres). Mesurées en terme de réduction de bruit et de préservation des transitions, les performances obtenues sont meilleures qu'avec des filtres linéaires ou des filtres médians. Bien qu'étant étudiés dans un contexte de traitement d'image, ces opérateurs peuvent être utilisés dans des situations de bruits non gaussiens présentant des non-stationnarités fortes.

MOTS CLÉS

Traitement d'image, statistiques d'ordre, filtres d'ordre, réduction de bruit, rehaussement de contraste, bruit non gaussien.

ABSTRACT

Order filters are generally regarded as linear combinations of order statistics. By taking into account the statistical distribution of the noise, it is possible to improve the performances with respect to linear filtering. In this paper, three different approaches are considered in order to develop optimal operators : non euclidean approximation, maximum likelihood, bayesian estimation. The optimal filters turn out to be nonlinear functions of the order statistics (NL-filter). Compared with linear filtering or median filtering, the performances are improved as far as noise reduction and edge preservation are concerned.

Such operators are fitted with image processing. However, they could be of interest in situations of non stationarities and non gaussian noise.

KEY WORDS

Image processing, order statistics, order filters, noise reduction, edge enhancement, non gaussian noise.

1. Introduction

Le travail présenté ici trouve sa justification dans un contexte de traitement d'image, et plus précisément, dans la recherche d'opérateurs de prétraitement permettant de faciliter l'étape de segmentation, préalable à l'analyse d'image. La plupart des méthodes employées en vision par

ordinateur sont basées sur une approche géométrique (reconnaissance de formes) ou structurelles (recherche de relations entre objets). Cependant, lorsque l'on veut appliquer ces méthodes à des images réelles, l'on est confronté aux problèmes de bruit d'image, qu'il faut atténuer par filtrage, sans affecter la forme des structures observées.

Une littérature abondante (voir notamment [25]) sur les

opérateurs, linéaires ou non, disponibles en traitement d'image a été publiée. Une part importante concerne le filtrage médian [32] [13] et ses nombreuses variantes (récuratif [2] [4], multiétage [24] [33], hybride [14], etc...) qui ont la propriété de laisser invariantes les transitions entre régions.

Une image étant idéalement formée de régions homogènes que l'on cherche à localiser et à décrire, nous appellerons bruit d'image tout ce qui vient perturber cette homogénéité. Nous nous plaçons ici dans le cas où les régions sont caractérisées par leur niveau de gris, en excluant le problème de la segmentation de textures. Le bruit est alors généralement perçu comme additif, sans que ses caractéristiques soit nécessairement stationnaires sur toute l'image.

On cherche alors à définir des opérateurs locaux, c'est-à-dire ne faisant appel dans leur fonctionnement, qu'à un faible nombre de pixels, de manière à restreindre les distorsions géométriques et à diminuer la complexité de traitement.

La mise au point d'opérateurs « optimaux » est une tâche qui honore le chercheur. En fait, tout dépend de l'idée que l'on se fait de ce qu'est une image (comment peut-on distinguer une image déterministe d'une réalisation particulière d'un champ aléatoire non stationnaire) et de ce qui paraît être l'objectif à atteindre (quels sont les bons critères ?).

Dans cet article, nous nous intéressons à trois approches du prétraitement d'image. La première est basée sur un critère de distance purement déterministe. La structure des opérateurs qui s'en déduisent permet d'obtenir des traitements efficaces pour des perturbations à caractère impulsionnel ou, au contraire, très régulières et concentrées. La deuxième approche repose sur l'estimation bayésienne. Elle conduit à la mise au point de filtres dont le comportement peut être rendu dépendant du rapport signal à bruit. La troisième approche est basée sur un critère de maximum de vraisemblance. On montre qu'elle englobe la première. Elle permet en particulier de définir des opérateurs ayant à la fois des propriétés de réduction de bruit et de renforcement des contrastes dans les zones de transition entre régions de l'image.

Dans chaque cas, nous montrons que les opérateurs obtenus peuvent être vus comme une extension du filtrage d'ordre usuel non récuratif, qui est lui-même considéré comme une extension du filtrage médian [7]. Nous étudions les propriétés des opérateurs obtenus dans un contexte de traitement d'image. Les propriétés statistiques sont évaluées, classiquement, à l'aide d'un critère d'erreur quadratique. Nous étudions également le comportement de ces opérateurs sur des transitions de type échelon, qui sont le modèle le plus simple de transition entre deux régions. Enfin nous présenterons quelques exemples de traitement d'images réelles.

L'approche adoptée ici permet de définir des opérateurs de traitement dont les propriétés sont proches de celles du filtre médian (préservation des transitions, faible sensibilité à la présence de points aberrants) tout en atténuant ses principaux défauts qui sont la production de stries (ensembles de pixels consécutifs ayant exactement la même

valeur) [8] [26] et les faibles performances en lissage pour des bruits à distribution plus concentrée que la gaussienne. Elle peut être vue comme une extension des travaux de Rice et White [28], Huber [16] ou Kashyap et Eom [19]. Les principales applications des opérateurs présentés concernent le prétraitement d'image. Ils pourraient également constituer des outils appropriés dans des situations de bruits non gaussiens ou en présence de non-stationnarités brusques.

2. Filtres d'ordre

Dans cette partie, nous rappelons le principe de fonctionnement des filtres d'ordre usuels, puis nous en mentionnons quelques propriétés statistiques. Afin d'alléger l'écriture, la présentation des opérateurs sera faite dans le cas de signaux 1D, indexés par un indice de position k .

2.1. DÉFINITION

On désigne par x_k (resp. y_k) l'échantillon à la position k du signal d'entrée (resp. sortie).

Soit X_k l'ensemble des échantillons disponibles dans une fenêtre d'observation centrée à la position k .

Soit $N = \text{card } X_k$ la taille du filtre.

Pour des raisons de symétrie, N est généralement impair. On notera

$$(1) \quad N = 2n + 1.$$

Classiquement, les filtres d'ordre ou L-filtrés [25] sont définis de la façon suivante :

On effectue localement une renumérotation, de 1 à N , des échantillons disponibles. On a alors :

$$(2) \quad X_k = \{x_1, \dots, x_N\}.$$

Les valeurs disponibles sont triées par ordre croissant. On appelle j -ième statistique d'ordre ou statistique d'ordre j , la valeur ayant le rang j dans X_k . Cette valeur sera notée $x_{(j)}$. On a donc :

$$(3) \quad X_k = \{x_{(1)}, \dots, x_{(j)}, \dots, x_{(N)}\},$$

avec

$$\text{mini} = x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(j)} \leq x_{(j+1)} \leq \dots \leq x_{(N)} = \text{maxi}.$$

Soit $\{c_j\}$, $j = 1 \dots N$, un ensemble de coefficients réels. La sortie y_k du L-filtre est donnée par :

$$(4) \quad y_k = \sum_{j=1}^N c_j \cdot x_{(j)}.$$

Le schéma-bloc d'un filtre d'ordre, représenté figure 1, peut donc se décomposer en trois sous-blocs :

— sous-bloc 1 : extraction de N échantillons du signal d'entrée (fenêtre d'observation)

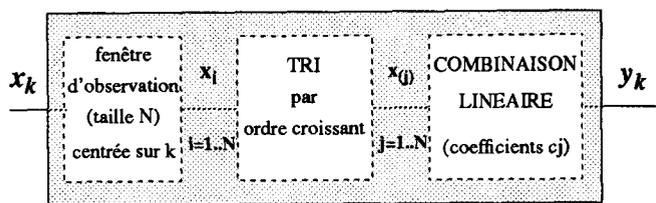


Figure 1. — Schéma bloc d'un filtre d'ordre (L-filtre) x_k : signal d'entrée ; y_k : signal de sortie ; c_j : coefficients du filtre.

— sous-bloc 2 : tri par ordre croissant pour calculer les statistiques d'ordre

— sous-bloc 3 : combinaison linéaire des statistiques d'ordre.

La terminologie n'est toutefois pas totalement figée. L'appellation filtre d'ordre est parfois réservée aux filtres de rang définis par :

$$(5) \quad y_k = x_{(r)}$$

où r est une quantité fixe ou dépendant des données.

On peut également généraliser cette appellation en la faisant désigner un opérateur dont la sortie y_k est définie à l'aide d'une fonction réelle de N variables réelles Φ par : [30]

$$(6) \quad \Phi : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R} \\ x_{(1)}, \dots, x_{(N)} \rightarrow y_k = \Phi(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}) .$$

Dans le schéma de la figure 1, le sous-bloc 3 est alors remplacé par l'évaluation de la fonction Φ .

Ce type d'opérateur peut donc être dénommé NL-filtre, NL faisant allusion au caractère éventuellement non linéaire de la fonction Φ . Nous en verrons quelques exemples dans les paragraphes suivants.

Quelques cas particuliers :

filtre médian : $c_{n+1} = 1, c_j = 0$ pour $j \neq n + 1$.

Ce filtre est très employé en traitement d'image car il a la propriété de laisser invariantes les transitions entre régions.

$$\begin{aligned} \text{filtre milieu :} \quad & c_1 = c_N = 1/2 ; \\ & c_j = 0 \text{ pour } j = 0 \dots N - 1 \\ \text{filtre moyenneur :} \quad & c_j = 1/N \text{ pour } j = 1 \dots N . \end{aligned}$$

Ce filtre est le seul filtre d'ordre appartenant également à la classe des filtres linéaires.

2.2. DISTRIBUTION DES STATISTIQUES D'ORDRE

Nous nous intéressons ici au cas où l'entrée est un bruit blanc, à distribution continue, caractérisée par une fonction de répartition F et une densité de probabilité f . La densité de probabilité du vecteur aléatoire $\mathbf{V} = (X_{(1)}, \dots, X_{(N)})'$ est : [11]

$$(7) \quad f_{(1)\dots(N)}(x_1, \dots, x_N) = \\ = N! f(x_1, \dots, x_N) \text{ pour } x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \\ = 0 \text{ ailleurs .}$$

On peut déterminer facilement la densité marginale de la statistique d'ordre j :

$$(8) \quad f_{(j)}(x) = \frac{N!}{(j-1)! \cdot (N-j)!} \times \\ \times [F(x)]^{j-1} \cdot [1-F(x)]^{N-j} \cdot f(x)$$

ainsi que celle de la densité conjointe des statistiques d'ordre j et p :

$$(9) \quad f_{(j)(p)}(x, y) = C_{jp} \cdot [F(x)]^{j-1} \cdot [F(y) - F(x)]^{p-j-1} \\ \times [1-F(y)]^{N-p} \cdot f(x) \cdot f(y) \\ \text{pour } x \leq y \\ = 0 \\ \text{sinon}$$

avec

$$C_{jp} = \frac{N!}{(j-1)! \cdot (p-j-1)! \cdot (N-p)!} .$$

2.3. OPTIMISATION DES COEFFICIENTS

En utilisant des modèles simples (voire simplistes), il est possible de déterminer un jeu de coefficients optimaux au sens de l'erreur quadratique de sortie.

2.3.1. Zone stationnaire

A l'intérieur d'une région de l'image, nous pouvons modéliser le signal d'entrée du filtre par :

$$(10) \quad X_k = s_k + B_k$$

où s_k est une constante, et B_k un bruit blanc centré ayant une densité de probabilité symétrique autour de l'origine. Au sein de la fenêtre d'observation, les statistiques d'ordre vérifient :

$$(11) \quad X_{(j)} = s_k + B_{(j)}$$

où $B_{(j)}$ est la $j^{\text{ème}}$ statistique d'ordre du bruit.

La sortie Y_k est donc :

$$(12) \quad Y_k = s_k \sum c_j + \sum c_j B_{(j)} .$$

On a alors :

$$(13) \quad E[Y_k] = s_k \sum c_j + \sum c_j \cdot E[B_{(j)}] .$$

Du fait de la symétrie de la distribution du bruit, une condition suffisante pour obtenir un biais nul est :

$$(14) \quad \sum c_j = 1 ; \text{ et } c_{1+j} = c_{N-j} \text{ pour tout } j .$$

La variance de sortie du filtre devient :

$$(15) \quad \text{var } Y_k = \sum \sum c_j E[B_{(j)} B_{(p)}] c_p = \mathbf{c}' \mathbf{R} \mathbf{c}$$

où $\mathbf{c}^t = (c_1, \dots, c_N)$ est le vecteur coefficient et $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_{jp})$ est la matrice de corrélation du bruit ordonné

$$(16) \quad \mathbf{R}_{jp} = \mathbf{E}[\mathbf{B}_{(j)} \mathbf{B}_{(p)}].$$

Par une technique de multiplicateurs de Lagrange [7] [25], on obtient la solution optimale

$$(17) \quad c_{opt} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{e}}{\mathbf{e}^t \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{e}}$$

avec $\mathbf{e}^t = (1, \dots, 1)$.

Le calcul du jeu optimal de coefficients est également possible pour des distributions d'entrée non symétriques. Il fait alors intervenir les valeurs moyennes et les covariances des statistiques d'ordre de la variable aléatoire d'entrée réduite [22].

2.3.2. Quelques exemples de filtres d'ordre optimaux

A l'aide des relations (17), (8) et (9), et en utilisant des techniques d'intégration numérique, il est possible de calculer les coefficients optimaux pour des densités de probabilité d'entrée assez régulières [7]. Pour des bruits gaussiens, on retrouve naturellement que le vecteur optimal est $\mathbf{c} = 1/N \cdot \mathbf{e}$.

Pour un bruit uniforme, le filtre optimal est le filtre milieu [22]. Pour un bruit à distribution exponentielle, de densité de probabilité donnée par (18) :

$$(18) \quad f_B(x) = C \exp(-K \cdot |x|)$$

le filtre optimal tend à se rapprocher du filtre médian quand la taille du filtre augmente [7]. Ceci tient au fait que la médiane est l'estimateur du maximum de vraisemblance, asymptotiquement efficace [9].

2.3.3. Zone non stationnaire

L'hypothèse d'un signal utile constant à l'intérieur de la fenêtre d'observation n'est naturellement plus valide dans les zones de transition correspondant aux frontières entre régions. Dans cette situation, il est encore possible de déterminer un jeu de coefficients optimaux. Le principal inconvénient est que ce calcul fait explicitement appel aux valeurs du signal utile s_k , qui sont les quantités que l'on veut estimer. On peut toutefois se restreindre à certaines classes d'entrées typiques de ce que l'on peut rencontrer au voisinage de frontières entre régions (échelons, rampes, ...) et minimiser l'erreur quadratique moyenne dans une zone située de part et d'autre de la frontière [23]. Les performances du L-filtre ainsi calculé sont relativement peu sensibles à des variations de s_k , ce qui le rend applicable même si l'on n'a qu'une connaissance imparfaite de ce signal.

2.4. QUELQUES REMARQUES

En tant qu'opérateurs de filtrage, les filtres d'ordre présentés ci-dessus (L-filtres) sont du type non récursif. Le principal avantage est que, dans leur calcul, et contrairement au cas des filtres linéaires, il est tenu compte de la distribution statistique du signal d'entrée. Il en résulte que

les performances du filtre d'ordre optimal, mesurées en terme de variance de sortie du filtre, sont toujours supérieures ou égales à celles du filtre linéaire optimal (moyenneur) [22]. Lorsqu'elles sont égales, ce qui se produit quand l'entrée suit une loi gaussienne ou gamma [11], le filtre d'ordre optimal est le filtre moyenneur.

D'un point de vue pratique, il est difficile de connaître avec exactitude la distribution statistique du signal d'entrée. Cependant, ce problème n'est pas trop aigu si l'on peut avoir une idée, même approximative de cette loi, et en particulier de l'allure des queues de distribution, caractérisable par le coefficient de kurtosis [31]. En effet, si l'on définit une suite de bruits blancs d'entrée X^m , ayant pour fonction de répartition F_m et pour densité de probabilité f_m , convergeant en loi vers X , de fonction de répartition F et de densité de probabilité f , alors la suite des vecteurs de coefficients optimaux calculés $\mathbf{c}_{m, opt}$ converge vers \mathbf{c}_{opt} (Annexe 1). Ainsi, même si l'on ne connaît pas parfaitement la loi de l'entrée, le filtre que l'on calculera sera proche du filtre optimal.

La loi de l'entrée étant fixe, mais pas forcément connue avec exactitude, la variance de sortie du filtre ne sera pas minimale si l'on n'utilise pas les coefficients optimaux. Cependant, d'après (15), l'application qui au vecteur de coefficients associe la variance de sortie est continue. Donc si le vecteur de coefficients utilisé est dans un voisinage du vecteur optimal, la variance de sortie ne sera pas trop différente de la variance minimale.

Enfin, et pour des raisons de robustesse, on pourra imposer aux coefficients du filtre d'ordre d'être tous positifs. La conséquence est que le domaine de variation de la sortie du filtre est inclus dans celui de l'entrée. On évite ainsi tout effet d'amplification du bruit dû à un mauvais calcul des coefficients.

Les performances d'un filtre d'ordre dépendent du choix des coefficients, c'est-à-dire de l'importance que l'on accorde à chacune des statistiques d'ordre. Ce poids dépend de la distribution statistique de l'entrée. Ceci se retrouvera avec les structures de filtre, généralement de type NL, qui vont être maintenant présentées.

3. Filtrage d'image vu comme un problème d'approximation

Étant donné un ensemble d'observations, que l'on suppose issues d'une même région de l'image, on décide d'attribuer au pixel central la valeur représentant « au mieux » l'ensemble des observations.

Après avoir introduit une famille de critères d'optimalité de type distance, nous établirons le lien entre les opérateurs de traitement obtenus et le filtrage d'ordre (L-filtre et NL-filtre) puis nous en étudierons quelques propriétés statistiques et déterministes.

L'utilisation, pour le lissage, de normes autres que la norme euclidienne avait déjà été proposée par Rice et White [28], puis Abdelmalek [1], qui avaient étudié

quelques cas particuliers. Notre étude vise à étendre ces résultats par une analyse plus systématique.

3.1. MODÉLISATION ET CRITÈRE

3.1.1. Modèle

Nous considérons que la fenêtre d'analyse est incluse dans une région de l'image (fig. 2). Il existe des fluctuations locales d'intensité à l'intérieur de la région de sorte que les différents pixels n'ont pas tous la même valeur. L'utilisation d'un critère d'approximation pour définir le filtrage d'image a été introduite par Abdelmalek [1], l'auteur ayant étudié l'approximation au sens des normes L1, L2 et L ∞ , et préconisant la norme L1.

Nous proposons ici de faire une approximation au sens d'une norme L α , $\alpha \geq 1$.

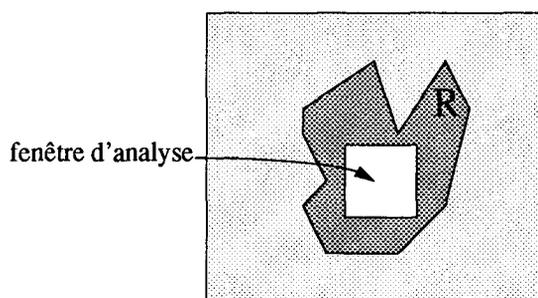


Figure 2. — Fenêtre d'analyse située à l'intérieur d'une région de l'image.

En utilisant les notations du paragraphe 2.1, on désigne par $\{x_1, \dots, x_N\}$ l'ensemble des observations disponibles dans la fenêtre d'analyse. La sortie du filtre est définie comme la valeur y minimisant la distance $d\alpha$:

$$(19) \quad d\alpha(y) = \left(\sum_{i=1}^N |y - x_i|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

La famille de filtres, paramétrée par α , que l'on obtient entre dans la classe des M-filtres [25], transposition des M-estimateurs introduits par Huber [16] et dont Kashyap et Eom ont utilisé la version robuste en traitement d'image [19]. Nous envisageons essentiellement son utilisation pour le filtrage d'image. Cependant, son extension au cas de l'estimation de plusieurs paramètres, dont des algorithmes robustes ont été proposés par Jolion et al. [17] [18], est possible.

3.1.2. Propriétés du critère

Le calcul de la sortie du filtre est équivalent à la minimisation de la fonction de coût $\epsilon\alpha$:

$$(20) \quad \epsilon\alpha(y) = \sum |y - x_i|^\alpha.$$

* *Propriété 1* : Pour tout α supérieur ou égal à 1, la fonction $\epsilon\alpha$ est convexe, car somme de fonctions convexes. Elle possède un seul minimum.

* *Propriété 2* : La fonction de coût est dérivable (au moins au sens des distributions) et sa dérivée est une distribution régulière :

$$(21) \quad \epsilon\alpha'(y) = \alpha \sum \text{sgn}(y - x_i) \cdot |y - x_i|^{\alpha-1}$$

avec

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La recherche de la solution optimale revient à déterminer le passage par zéro de $\epsilon\alpha'$. Ce problème n'admet pas de solution analytique générale. Par contre, la situation est idéale pour l'utilisation de techniques numériques.

* *Propriété 3* : La recherche de la solution optimale commute avec la translation et le facteur d'échelle. Si y est la solution obtenue avec les données $\{x_i\}$, $i = 1 \dots N$, alors

avec les données $\{\bar{x}_i\}$, $\bar{x}_i = x_i - d$, la solution optimale est $\bar{y} = y - d$

et avec les données $\{\underline{x}_i\}$, $\underline{x}_i = K \cdot x_i$, la solution optimale est $\underline{y} = K \cdot y$.

Pour α fixé, on définit la fonction μ par :

$$(22) \quad \mu(t, x_1, \dots, x_N) = \alpha \sum \text{sgn}(t - x_i) \cdot |t - x_i|^{\alpha-1}.$$

La solution optimale y vérifie $\mu(y, x_1, \dots, x_N) = 0$.

On a :

$$(23) \quad \begin{aligned} \mu(\bar{y}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) &= \alpha \sum \text{sgn}(\bar{y} - \bar{x}_i) \cdot |\bar{y} - \bar{x}_i|^{\alpha-1} \\ &= \mu(y, x_1, \dots, x_N) = 0 \end{aligned}$$

et

$$(24) \quad \begin{aligned} \mu(\underline{y}, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N) &= \alpha \sum \text{sgn}(\underline{y} - \underline{x}_i) \cdot |\underline{y} - \underline{x}_i|^{\alpha-1} \\ &= \text{sgn}(K) \cdot |K|^{\alpha-1} \\ &\quad \times \mu(y, x_1, \dots, x_N) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

En terme de traitement d'image, cette propriété implique que le filtrage ne modifie pas le contraste entre régions, et que le traitement n'est pas sensible aux conditions d'éclairage de la scène.

* *Propriété 4* : La solution optimale appartient à l'intervalle $[x_{(1)}, x_{(N)}]$, sauf dans le cas particulier où toutes les données sont égales.

En effet, pour $y < x_{(1)}$ on a $\forall i$:

$$(25) \quad |y - x_i|^\alpha = (x_i - y)^\alpha > (x_i - x_{(1)})^\alpha$$

et donc $\epsilon\alpha(y) > \epsilon\alpha(x_{(1)})$.

De plus, la dérivée de la fonction de coût en $x_{(1)}$ est négative.

$$(26) \quad \begin{aligned} \epsilon\alpha'(x_{(1)}) &= \alpha \sum_{i=2}^N \text{sgn}(x_{(1)} - x_{(i)}) \cdot |x_{(i)} - x_{(1)}|^{\alpha-1} \\ &= -\alpha \cdot \sum_{i=2}^N (x_{(i)} - x_{(1)})^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Cette quantité est strictement négative sauf si $x_{(i)} = x_{(1)}$ pour tout i .

Le domaine de variation de la sortie du filtre est strictement inclus dans celui de l'entrée. Ceci garantit que le filtre aura un effet de réduction de bruit.

3.2. CAS PARTICULIERS

3.2.1. $\alpha = 1$.

La fonction de coût est linéaire par morceaux (fig. 3). Sa dérivée est une fonction en escalier qui passe par zéro en $x_{(n+1)}$, valeur médiane des observations

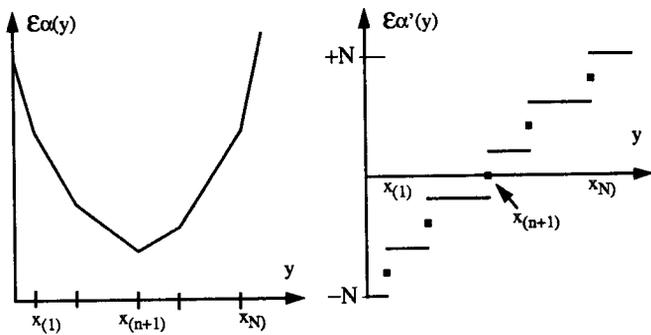


Figure 3. — Fonction de coût (gauche) et sa dérivée (droite) pour $\alpha = 1$.

3.2.1. $\alpha = 2$.

L'équation (21) devient :

$$(27) \quad \varepsilon\alpha'(y) = 2 \sum \text{sgn}^2(y - x_i) (y - x_i).$$

La dérivée s'annule pour $y = 1/N \sum x_i$. On retrouve le filtre moyennneur.

3.2.3. $\alpha = \infty$.

En reprenant la définition de la distance $d\alpha$ (19), et en faisant tendre α vers l'infini, on obtient :

$$(28) \quad d\infty(y) = \max |y - x_{(i)}| = \max (|y - x_{(1)}|, |y - x_{(N)}|) \\ i = 1 \dots N.$$

La distance est minimale en $y = (x_{(1)} + x_{(N)})/2$. On retrouve le filtre milieu

Remarque : On peut noter que, dans les trois cas ci-dessus, la minimisation du critère de distance conduit à une solution de type L-filtre.

3.3. CAS GÉNÉRAL

Dans le cas général, on ne sait pas résoudre explicitement l'équation (29)

$$(29) \quad \varepsilon\alpha'(y) = 0.$$

La relation (21) peut être réécrite sous la forme :

$$(30) \quad \varepsilon\alpha'(y) = \alpha \sum \text{sgn}(y - x_{(i)}) \cdot |y - x_{(i)}|^{\alpha-1}.$$

La sortie du filtre apparaît comme fonction des statistiques d'ordre $x_{(i)}$, et non des données initiales x_i , (sauf dans le cas particulier où α est un entier pair strictement positif).

Quand α est voisin de 1, il est possible de déterminer une solution approchée de (30). En effet, dans ces conditions, le graphe de la fonction de coût est proche de celui de la figure 3, à la nuance près que les changements de pente sont continus. La solution optimale est donc proche de la valeur médiane $x_{(n+1)}$. Supposons que $\varepsilon\alpha'(x_{(n+1)})$ soit positive. On recherche alors la solution optimale y dans l'intervalle $[x_{(n)}, x_{(n+1)}]$. La dérivée de la fonction de coût est alors :

$$(31) \quad \varepsilon\alpha'(y) = \alpha \cdot \left[\left(\sum_1^n (y - x_{(i)})^{\alpha-1} \right) - \left(\sum_{n+1}^N (x_{(i)} - y)^{\alpha-1} \right) \right].$$

On définit le coefficient correcteur C_c par :

$$(32) \quad \varepsilon\alpha'(x_{(n+1)}) = \alpha C_c = \alpha \cdot \left[\left(\sum_1^n (x_{(n+1)} - x_{(i)})^{\alpha-1} \right) - \left(\sum_{n+2}^N (x_{(i)} - x_{(n+1)})^{\alpha-1} \right) \right].$$

On a donc :

$$(33) \quad \alpha C_c - \varepsilon\alpha'(y) = \alpha (x_{(n+1)} - y)^{\alpha-1} + \alpha A + \alpha B$$

avec :

$$(34) \quad A = \left(\sum_1^n [(x_{(n+1)} - x_{(i)})^{\alpha-1} - (y - x_{(i)})^{\alpha-1}] \right)$$

et

$$(35) \quad B = \left(\sum_{n+2}^N [(x_{(i)} - y)^{\alpha-1} - (x_{(i)} - x_{(n+1)})^{\alpha-1}] \right)$$

α étant proche de 1, la quantité $u^{\alpha-1}$ est proche de 1 sauf si u est proche de 0. Les termes A et B sont alors négligeables devant le premier terme du membre de droite de (33). La solution optimale est alors :

$$(36) \quad y \approx x_{(n+1)} - C_c \frac{1}{\alpha-1}.$$

Si la quantité C_c est négative, la solution optimale est légèrement supérieure à $x_{(n+1)}$. Par un raisonnement analogue on montre que, dans ces conditions :

$$(37) \quad y \approx x_{(n+1)} + |C_c| \frac{1}{\alpha-1}$$

ce que l'on peut résumer par :

$$(38) \quad y \approx x_{(n+1)} - \text{sgn}(C_c) |C_c| \frac{1}{\alpha-1}$$

avec :

$$C_c = \left(\sum_1^n (x_{(n+1)} - x_{(i)})^{\alpha-1} \right) - \left(\sum_{n+2}^N (x_{(i)} - x_{(n+1)})^{\alpha-1} \right).$$

Ainsi la sortie du filtre dépend-elle de manière non linéaire de l'ensemble des statistiques d'ordre. On obtient un NL-filtre par adjonction d'un terme correcteur au filtre médian.

3.4. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES

On cherche ici à évaluer la capacité des opérateurs de prétraitement à réduire les inhomogénéités d'intensité à l'intérieur d'une région de l'image. Les inhomogénéités sont modélisées par un bruit aléatoire (bruit d'image).

3.4.1. Modèles de bruit

On suppose que la fenêtre d'analyse est incluse dans une région de l'image. Au pixel numéro k , l'intensité X_k est donnée par

$$(39) \quad X_k = s_k + B_k$$

où s_k est une constante, et B_k un bruit blanc centré absolument continu, de densité de probabilité f symétrique par rapport à l'origine. On s'intéresse en particulier aux distributions uniformes, gaussiennes et exponentielles, ce qui permet d'étudier l'effet du caractère plus ou moins impulsif des perturbations.

3.4.2. Biais

Soit $X_k = \{X_1, \dots, X_N\}$ l'ensemble des observations disponibles dans la fenêtre d'analyse, et Y la sortie du filtre. Soit H la fonction telle que :

$$(40) \quad Y = H(X_1, \dots, X_N).$$

Compte tenu de la relation (23), on peut fixer s_k à zéro sans perte de généralité. En utilisant la relation (24) on obtient :

$$(41) \quad E[-Y] = \int_{R^N} H(-x_1, \dots, -x_N) f_{1-N}(x_1, x_N) \cdot dx_1 \dots dx_N$$

où f_{1-N} désigne la densité conjointe de (X_1, \dots, X_N) .

Du fait de la symétrie de la densité de probabilité f , la relation (39) devient :

$$(42) \quad E[-Y] = \int H(u_1, \dots, u_N) f_{1-N}(-u_1, \dots, -u_N) du_1 \dots du_N = E[Y].$$

Pour une distribution de bruit symétrique, le biais est donc nul.

On peut cependant remarquer que la condition de biais nul n'est pas toujours indispensable en traitement d'image. En effet, la plupart des méthodes de segmentation [3] [10] sont basées sur un critère d'homogénéité des intensités des pixels autour d'une valeur moyenne, et non sur la valeur moyenne elle-même. Ce qui importe est que le biais ne varie pas d'une région à l'autre.

3.4.3. Variance

Dans le cas général, et même en faisant des hypothèses simplificatrices de type bruit blanc, le calcul de la variance de sortie est rendu peu aisé, du fait du caractère non explicite de la relation entrée-sortie. Nous donnerons ici quelques résultats asymptotiques, et nous présenterons des résultats expérimentaux.

3.4.3.1. Résultats asymptotiques

Connaissant la densité de probabilité de l'entrée, on peut, en utilisant un résultat de Huber [16] déterminer la variance de sortie quand la taille du filtre est « très » grande. En effet, dans ces conditions, la sortie Y tend vers une variable gaussienne centrée de variance V donnée par :

$$(43) \quad V = \frac{\int \alpha^2 |t|^{2(\alpha-1)} f(t) dt}{N \cdot \lambda'(0)^2}$$

avec

$$\lambda(u) = \int \alpha \operatorname{sgn}(t-u) |t-u|^{\alpha-1} f(t) dt.$$

On peut choisir une famille de densités de probabilité, proposée par Bovik [7], de la façon suivante :

$$(44) \quad f_\lambda(t) = C \cdot \exp(-K |t|^\lambda).$$

Cette famille contient les lois exponentielles ($\lambda = 1$), gaussiennes ($\lambda = 2$) et uniformes ($\lambda \rightarrow \infty$). Elle permet de décrire une gamme de comportement allant du très régulier (λ fort) au très impulsif (λ faible).

La variance asymptotique du filtre de type $d\alpha$ est alors (voir Annexe 2) :

$$(45) \quad V = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\lambda^2 K^{2/\lambda}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\lambda}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{\alpha-1}{\lambda}\right)\right]^2}.$$

Pour $\lambda = 1$, on retrouve que l'optimum est obtenu avec $\alpha = 1$ (filtre médian). Il s'agit en effet de l'estimateur du maximum de vraisemblance, asymptotiquement efficace [9]. Pour une entrée de variance 1, la variance de sortie tend vers $1/2N$.

Toutefois, ces résultats asymptotiques ne peuvent être utilisés qu'en tant qu'indications. On cherche en effet à mettre au point des opérateurs locaux, ce qui implique que la taille de filtre utilisée est généralement assez faible. De plus, la convergence des variances de sortie vers leur

valeur asymptotique dépend du filtre utilisé (valeur de α) et de la distribution du bruit (valeur de λ).

3.4.3.2. Résultats expérimentaux

Les courbes des figures 4 à 7 présentent les variances de sorties de filtres de type $d\alpha$. Elles ont été obtenues dans les conditions suivantes :

- signal d'entrée de type bruit blanc à distribution uniforme, gaussienne, ou exponentielle,
- taille de filtre : $N = 3, 5, 9, 15$,
- valeur de α comprise entre 1,0 et 3,0.

Le nombre d'échantillons du signal d'entrée est $N_e = 10^5$. La précision d'estimation de la variance de sortie est donc de l'ordre de 1 %.

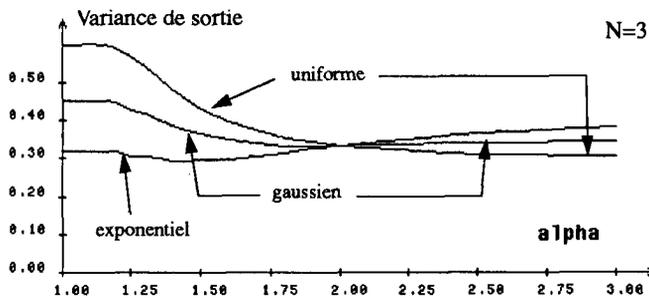


Figure 4. — Variance de sortie du filtre $d\alpha$ de taille $N = 3$; entrée : bruit blanc de variance 1 à densité uniforme, gaussienne, exponentielle.

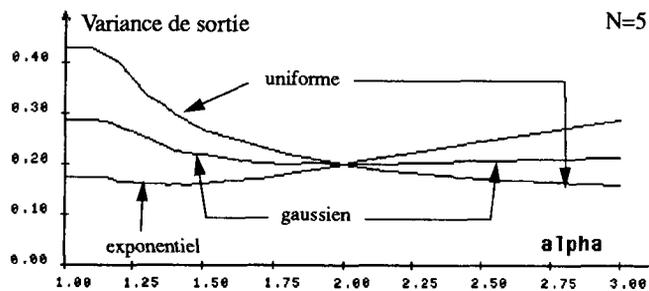


Figure 5. — Variance de sortie du filtre $d\alpha$ de taille $N = 5$; entrée : bruit blanc de variance 1 à densité uniforme, gaussienne, exponentielle.

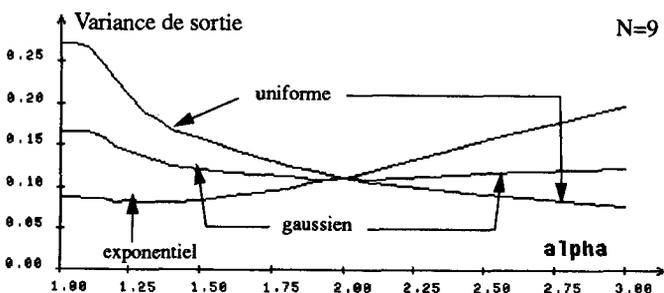


Figure 6. — Variance de sortie du filtre $d\alpha$ de taille $N = 9$; entrée : bruit blanc de variance 1 à densité uniforme, gaussienne, exponentielle.

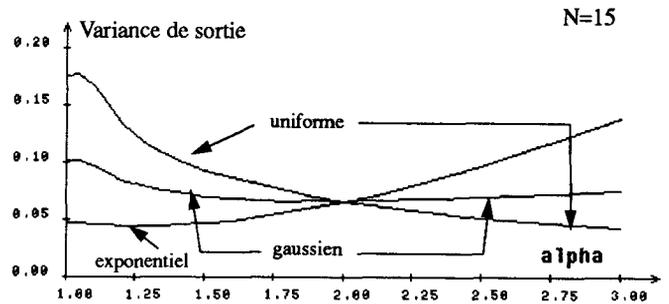


Figure 7. — Variance de sortie du filtre $d\alpha$ de taille $N = 15$; entrée : bruit blanc de variance 1 à densité uniforme, gaussienne, exponentielle.

On remarque la forte dépendance des performances vis-à-vis de la forme de la densité de probabilité de l'entrée. Pour une distribution exponentielle, l'optimum est atteint pour une valeur de α différente de 1, mais qui s'en rapproche quand N augmente. Pour une distribution uniforme, la variance minimale s'obtient quand α tend vers l'infini. L'opérateur obtenu est alors le filtre milieu, qui est le L-filtre optimal dans ces conditions [7] [22], et que l'on retrouvera au paragraphe 4.

On peut remarquer également que, au voisinage du α optimal, les courbes de variance présentent une convexité peu marquée. A taille de filtre donnée, une erreur sur le choix du paramètre α n'est donc pas trop critique.

On a pu observer que l'évolution, en fonction de α , des différents moments de la sortie est semblable à celle du moment d'ordre 2. Cette constatation est d'ailleurs déjà présente dans [28]. Ceci justifie l'emploi du critère quadratique pour l'étude des propriétés statistiques.

3.5. PROPRIÉTÉS DÉTERMINISTES

Nous nous intéressons ici à la réponse de l'opérateur à certaines classes d'entrée typiques que l'on peut rencontrer en traitement d'image.

3.5.1. Échelon 1D

On considère ici le cas d'un contour monodimensionnel (fig. 8) filtré par un opérateur de taille $N = 2n + 1$. La fenêtre d'observation X_k , centrée à la position k , est située de part et d'autre de la transition.

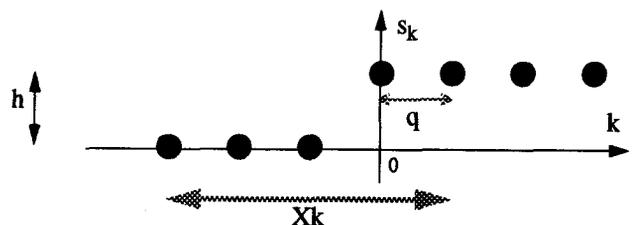


Figure 8. — Contour en échelon d'amplitude h .

La transition est localisée au pixel numéro 0. Soit q le nombre de pixels d'intensité h dans la fenêtre d'observation. On a :

$$(46) \quad \begin{aligned} q &= 0 \quad \text{pour } k < -(n+1) \\ q &= N \quad \text{pour } k \geq n \\ q &= n+k+1 \quad \text{pour } k \in [-n, +n]. \end{aligned}$$

On peut ici résoudre l'équation (29). La sortie, à la position k , est y_k :

$$(47) \quad y_k = h \cdot C_\alpha(q/N)$$

la fonction C_α étant définie par :

$$(48) \quad \begin{aligned} C_\alpha(u) &= 0 \quad \text{pour } u \leq 0 \\ &= 1 \quad \text{pour } u \geq 1 \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1-u}{u}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

Pour des valeurs faibles de α , l'élargissement de la zone de transition peut être rendu beaucoup moins important qu'avec un filtre moyennneur ($\alpha = 2$). Pour une valeur du paramètre égale à 1.2, 80 % de la transition entre niveaux bas et haut n'occupent que 20 % de la largeur de la fenêtre d'analyse.

3.5.2. Présence de données parasites

L'équation (47) s'applique également au cas de la présence d'une ou plusieurs valeurs aberrantes, présentant un contraste h avec le niveau normal dans la fenêtre d'observation. En choisissant une valeur de α proche de 1, on peut limiter fortement l'effet des parasites sur la valeur de sortie. Avec un filtre de taille $N = 9$, par exemple, et en choisissant $\alpha = 1.3$, la présence d'un parasite d'amplitude h se traduira en sortie par un écart d'intensité d'amplitude inférieure à $h/1000$.

3.5.3. Échelon 2D

Pour une fenêtre d'observation de taille $N \times N$, située de part et d'autre d'une transition en échelon entre un niveau bas, fixé par convention à 0, et un niveau haut h , la sortie est :

$$(49) \quad y = h \cdot C_\alpha(q/N^2)$$

où q désigne le nombre de pixels de la fenêtre ayant l'intensité h .

Si la transition est parallèle aux colonnes de l'image, et localisée en k_0 , alors la sortie du filtre au pixel (ℓ, k) est :

$$(50) \quad y(\ell, k) = h \cdot C_\alpha(q/N^2)$$

avec

$$\begin{aligned} q &= 0 \quad \text{si } k \leq k_0 - n + 1 \\ &= N \cdot (n + (k - k_0) + 1) \quad \text{si } k \in [k_0 - n, k_0 + n] \\ &= N^2 \quad \text{si } k > k_0 + n. \end{aligned}$$

L'élargissement de la zone de transition est le même que celui représenté figure 9.

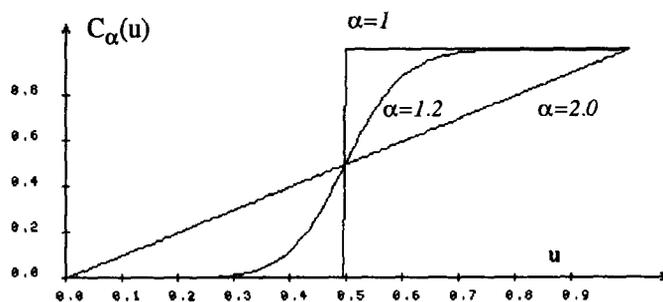


Figure 9. — Réponse du filtre $d\alpha$ à un échelon — Valeurs de α : 1 (médian) ; 1.2 ; 2 (moyennneur).

3.6. CONCLUSION

En utilisant un critère de distance $d\alpha$, on obtient une famille d'opérateurs de prétraitement dont la sortie est, en général, fonction non linéaire des statistiques d'ordre (NL-filtre). Le choix du paramètre α doit tenir compte du caractère impulsionnel plus ou moins marqué du bruit d'image. Si l'on prend comme critère d'analyse la variance de sortie de l'opérateur, on a, au voisinage de α optimal et pour une distribution de bruit donnée, des performances semblables à celles du L-filtre optimal. Par contre, lorsque la distribution du bruit change, le filtre $d\alpha$ optimal voit ses performances légèrement moins dégradées que le L-filtre optimal.

Par rapport aux méthodes robustes [17] [19], le fonctionnement des filtres $d\alpha$ ne nécessite pas la connaissance, ou l'estimation, d'un paramètre caractérisant l'amplitude des fluctuations du bruit.

D'un point de vue pratique, on peut obtenir de bonnes propriétés de préservation de contours et d'élimination des valeurs aberrantes en choisissant des valeurs de α inférieures à 2. Ceci peut se faire même pour des bruits gaussiens. En effet, un écart modéré par rapport à la valeur optimale de α , se traduit par une faible augmentation de la variance de sortie.

4. Le filtrage vu comme un problème d'estimation bayésienne

La détermination d'un opérateur de prétraitement se ramène ici à un problème d'estimation de moyenne. On cherche alors un opérateur optimal au sens de l'erreur quadratique.

4.1. MODÈLE ET CRITÈRE

On considère toujours le cas où la fenêtre d'analyse du filtre est située à l'intérieur d'une région de l'image (fig. 2).

On dispose d'un ensemble d'observations $X = \{X_i\}$, $i = 1 \dots N$, avec

$$(51) \quad X_i = s + B_i$$

s : réalisation d'une variable aléatoire S , de densité de probabilité f_S .

B_i : bruit blanc centré, de densité de probabilité f_B .

L'opérateur de prétraitement a pour but d'estimer s au mieux, l'optimalité étant définie par un critère d'erreur quadratique. Il s'agit donc de l'espérance conditionnelle de S sachant X . Dans les conditions ci-dessus, la sortie y de l'opérateur peut se mettre sous la forme :

$$(52) \quad y = \frac{\int s f_S(s) f_B(x_1 - s) \dots f_B(x_N - s) ds}{\int f_S(s) f_B(x_1 - s) \dots f_B(x_N - s) ds}$$

La principale difficulté consiste alors à choisir de façon adéquate les densités f_S et f_B .

4.2. CAS D'UN BRUIT UNIFORME

La densité de probabilité du bruit est :

$$(53) \quad f_B(u) = 1/(2a) \cdot P_{2a}(u)$$

avec $P_{2a}(u) = 1$ pour $|u| \leq a$, et 0 ailleurs.

L'équation (52) peut être reformulée, en tenant compte de la symétrie de f_B , et en faisant apparaître les statistiques d'ordre de la fenêtre d'analyse :

$$(54) \quad y = \frac{\int s f_S(s) f_B(s - x_{(1)}) \dots f_B(s - x_{(N)}) ds}{\int f_S(s) f_B(s - x_{(1)}) \dots f_B(s - x_{(N)}) ds}$$

Compte tenu de la forme de la densité f_B , cette relation peut se simplifier en :

$$(55) \quad y = \frac{\int_{x_{(N)}-a}^{x_{(1)}+a} s f_S(s) ds}{\int_{x_{(N)}-a}^{x_{(1)}+a} f_S(s) ds}$$

Une hypothèse réaliste consiste à donner à S un domaine de variation beaucoup plus étendu que celui du bruit B . En terme d'analyse d'image, ceci signifie que les fluctuations d'intensité à l'intérieur d'une région de l'image, sont plus faibles que le contraste entre la région la plus sombre

$$(61) \quad y = \frac{x_{(n+1)} + \sum_{r=1}^n C_r \cdot (-\alpha_r x_{(n+1-r)} + \beta_r) + \sum_{r=1}^n D_r \cdot (-\alpha_r x_{(n+1+r)} - \beta_r)}{1 - \sum_{r=1}^n (C_r + D_r) \cdot \alpha_r}$$

et la région la plus claire. En prenant pour S une loi uniforme dans l'intervalle $[-M, +M]$, avec $[x_{(N)} - a, x_{(1)} + a] \subset [-M, +M]$, la valeur optimale est :

$$(56) \quad y = \frac{x_{(1)} + x_{(N)}}{2}$$

Le filtre optimal est le filtre milieu.

Ceci reste vrai pour d'autres lois de probabilité pour S , par exemple une loi gaussienne, à condition que la variance de S tende vers l'infini.

4.3. CAS D'UN BRUIT GAUSSIEN

La densité de probabilité du bruit est :

$$(57) \quad f_B(u) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)$$

En choisissant pour S une loi gaussienne centrée de variance T^2 , on obtient, après transformation :

$$(58) \quad y = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{NT^2}} \cdot \sum_i x_i$$

Lorsque la variance de S tend vers l'infini, on retrouve la sortie d'un filtre moyennneur, qui est aussi un filtre d'ordre.

On retrouve le même résultat en prenant pour S une loi uniformément répartie dans $[-M, +M]$, et en faisant tendre M vers l'infini.

4.4. CAS D'UN BRUIT EXPONENTIEL

La densité de probabilité d'un bruit de variance σ^2 est :

$$(59) \quad f_B(u) = C \exp(-K|u|)$$

avec $C = K/2$ et $\sigma^2 = 2/K^2$.

4.4.1. Calcul du filtre

En utilisant la relation ci-dessus, l'équation (52) devient :

$$(60) \quad y = \frac{\int s f_S(s) e^{-K|y-x_{(1)}|} \dots e^{-K|y-x_{(N)}|} ds}{\int f_S(s) e^{-K|y-x_{(1)}|} \dots e^{-K|y-x_{(N)}|} ds}$$

En choisissant pour S une loi uniformément répartie dans $[-M, +M]$, les fonctions à intégrer se présentent sous forme d'une exponentielle dans chaque intervalle $[x_{(i)}, x_{(i+1)}]$. En faisant tendre M vers l'infini, la sortie du filtre optimal se met sous la forme :

avec

$$\alpha_r = \frac{1}{(2r-1)(2r+1)},$$

$$\beta_r = \frac{4r\alpha_r^2}{K}, \quad u_j = \exp(-Kx_{(j)})$$

$$C_r = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1-r}} \cdot \prod_{k=(n+2-r)}^n \frac{u_k^2}{u_{n+1-r}^2}$$

$$D_r = \frac{u_{n+1-r}}{u_{n+1}} \cdot \prod_{k=(n+2)}^{n+r} \frac{u_{n+1-r}^2}{u_k^2}.$$

Le filtre optimal, espérance conditionnelle, apparaît donc comme un filtre d'ordre, dérivé d'un filtre médian, au moyen d'une correction non linéaire.

Cas particulier : $N = 3$

La sortie du filtre se met sous la forme :

$$(62) \quad y = \frac{\exp(-K(x_{(2)} - x_{(1)})) \cdot \left(-x_{(1)} + \frac{4}{3K}\right) + 3x_{(2)} + \exp(-K(x_{(3)} - x_{(2)})) \cdot \left(x_{(3)} - \frac{4}{3K}\right)}{3 - \exp(-K(x_{(2)} - x_{(1)})) - \exp(-K(x_{(3)} - x_{(2)}))}.$$

4.4.2. Étude des performances

Le tableau 1 donne la valeur du rapport $R = V_{LFO}/V_{ESPEC}$, rapport entre la variance du L-filtre optimal [7], et celle du NL-filtre fourni par l'espérance conditionnelle (filtre ESPEC).

Tableau 1.— Rapport entre variance du L-filtre optimal et variance du filtre ESPEC. Taille de filtre, $N = 3$, distribution du bruit d'entrée exponentielle, gaussienne, uniforme. Valeurs expérimentales obtenues avec un échantillon de taille 200 000.

bruit	exponentiel	gaussien	uniforme
$\frac{V_{LFO}}{V_{ESPEC}}$	1.015	1.005	1.030

On observe que le filtre ESPEC a une variance de sortie légèrement plus faible que le L-filtre optimal, et ce pour les différents types de bruit d'entrée. Ceci reste vrai pour les tailles de filtres supérieures. Ceci prouve que le filtre optimal n'est pas forcément un L-filtre, et également qu'il n'en est pas très éloigné.

Le filtre ESPEC utilise des informations sur l'écart-type du bruit σ_B , par l'intermédiaire du paramètre K qui doit être fixé à la valeur $\sqrt{2}/\sigma_B$. Cependant une connaissance précise de cette valeur n'est pas nécessaire. En effet, on peut vérifier que, pour des tailles de filtre comprises entre 3 et 25 pour lesquelles les valeurs des coefficients optimaux du L-filtre ont été calculées [6] (cf. Annexe 3), on obtient, en réduction de bruit, de meilleures performances qu'avec

le L-filtre optimal, et ce pour un facteur d'erreur sur l'écart-type σ_f/σ_B compris entre 0.65 et 1.65.

Si l'on reprend l'expression (61), on peut facilement vérifier, en effectuant des développements limités, que quand K tend vers l'infini (c'est-à-dire σ_f tend vers zéro), la sortie du filtre tend vers la valeur médiane. Quand K tend vers zéro (σ_f tend vers l'infini), la sortie du filtre tend vers la valeur moyenne. K apparaît donc comme un paramètre de réglage, permettant de faire varier le fonctionnement du filtre.

Le comportement de ce filtre peut également être étudié dans le cas déterministe à l'aide des relations (61). On peut, en particulier s'intéresser à l'effet d'élargissement des contours, en considérant l'écart, c'est-à-dire la différence maximum, entre un signal initial, de type contour en échelon, et signal filtré (fig. 10).

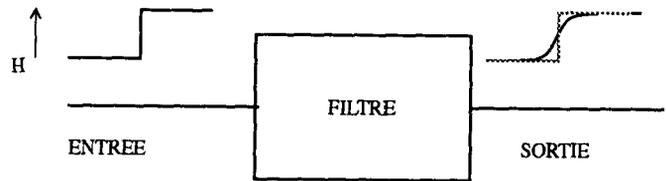


Figure 10.— Effet d'élargissement des contours.

Dans le cas d'un contour en échelon d'amplitude H , on peut montrer que pour des rapports signal à bruit, mesurés par H/σ_f , pas trop faibles, l'écart obtenu avec le filtre ESPEC est plus faible que celui produit par le L-filtre optimisé de même taille. Pour un filtre de taille $N = 3$ (resp. $N = 5$), le contour est mieux préservé qu'avec le L-filtre optimal dès que le rapport H/σ_f est supérieur à 2.8 (resp. 2.5). Dans le cas de rapports signal à bruit élevés, les variations d'intensité dues au contour sont grandes par rapport à l'écart type. Le comportement du filtre ESPEC tend donc vers celui du filtre médian.

4.5. CONCLUSION

Les conclusions que l'on peut tirer de cette partie sont diverses, voire contradictoires. Nous avons envisagé trois sortes de perturbations : très concentrée (bruit uniforme), assez concentrée (bruit gaussien), assez impulsionnelle (bruit exponentiel). Dans les trois cas, la solution optimale apparaît sous forme de filtre d'ordre, de type L-filtre ou NL-filtre. Dans le cas d'un bruit exponentiel, on met en évidence le fait que la solution optimale n'est pas toujours un L-filtre, mais que le gain en performance par rapport au L-filtre optimal est faible. Par contre, du fait de sa structure non linéaire, le filtre obtenu (ESPEC) s'avère être plus intéressant que le L-filtre optimal dans les cas de non-stationnarités franches (contours).

Notons enfin que, en adoptant une approche de type estimation bayésienne, les solutions optimales apparaîtront explicitement comme fonction des statistiques d'ordre chaque fois que la densité de probabilité du bruit ou ses dérivées présenteront des discontinuités.

5. Approche par le maximum de vraisemblance

5.1. MODÈLES ET CRITÈRES

Nous nous plaçons toujours dans le cas où la fenêtre d'observation est située à l'intérieur d'une région de l'image, caractérisée par sa valeur moyenne m . Les perturbations sont modélisées par un bruit blanc centré de densité de probabilité f_B . Étant donnée une fenêtre d'observation de taille N , la sortie de l'opérateur de prétraitement est définie comme la valeur la plus vraisemblable compte tenu des données.

Soit $\mathbf{x} = \{x_i, \dots, x_N\}$ l'ensemble des observations disponibles et $\mathbf{t} = \{x_{(1)}, \dots, x_{(N)}\}$ le vecteur des statistiques d'ordre correspondantes. Le vecteur \mathbf{t} est une statistique suffisante pour l'estimation de la valeur moyenne de l'intensité de la région. En effet, la loi conditionnelle de \mathbf{x} sachant \mathbf{t} ne dépend pas du paramètre m [31].

$$(63) \quad P_{\mathbf{x}|\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = 1/N! \text{ si } \mathbf{x} \text{ est une des } N! \text{ permutations de } \mathbf{t} \\ = 0 \quad \text{sinon}$$

Or, les estimateurs au sens du maximum de vraisemblance sont à rechercher parmi les fonctions des statistiques suffisantes [29]. On s'attend donc à ce que la solution optimale apparaisse comme étant la sortie d'un filtre d'ordre.

Nous utilisons la famille des lois de probabilités définie en (44)

$$(64) \quad f_{B,\lambda}(u) = C \cdot \exp(-K|u|^\lambda).$$

Dans ces conditions, la loi du vecteur des observations \mathbf{x} , pour une valeur moyenne m est :

$$(65) \quad f_m(\mathbf{x}) = C^N \cdot \prod_{i=1}^N \exp(-K|x_i - m|^\lambda) = \\ = C^N \cdot \exp\left(-K \sum_{i=1}^N |x_i - m|^\lambda\right).$$

La valeur la plus vraisemblable y est donc la sortie d'un filtre de type $d\alpha$, défini au paragraphe 3, avec $\alpha = \lambda$.

5.2. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES

Les propriétés statistiques ont été étudiées au paragraphe 3, pour des bruits exponentiel, gaussien et uniforme. Ce sont celles d'un estimateur MV qui converge vers l'estimateur optimal quand la taille de la fenêtre d'observation devient grande.

5.3. CAS PARTICULIER : $0 < \lambda < 1$

5.3.1. Définition du filtre

Au paragraphe 3, nous avons étudié le cas des filtres de type $d\alpha$, avec $\alpha \geq 1$. Dans ces conditions, la fonction de coût associée était convexe, avec un seul minimum. Ici, la recherche de la solution la plus vraisemblable revient à déterminer le minimum d'une fonction de coût $\varepsilon_\lambda(y)$

(éq. 66) concave par morceaux, et présentant N points de rebroussement à dérivée infinie en $x_{(j)}$, $j = 1 \dots N$.

$$(66) \quad \varepsilon_\lambda(y) = \sum_j |y - x_{(j)}|^\lambda, \quad \text{avec } 0 < \lambda < 1.$$

Le minimum est obtenu pour l'une des statistiques d'ordre $x_{(j)}$ (voir fig. 11). Le filtre optimal est ici un filtre de rang. Le numéro du rang dépend de la disposition relative des statistiques d'ordre. Il s'agit donc d'un filtre de rang adaptatif [20] [30] [34].

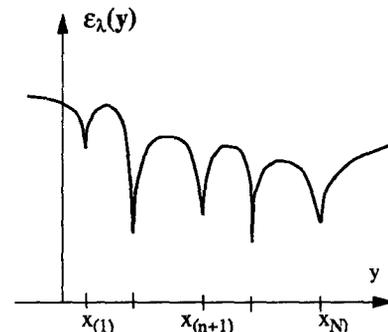


Figure 11. — Fonction de coût $\varepsilon_\lambda(y)$, $0 < \lambda < 1$.

5.3.2. Propriétés

* *Propriété 1* : Le filtre optimal a un effet de réduction de bruit.

Notons ε_j , $j = 1 \dots N$, la valeur de la fonction de coût en $x_{(j)}$. On suppose que :

$$(67) \quad x_{(1)} < x_{(2)} \quad \text{et} \quad x_{(N-1)} < x_{(N)}.$$

On a alors : $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ et $\varepsilon_{N-1} < \varepsilon_N$. Le domaine de variation de la sortie est strictement inclus dans celui de l'entrée. En effet, on a :

$$(68) \quad \varepsilon_1 = (x_{(2)} - x_{(1)})^\lambda + \sum_{i=3}^N (x_{(i)} - x_{(1)})^\lambda \\ \varepsilon_2 = (x_{(2)} - x_{(1)})^\lambda + \sum_{i=3}^N (x_{(i)} - x_{(2)})^\lambda$$

avec $(x_{(i)} - x_{(2)}) < (x_{(i)} - x_{(1)})$

pour tout i compris entre 3 et N .

* *Propriété 2* : Le filtre optimal a un effet de rehaussement de contraste.

Considérons un contour monodimensionnel flou, représenté par une transition en rampe de largeur L (fig. 12).

Soit s_k l'intensité au pixel k . Par un choix approprié de l'origine des positions, et en notant Δ la variation d'amplitude entre deux pixels successifs de la transition, on a :

$$(69) \quad s_k = \text{min} \quad \text{pour } k \leq 0 \\ s_k = \text{min} + k\Delta \quad \text{pour } 0 < k \leq L \\ s_k = \text{max} \quad \text{pour } k \geq L.$$

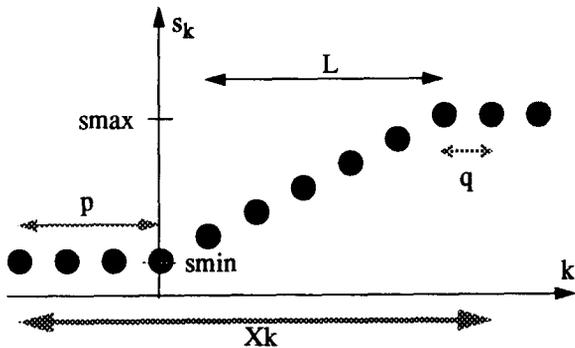


Figure 12. — Effet sur un contour flou de largeur L ($N = 11$, $L = 6$).

Pour une fenêtre d'observation Xk , centrée sur le pixel k , les statistiques d'ordre vérifient :

$$(70) \quad \begin{aligned} x_{(1)} &= \dots = x_{(p)} = s_{min} \\ x_{(p+j)} &= s_{min} + j\Delta, \quad j < L \\ x_{(p+L)} &= \dots = x_{(N)} = s_{max}. \end{aligned}$$

En désignant par ε_j la valeur de la fonction de coût en $x_{(j)}$, et par $q = N - (p + L) + 1$, le nombre de valeurs égales à s_{max} , on obtient :

$$(71) \quad \begin{aligned} \varepsilon_p &= [1 + 2^\lambda + \dots + (L - 1)^\lambda + qL^\lambda] \cdot \Delta^\lambda \\ \varepsilon_{p+L} &= [1 + 2^\lambda + \dots + (L - 1)^\lambda + pL^\lambda] \cdot \Delta^\lambda \\ \varepsilon_{p+j} &= [pj^\lambda + (j - 1)^\lambda + \dots + 1 + 1 + \\ &\quad + \dots + (L - 1 - j)^\lambda \\ &\quad + q(L - j)^\lambda] \cdot \Delta^\lambda, \quad \text{pour } 0 < j < L. \end{aligned}$$

On suppose que $k < (L + 1)/2$. Ceci signifie que le pixel courant est situé dans la première moitié de la transition. Dans ces conditions $p > q$, et $\varepsilon_p < \varepsilon_{p+L}$.

Définissons la fonction $D(\lambda)$ par :

$$(72) \quad D(\lambda) \cdot \Delta^\lambda = \varepsilon_p - \varepsilon_{p+L}.$$

Sa valeur en 0 est $D(0) = 1 - p$; elle est donc négative en 0 dès que la fenêtre d'observation comporte 2 pixels (ou plus) d'intensité s_{min} . Cette fonction est continue. Il existe donc une valeur λ_0 strictement positive, dépendant de la taille du filtre N mais pas du contraste $H = s_{max} - s_{min}$ telle que la fonction de coût soit minimum en $x_{(p)} = s_{min}$. Le même raisonnement peut être suivi si $k > (L + 1)/2$, c'est-à-dire pour la deuxième moitié de la transition. On a alors $\varepsilon_p > \varepsilon_{p+L}$. La valeur de sortie du filtre est $y = s_{max}$.

Ainsi, la transition entre le niveau s_{min} et le niveau s_{max} s'effectue-t-elle sur 1 pixel (pour L impair) ou au maximum sur 2 (L pair). Le contour est devenu net. Il y a donc un effet de rehaussement de contraste [5] [21] [34].

Le comportement de sortie du filtre sur ce contour 1D est le même que celui qui serait obtenu avec un filtre 2D, agissant sur un contour 2D parallèle aux lignes (ou aux colonnes) de l'image.

Le raisonnement précédent, basé sur la continuité de la fonction $D(\lambda)$ reste valable pour toute transition monotone, la taille du filtre devant être supérieure à $L + 1$. L'effet de rehaussement de contraste s'obtient donc également pour des contours flous 2D non parallèles aux axes de l'image.

N.B. : Dans le cas général, le calcul de la valeur λ_0 n'est pas aisé. Pour rendre net un contour en rampe de largeur initiale 3, ou 4, pixels, on peut montrer que λ_0 doit vérifier :

$$(73) \quad \lambda_0 < \frac{\ln \left(\frac{N - 1}{2} \right)}{\ln \left(\frac{N + 1}{2} \right)}.$$

5.4. CONCLUSION

Construire des opérateurs de prétraitement sur le principe du maximum de vraisemblance nécessite la connaissance de la distribution statistique des perturbations. En considérant les densités de probabilités décrites par l'équation (64), on couvre une gamme de comportements allant du très régulier au très impulsionnel. Les opérateurs optimaux ont alors la structure des filtres de type $d\alpha$ décrits au paragraphe 3. Pour des valeurs de α strictement inférieures à 1, on obtient un effet conjoint de réduction de bruit et de rehaussement de contraste.

6. Aspects algorithmiques

Les opérateurs étudiés dans les paragraphes précédents entrent dans la classe des NL-filtres, c'est-à-dire qu'ils sont basés sur un traitement non linéaire des statistiques d'ordre à l'intérieur d'une fenêtre d'analyse. A un ensemble de statistiques d'ordre donné $\{x_{(j)}\}$, correspond une et une seule valeur de sortie y . Le traitement est donc de type fonction, explicite ou implicite, des statistiques d'ordre.

Les opérateurs précédents peuvent donc être représentés par le schéma bloc de la figure 13.

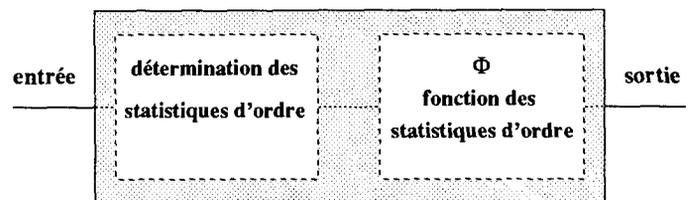


Figure 13. — Schéma bloc d'un NL-filtre.

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'implémentation des opérateurs développés.

6.1. DÉTERMINATION DES STATISTIQUES D'ORDRE

En traitement d'image, les données sont codées sur un nombre relativement faible de bits (généralement 8). Au lieu d'effectuer un tri de l'ensemble des données de la fenêtre d'analyse, on peut utiliser des techniques d'histogramme glissant [15] dont le principe est décrit ci-après. Considérons le cas d'une fenêtre d'analyse comportant L lignes et K colonnes (fig. 14) centrée sur le pixel ligne l , colonne k .

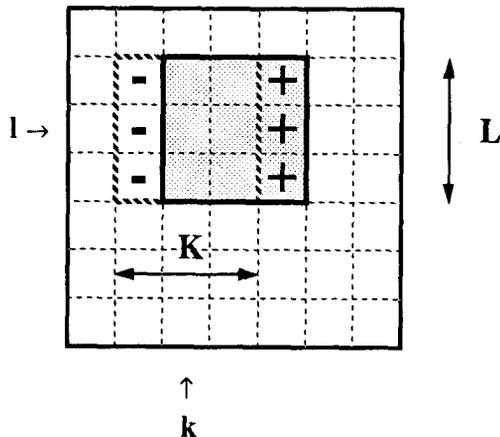


Figure 14. — Détermination des statistiques d'ordre par histogramme glissant.

On définit l'histogramme local, $\text{hist}[a]$, comme le tableau décrivant la fréquence d'apparition de l'amplitude a dans la fenêtre d'analyse centrée à la position (l, k) .

En parcourant l'histogramme local pour des valeurs croissantes de a , les statistiques d'ordre $x_{(j)}$ sont obtenues lorsque la fréquence d'apparition $\text{hist}[a]$ est non nulle. Quand la fenêtre d'analyse est déplacée d'une colonne, en $(l, k + 1)$, on décrémente les compteurs associés aux pixels sortant de la fenêtre (notés « - » sur la fig. 14), et on incrémente ceux associés aux pixels entrants (notés « + »). La mise à jour de l'histogramme local nécessite $2 \times L$ opérations d'incrément/décément.

6.2. TRAITEMENT DES STATISTIQUES D'ORDRE

6.2.1. L-filtres

Pour ces opérateurs, le traitement des statistiques d'ordre est une simple combinaison linéaire et ne pose pas de problèmes particuliers.

6.2.2. Filtre ESPEC

La fonction non linéaire de traitement est explicite et décrite par l'équation (61). Elle implique le calcul de quantités faisant intervenir des sommes et des produits d'exponentielles des statistiques d'ordre. Ceci nécessite un calcul en virgule flottante.

6.2.3. Filtres $d\alpha$

Pour ces opérateurs, la fonction Φ de traitement est, dans le cas général, implicite. Son évaluation nécessite l'emploi de méthodes numériques.

* $0 < \alpha < 1$: la fonction de coût est concave par morceaux et le minimum est obtenu pour l'une des statistiques d'ordre $x_{(j)}$, $j = 2 \dots N - 1$ (cf. 5.3.1). La sortie du filtre s'obtient en évaluant la fonction de coût pour ces valeurs $x_{(j)}$ et en déterminant la valeur minimale.

* $\alpha = 1$: il s'agit ici d'un filtre médian. La sortie est $y = x_{(n+1)}$.

* $\alpha > 1$: la fonction de coût est strictement convexe. Sa dérivée est calculable en tout point à l'aide de la relation (30). D'après (26), elle est négative pour $x_{(1)}$ et positive pour $x_{(N)}$. On est ramené au problème de la recherche de la racine d'une équation dans un intervalle. Compte tenu du faible nombre de niveaux de quantification habituellement utilisés en traitement d'image, on pourra utiliser une méthode de recherche par dichotomie.

Le calcul de la fonction de coût nécessite l'utilisation de la fonction d'élevation à une puissance non entière. Là encore, la représentation des nombres en virgule flottante doit être employée.

6.3. TEMPS DE TRAITEMENT

Avec les opérateurs ci-dessus, l'essentiel du temps est utilisé au traitement des statistiques d'ordre, et non à leur détermination. Pour un programme écrit en langage C exécuté sur une station de travail, les temps de traitement sont typiquement de l'ordre de quelques secondes pour un filtre médian, de quelques dizaines de secondes pour un filtre ESPEC, et de quelques minutes pour un filtre de type $d\alpha$. Dans ce dernier cas, le programme fait appel à la fonction *pow* qui est assez lente et nécessite de nombreux changements de format des données. Dans les cas usuels où le nombre de niveaux de quantification est assez faible, un calcul par tabulation est possible, ce qui augmentera la vitesse de traitement.

7. Application au traitement d'image

Nous présentons ici quelques résultats expérimentaux obtenus sur des images synthétiques, et sur des images réelles provenant de la banque d'image du GdR CNRS 134 - Traitement du Signal et Image.

7.1. IMAGES SYNTHÉTIQUES

Les photographies de la figure 15 mettent en évidence l'effet de différents traitements, du point de vue réduction de bruit et préservation des transitions. L'image initiale (15 a) représente un objet rectangulaire clair sur un fond sombre. L'image est perturbée par un bruit blanc additif exponentiel d'écart $\sigma_B = 20$. L'amplitude de la transition est $H = 60$. Les filtres utilisés sont de type $d\alpha$ ou ESPEC.

Dans chaque cas, le traitement est effectué par filtrage séparable (ligne-colonne) de taille $N = 9$. Le meilleur effet de réduction de bruit s'obtient avec un filtre ESPEC dont le paramètre K est déterminé à partir de $\sigma_f = \sigma_B$ (15.f). La préservation des transitions est correcte et peu

différente de celle obtenue avec un filtre médian (15.b). Si le paramètre K est trop faible (σ_f trop grand), le filtre ESPEC tend à se comporter comme un filtre moyenneur et aura tendance à rendre les contours flous (image 15.d ; $\sigma_f = 10\,000$). Pour une valeur de K forte (σ_f trop faible),

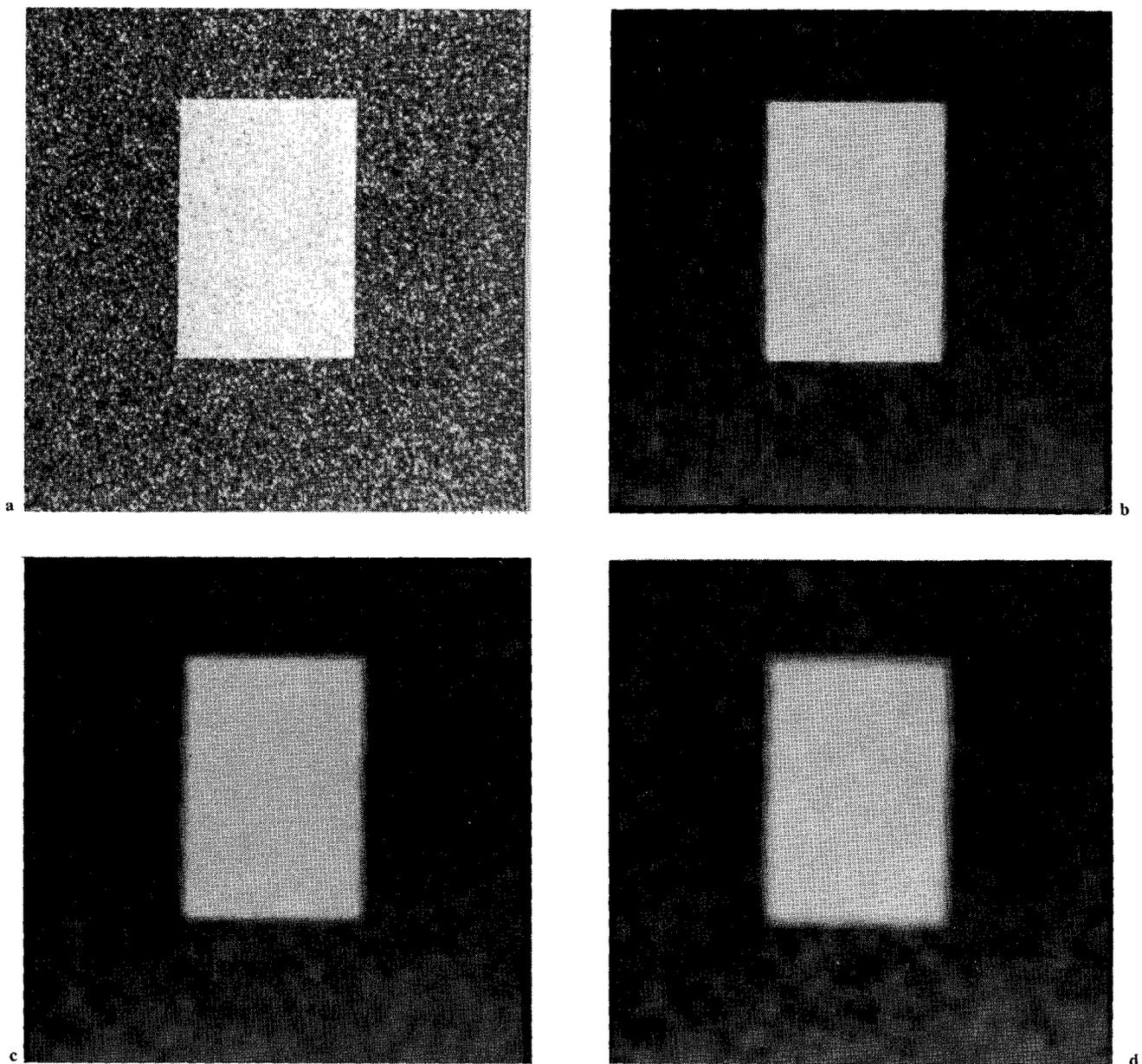


Figure 15. — Image synthétique bruitée — Filtrage séparable $N = 9$.

Transition d'amplitude $H = 60$ — Bruit blanc exponentiel $\sigma_B = 20$.

Détection de contour par opérateur de Deriche : paramètre d'échelle $a \approx 1$.

- a) image initiale ;
- b) filtrage médian ;
- c) filtrage $d\alpha$; $\alpha = 1.4$;
- d) filtrage ESPEC ; $\sigma_f = 10\,000$;

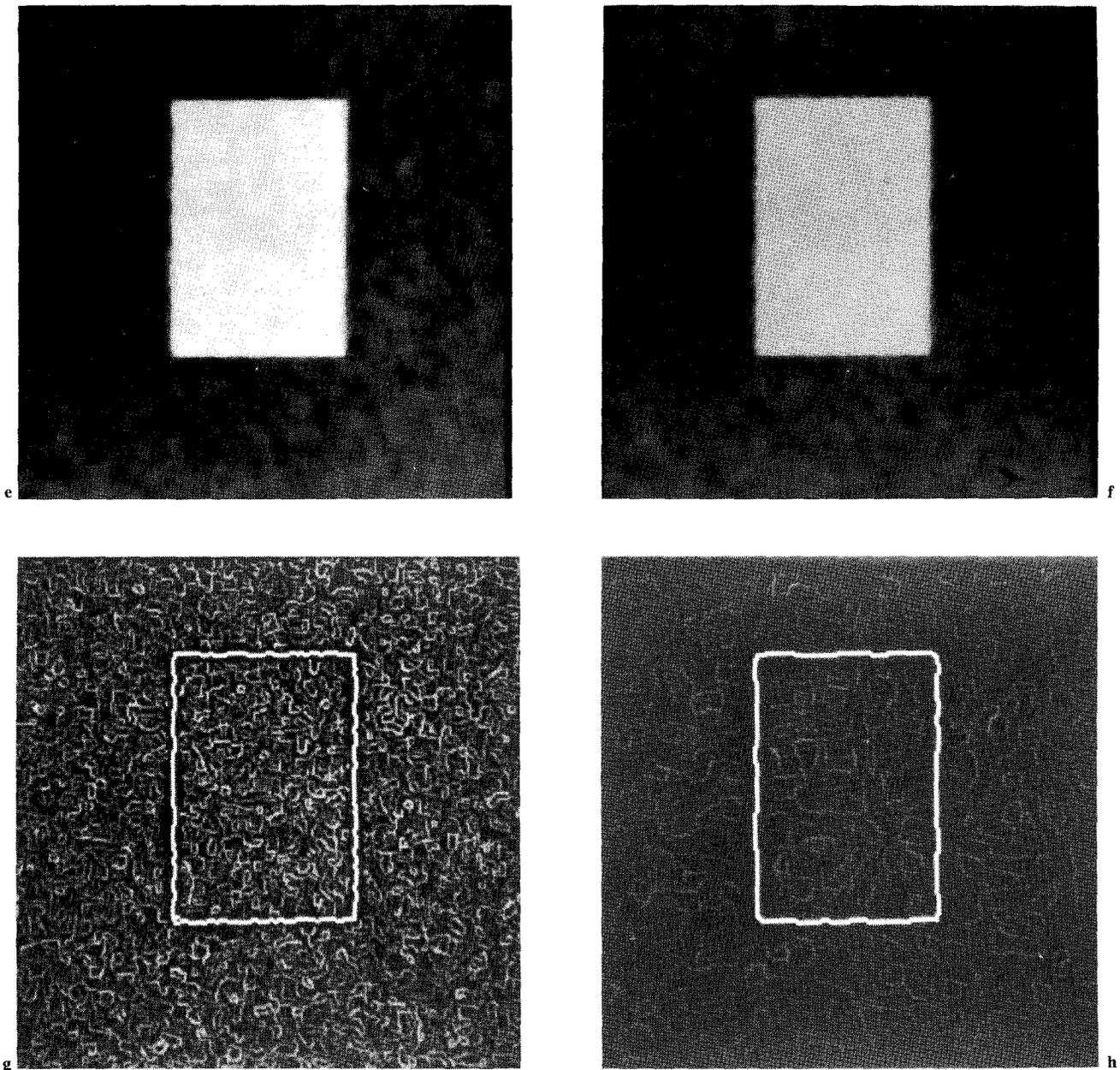


Figure 15 (suite).

- e) filtrage ESPEC ; $\sigma_f = 10$;
- f) filtrage ESPEC ; $\sigma_f = 20$;
- g) contours de l'image initiale (a) ;
- h) contours de l'image (f).

la préservation des contours est améliorée (image 15 e ; $\sigma_f = 10$). L'image 15 c représente la sortie d'un filtre $d\alpha$, avec $\alpha = 1.4$; on obtient une bonne préservation des transitions, l'effet de réduction de bruit étant proche de celui du filtre médian. Les images 15 g et 15 h sont

obtenues par application d'un détecteur de contours de type Deriche [12] à partir des images 15 a et 15 f respectivement. Le filtrage préserve la netteté des transitions et permet de diminuer fortement l'importance des faux contours.

7.2. IMAGES RÉELLES

7.2.1. Angiographie

La figure 16 représente une image d'angiographie numérique (angiogra.gdr). L'image initiale (16 a) comporte des structures (vaisseaux sanguins) aux contours flous, ainsi que des perturbations à caractère plutôt impulsif dans

le fond, et plus régulier à l'intérieur des vaisseaux. Le filtre ESPEC (16 c) élimine les parasites impulsifs et laisse les transitions pratiquement inchangées. Un lissage plus régulier est obtenu avec un filtre $d\alpha$ ($\alpha = 1.3$), au prix d'un léger adoucissement des contours (16 b). En choisissant une valeur de α inférieure à 1, on obtient un effet conjoint de lissage du bruit et de renforcement local des

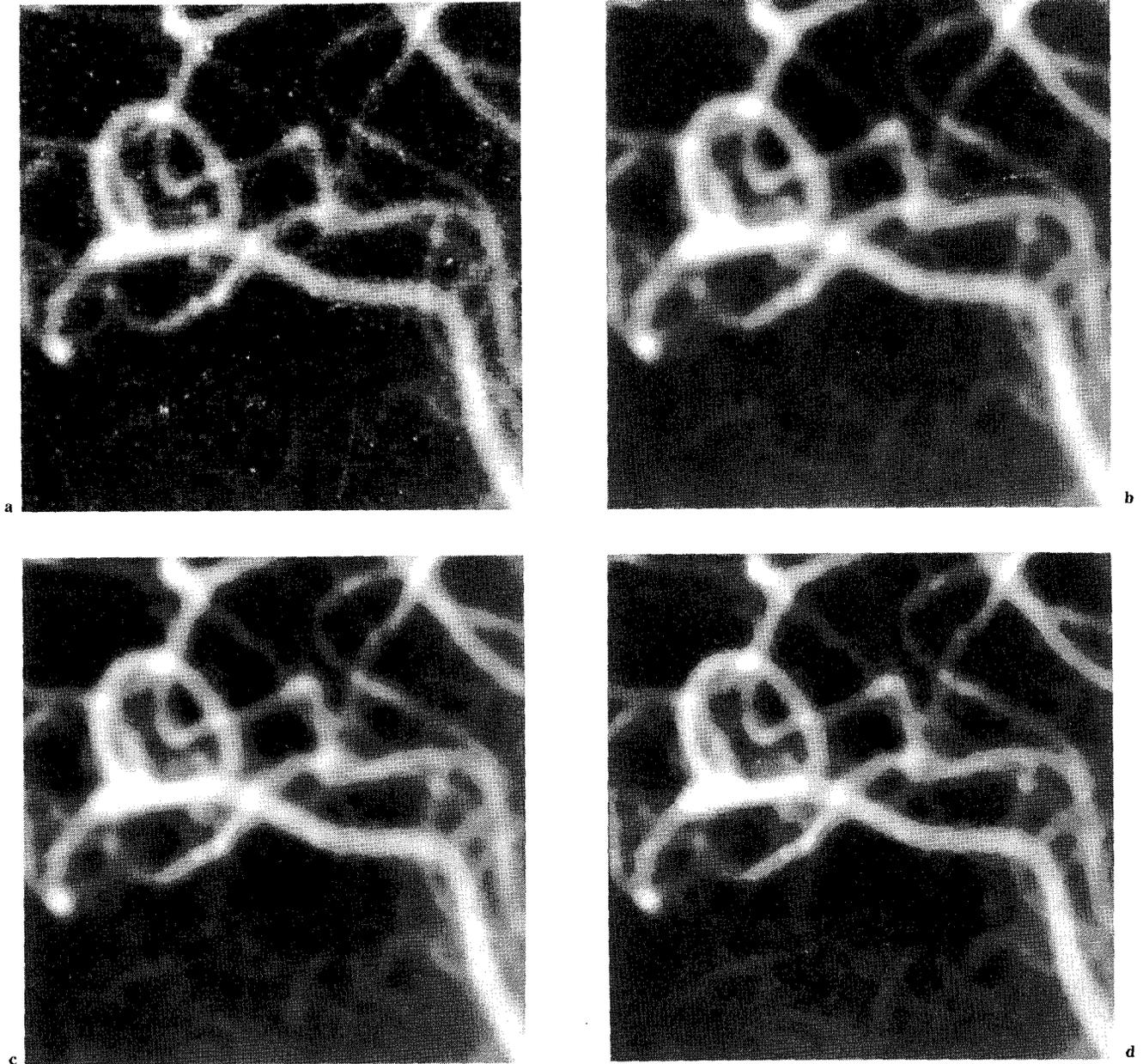


Figure 16. — Image réelle — Banque d'images du GdR 134 angiogra. gdr.

Filtrage 2D taille 7×7 . Détection de contour par opérateur de Deriche : paramètre d'échelle $a = 1$.

- a) image initiale ;
- b) filtrage $d\alpha$, $\alpha = 1.3$;
- c) filtrage ESPEC, $\alpha_r = 15$;
- d) filtrage $d\alpha$, $\alpha = 0.5$;

contrastes (16 *d*, $\alpha = 0.5$). Les images 16 *e* et 16 *f* représentent les contours obtenus par un opérateur de Deriche de paramètre $a = 1$, à partir de l'image initiale (16 *a*) et de l'image filtrée (16 *d*). On remarque que le préfiltrage non linéaire permet de rendre les contours des vaisseaux plus réguliers, y compris pour ceux apparaissant avec un faible contraste. De la même manière, les faux contours engendrés par le bruit impulsif dans l'image 16 *e* ont disparu dans l'image 16 *f*. Les images 16 *g* et 16 *h* sont obtenues en effectuant une segmentation itérative par croissance de

région [3], à partir de l'image initiale (16 *a*) et de l'image filtrée 16 *d* respectivement. Les petites taches sombres apparaissant dans 16 *g* et 16 *h* correspondent aux petites régions (3 pixels ou moins) qui n'ont pas été fusionnées. Elles sont situées essentiellement à proximité des frontières entre régions (16 *g*). Pour segmenter l'image initiale, les seuils d'agrégation doivent être assez forts, du fait de l'importance du bruit d'image. Ceci entraîne la disparition de certaines structures, sans empêcher la création d'un grand nombre de petites régions (16 *f*).

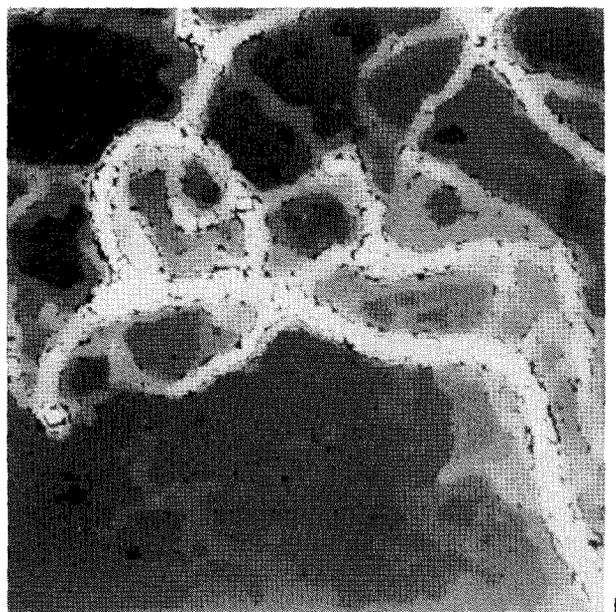
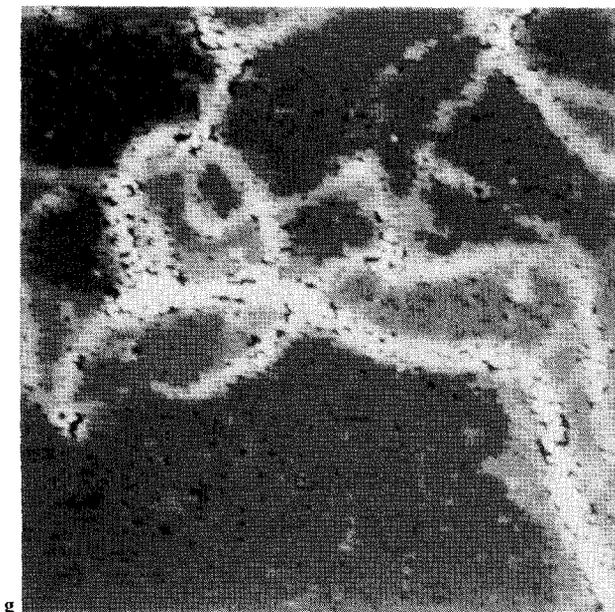
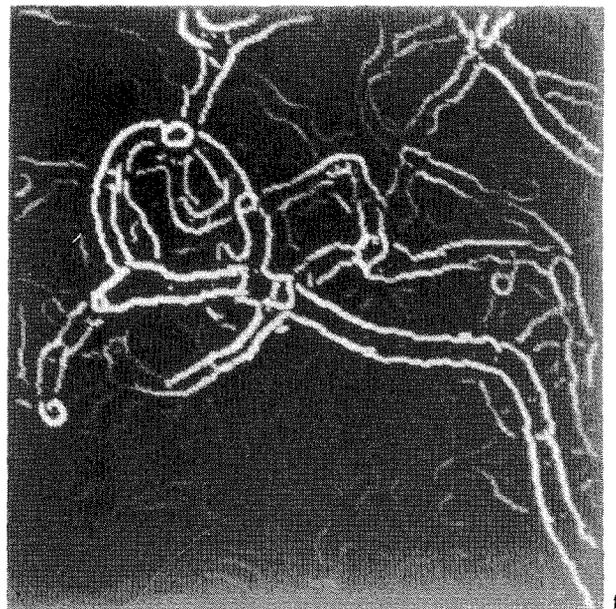
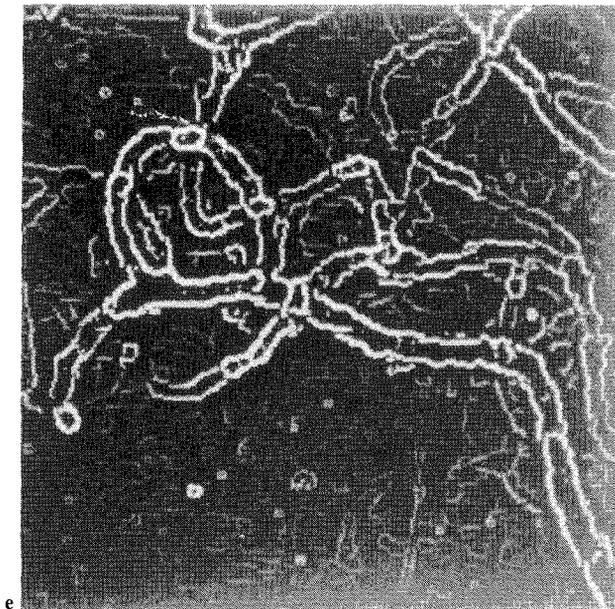


Figure 16 (suite).

- e) contours de l'image initiale (a) ;
- f) contours de l'image (d) ;
- g) segmentation de l'image initiale (a) ;
- h) segmentation de l'image (d).

7.2.2. Échographie

La figure 17 *a* est l'image obtenue par échographie d'un rein (echograp.gdr). Les contours sont peu marqués, et le rapport signal à bruit assez faible ($H/\sigma_B \approx 2$). Le filtrage médian ($\alpha = 1$, 17 *b*) élimine les parasites impulsionnels, tels que peuvent être perçus les points de repère blancs

délimitant la zone d'analyse de la sonde ultrasonore. Par contre l'effet de lissage du bruit est peu prononcé. En utilisant une valeur de α plus élevée ($\alpha = 1.3$, 17 *c*), le lissage est plus régulier. Par filtrage $d\alpha$ ($\alpha = 0.85$, 17 *d*) les contours sont rendus plus nets. Les images 17 *e*, 17 *f* et 17 *g* sont les résultats de segmentations itératives

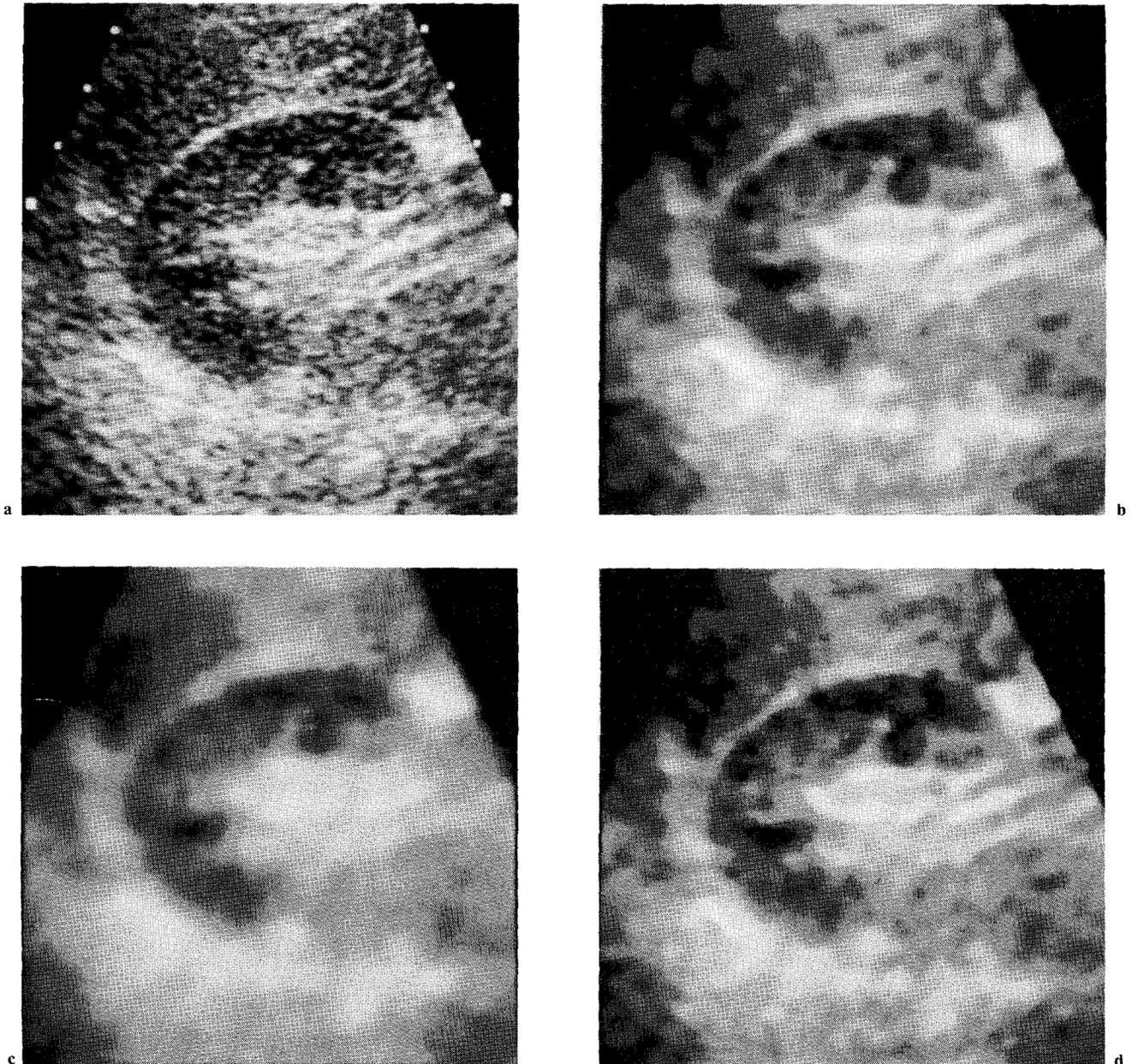


Figure 17. — Image réelle — Banque d'images du GdR 134 echograp. gdr. Filtrage 2D ou séparable, taille N.

- a) image initiale ;
- b) filtrage médian 2D ($\alpha = 1.0$), $N = 9$;
- c) filtrage $d\alpha$ séparable ; $N = 15$, $\alpha = 1.3$;
- d) filtrage $d\alpha(2D)$; $N=9$, $\alpha = 0.85$;

par croissance de région [3], à partir de l'image initiale (17a) et des images 17b et 17d respectivement. La segmentation de l'image initiale est peu exploitable, car il y a à la fois trop de petites régions et fusion de zones appartenant à l'objet (le rein) et au fond. En comparant les images 17f et 17g, on remarque que l'effet de

rehaussement de contraste du filtre $d\alpha$, pour α inférieur à 1, permet de préserver une proportion importante de la frontière de l'objet, au moins dans sa partie convexe. L'image 17h, obtenue par binarisation de l'image 17d, permet de restituer une bonne part de ce qui apparaît comme les contours du rein dans l'image initiale.

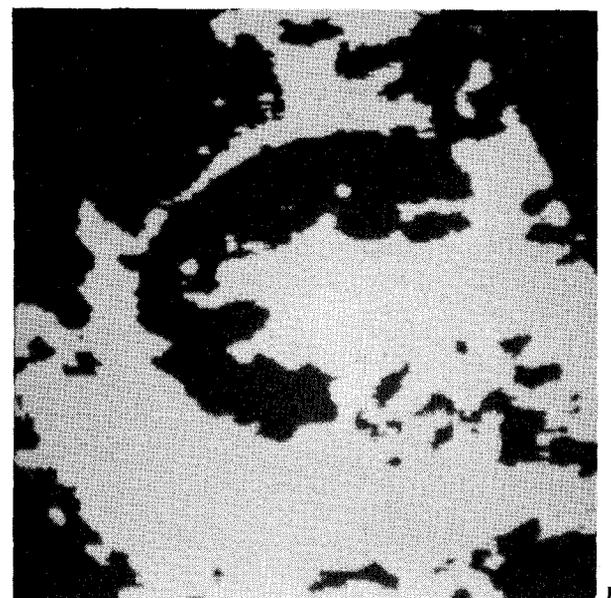
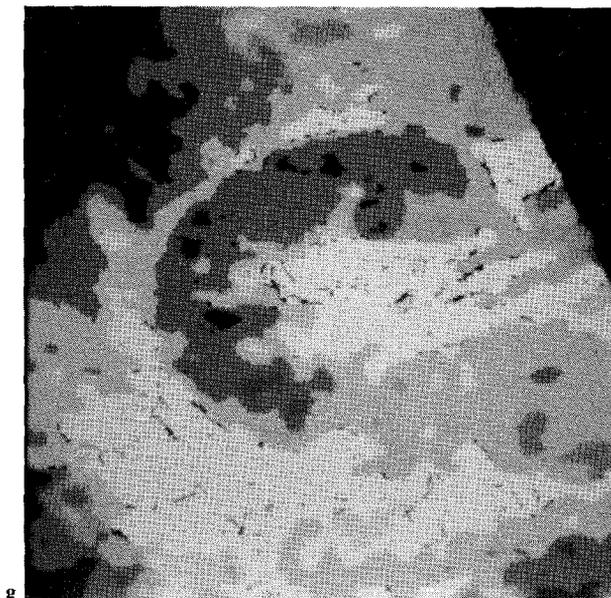
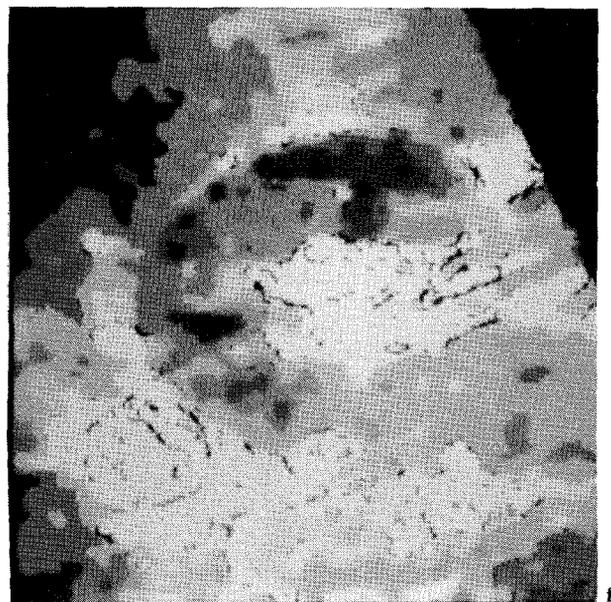
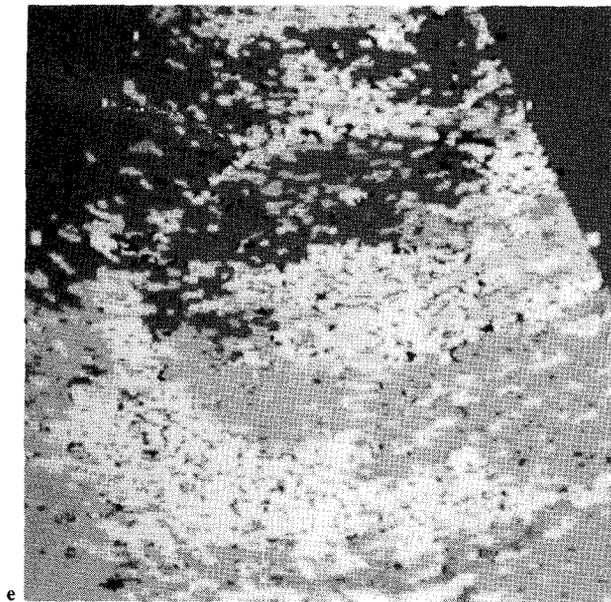


Figure 17 (suite).

- e) segmentation de l'image initiale (a) ;
- f) segmentation de l'image (b) ;
- g) segmentation de l'image (d) ;
- h) binarisation de l'image (d).

7.2.3. Radiographie

La figure 18 *a* est l'image d'une fissure dans une pièce métallique, obtenue par radiographie X (fissure.gdr). Les images 18 *b*, 18 *c* et 18 *d*, montrent les résultats obtenus

par filtrage $d\alpha$ pour trois valeurs différentes de α : 1.0 (médian), 1.4 et 0.85 respectivement. L'image initiale (18 *a*) est fortement bruitée, et les contours sont peu marqués. En appliquant un opérateur de détection de contours de Deriche, de paramètre d'échelle $a = 0.7$, on

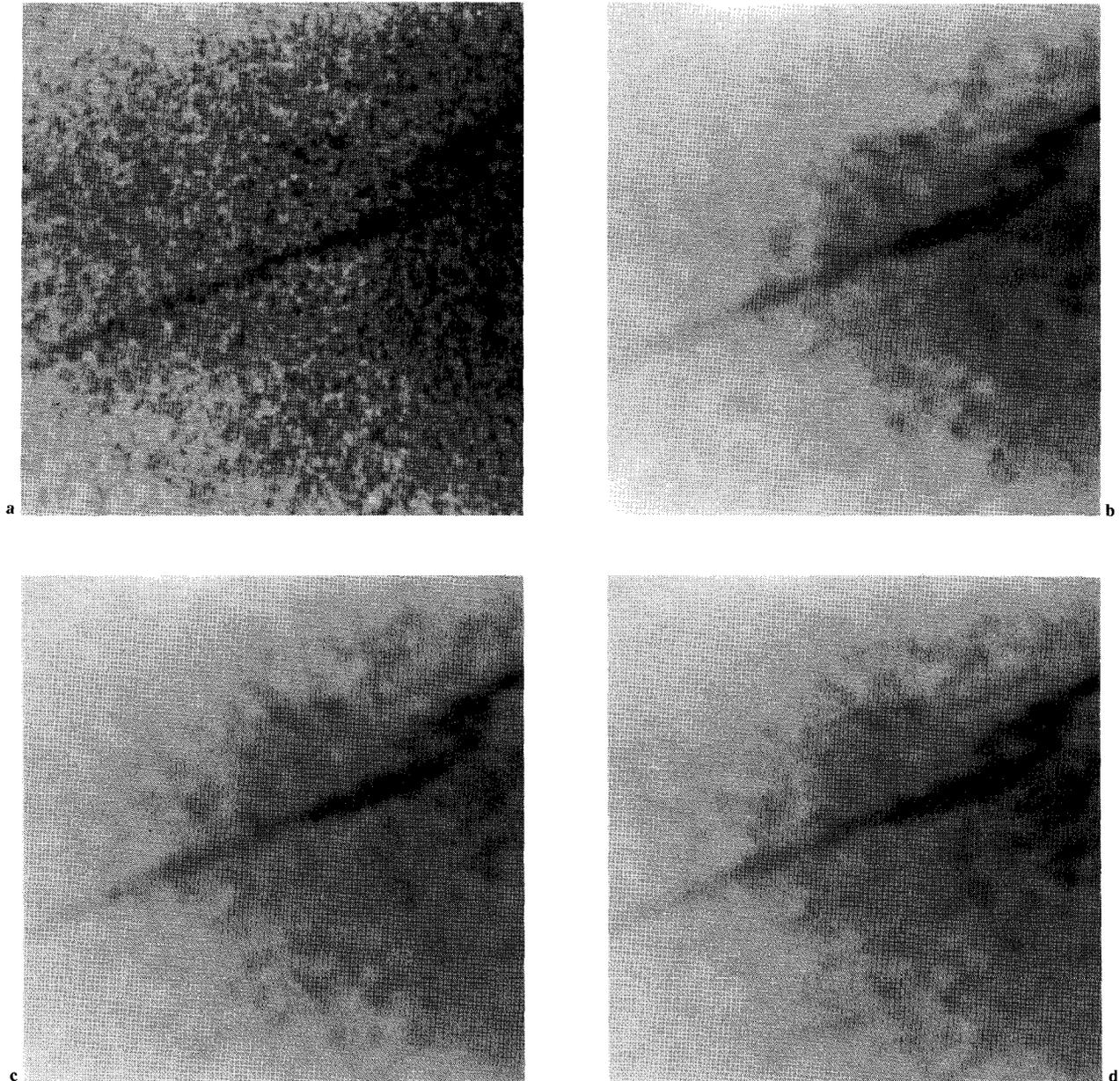


Figure 18. — Image réelle — Banque d'images du GdR 134 fissure. gdr. Filtrage 2D de taille 11×9 . Détection de contour par opérateur de Deriche : paramètre d'échelle $a = 0.7$.

- a) image initiale ;
- b) filtrage médian ($\alpha = 1.0$).
- c) filtrage $d\alpha$; $\alpha = 1.4$;
- d) filtrage $d\alpha$; $\alpha = 0.85$;

obtient un nombre élevé de faux contours (18 e). Du fait des caractéristiques de l'image initiale, une segmentation par croissance de région, après correction des variations à grande échelle spatiale de la valeur moyenne, fournit un résultat difficilement exploitable (18 g). Par contre l'effet

de réduction de bruit et de rehaussement de contraste du filtrage $d\alpha$, pour $\alpha = 0.85$, permet d'obtenir une image de contours (18 f) et une segmentation (18 h), de structure plus simple et mettant en évidence une bonne part des zones composant la fissure dans l'image initiale.

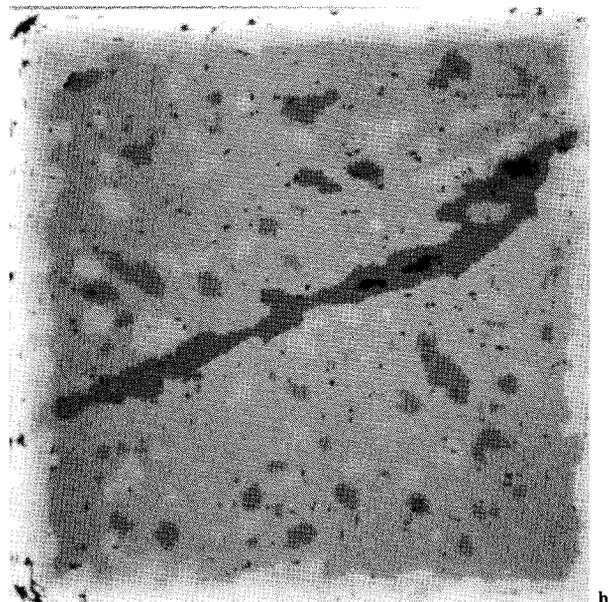
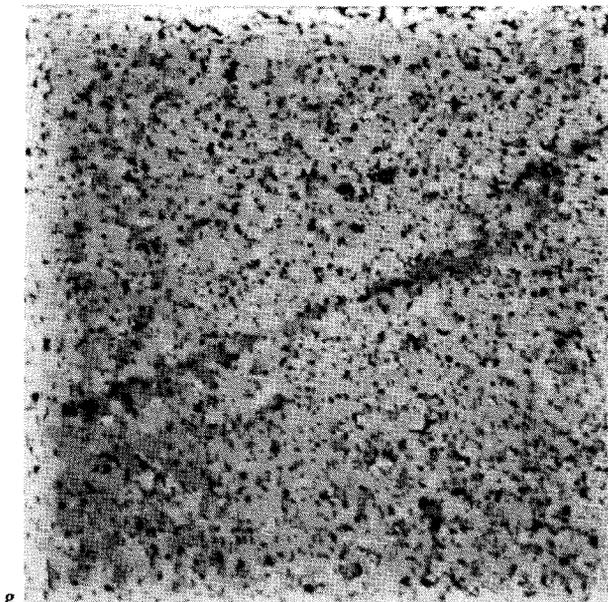
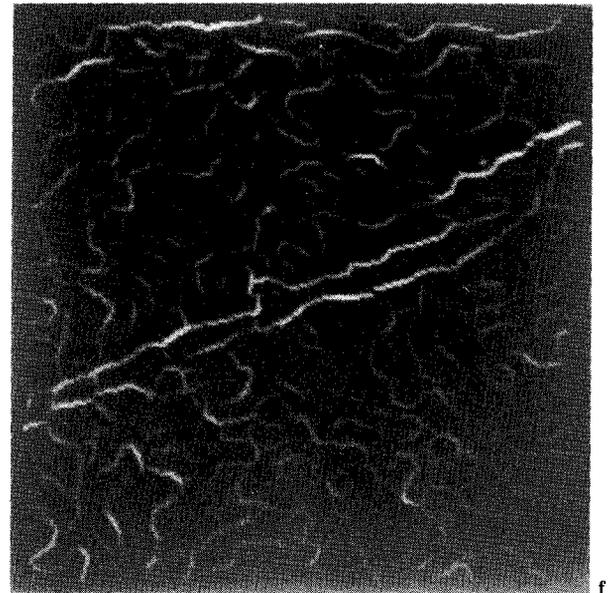
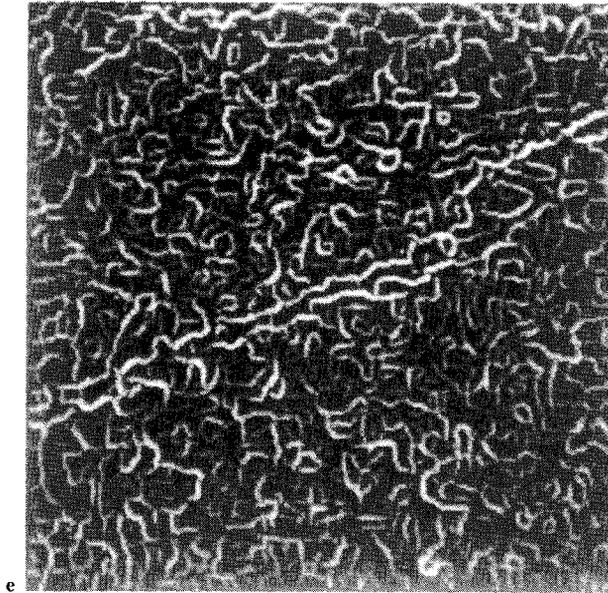


Figure 18 (suite).

- e) contours de l'image initiale (a) ;
- f) contours de l'image (d) ;
- g) segmentation de l'image initiale (a) ;
- h) segmentation de l'image (d).

7.3. REMARQUES

Les exemples présentés ci-dessus montrent l'intérêt d'une étape de filtrage d'image, préalable à la détection de contours ou à la segmentation en régions. Avec des filtres de type ESPEC ou $d\alpha$, il est possible de s'adapter aux cas de bruits impulsionsnels ou plus réguliers, tout en préservant, voire en accentuant les contrastes au voisinage des transitions entre régions.

Il est à noter que, pour l'échographie (echograp.gdr) et la radiographie (fissure.gdr), la qualité des images, mesurée en terme de rapport signal à bruit est assez faible. Les performances de la segmentation d'image après filtrage s'en trouvent difficiles à apprécier.

8. Autres domaines d'application

Dans cet article, nous nous sommes placés dans un contexte de prétraitement d'image. Cependant, les techniques développées, et en particulier celles basées sur l'approximation au sens d'une distance non euclidienne, peuvent s'appliquer au cas, plus général de l'estimation de paramètres de modèles de courbes ou surfaces pour lesquels la dépendance vis-à-vis des paramètres est linéaire. La détermination de la solution optimale consiste alors à rechercher, par des techniques numériques, le minimum d'une fonction convexe.

9. Conclusion

La segmentation consiste à faire une partition de l'image en domaines connexes homogènes. Lorsque les images sont bruitées, une phase préalable de filtrage est nécessaire. Ce prétraitement a pour but de renforcer l'homogénéité des régions, tout en préservant les transitions qui les séparent. Les filtres d'ordre constituent une classe d'opérateurs permettant d'atteindre ces deux objectifs.

Dans cet article, nous proposons trois approches permettant de définir des opérateurs optimaux appartenant à la classe des filtres d'ordre. Le modèle d'image retenu est simple (signal perturbé par un bruit blanc additif). Cependant, il permet d'aboutir à la mise au point de nouveaux opérateurs, basés sur un traitement non linéaire des statistiques d'ordre (NL-filtre), ayant de meilleures performances que les filtres linéaires et que les filtres d'ordre usuels effectuant des combinaisons linéaires des statistiques d'ordre (L-filtre).

En effectuant une approximation au sens d'une distance non euclidienne, on définit une famille de filtres (filtres de type $d\alpha$) contenant le filtre médian, le filtre moyennneur et le filtre milieu. En choisissant une valeur de α plus faible que 2, on limite l'effet d'élargissement de la zone de transition entre deux régions. Par rapport aux M-filtres [25] utilisés en estimation robuste [17] [19], il n'est pas nécessaire d'avoir de connaissances a priori sur la variance des perturbations.

En retenant un critère de maximum de vraisemblance, associé à une famille de densités de probabilité décrivant des comportements plus ou moins impulsionsnels du bruit d'entrée, on peut étendre la famille de filtres $d\alpha$ en choisissant une valeur de α comprise entre 0 et 1. On obtient alors un effet conjoint de réduction de bruit et de renforcement local des contrastes.

En adoptant une démarche d'estimation bayésienne à variance minimale, on aboutit, dans le cas d'un modèle de bruit exponentiel, à un filtre se comportant comme un filtre moyennneur pour les fluctuations de faible amplitude, et comme un filtre médian pour celles ayant de fortes amplitudes. Ce filtre est, par nature, robuste vis-à-vis des perturbations impulsionsnelles. Il utilise une information a priori sur la variance du bruit, mais cette connaissance peut ne pas être précise.

Une image est, en général, associée à un processus non stationnaire. Ce sont ces non-stationnarités que l'on perçoit et qui définissent la forme des structures observées. Un bon opérateur de traitement devrait logiquement s'adapter à ces non-stationnarités. La structure des filtres proposés dans cet article est assez simple. En adoptant une démarche similaire à celle proposée dans [27], basée sur une estimation du caractère plus ou moins impulsionsnel du bruit d'image, on pourra donc construire facilement un opérateur permettant de suivre les variations de valeur moyenne, tout en s'adaptant aux fluctuations de la distribution des perturbations.

Manuscrit reçu le 18 décembre 1991.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. N. ABDELMALEK, *Approximation theory and noise filtering in digital images*, Proc. 8th International Conference on Pattern Recognition, Paris, October 1986, pp. 202-205.
- [2] G. R. ARCE, R. J. CRINON, *Median filters : analysis for 2D recursively filtered signals*, IEEE Trans. ASSP, vol. 35, January 1987, pp. 60-69.
- [3] D. H. BALLARD, C. M. BROWN, *Computer vision*, Prentice Hall, 1982.
- [4] Ph. BOLON, M. MOUHOU, *Recursive separable median filtering*, in Signal Processing IV Theories and applications, Lacoume et al. Eds., Elsevier, 1988, pp. 1597-1600.
- [5] Ph. BOLON, J. L. FRUTTAZ, *Adaptive order filter. Application to edge enhancement of noisy images*, in Signal Processing V : Theories and Applications, Torres Masgrau Lagunas Eds., Elsevier 1990, pp. 817-820.
- [6] A. C. BOVIK, *Nonlinear filtering using linear combination of order statistics*, Report R.935, University of Illinois at Urbana-Champaign, January 1982.
- [7] A. C. BOVIK, T. S. HUANG, D. C. MUNSON, *A generalization of median filtering using linear combinations of order statistics*, IEEE Trans. ASSP vol. 31-6, December 1983, pp. 1342-1350.
- [8] A. C. BOVIK, *Streaking in median filtered images*, IEEE Trans. ASSP vol. 35-4, April 87, pp. 493-503.
- [9] Ph. CAPÉRAA, B. VAN CUTSEM, *Méthodes et modèles en statistique non paramétrique*, Dunod, 1988.

- [10] J. M. CHASSERY, M. MELKEMI, *Diagramme de Voronoï appliqué à la segmentation d'image et à la détection d'événements en imagerie multisource*, Traitement du Signal, vol. 8, n° 3, 1991, pp. 155-164.
- [11] H. A. DAVID, *Order statistics*, Wiley Interscience, New York, 1981.
- [12] R. DERICHE, *Détection optimale de contours avec une mise en œuvre récursive*, Actes du 11^e Colloque Grets, Nice, juin 1987, pp. 483-486.
- [13] N. C. GALLAGHER, G. L. WISE, *A theoretical analysis of the properties of median filters*, IEEE Trans. ASSP vol. 29-6, December 1981, pp. 1136-1141.
- [14] P. HEININEN, Y. NEUVO, *FIR median hybrid filters*, IEEE Trans. ASSP vol. 35-6, January 1987, pp. 832-838.
- [15] T. S. HUANG, G. J. YANG, G. Y. TANG, *A fast 2D median filtering algorithm*, IEEE Trans. ASSP, vol. 27, no. 1, February 1979, pp. 13-18.
- [16] P. J. HUBER, *Robust estimation of a location parameter*, Annals of Mathematical Statistics, vol. 35, 1964, pp. 73-101.
- [17] J. M. JOLION, P. MEER, S. BATAOUCHE, *Robust clustering with applications in computer vision*, IEEE Trans. PAMI vol. 13-8, August 1991, pp. 791-802.
- [18] J. M. JOLION, *Robust Kalman Filter*, Rapport interne LISPI no. RR 07.91, Université Claude Bernard, Lyon, 1991.
- [19] R. L. KASHYAP, K. B. EOM, *Robust image models and their applications*, Advances in Electronics and Electron Physics, vol. 70, 1988, pp. 79-157.
- [20] V. KIM, L. YAROSLAVSKII, *Rank algorithm for picture processing*, CVGIP, vol. 35, 1986, pp. 234-258.
- [21] Y. H. LEE, A. T. FAM, *An edge gradient enhancing adaptive order statistic filter*, IEEE Trans. ASSP, vol. 35, no. 5, May 1987, pp. 680-695.
- [22] E. H. LLOYD, *Least square estimation of location and scale parameters using order statistics*, Biometrika vol. 39, 1952, pp. 88-95.
- [23] L. NAAMAN, A. C. BOVIK, *Least square order statistics filters for signal restoration*, IEEE Trans. CAS vol. 38-3, March 1991, pp. 244-257.
- [24] A. NIEMENEN, Y. NEUVO, *Comments on Theoretical analysis of max/median filters*, IEEE Trans. ASSP, vol. 36-5, May 1988, pp. 826-827.
- [25] I. PITAS, A. N. VENETSANOPOULOS, *Digital nonlinear filters*, Kluwer Academic Press, 1990.
- [26] A. RAJ, Ph. BOLON, *Streaking effects of recursive median filters and symmetrical recursive median filters*, in Digital Signal Processing V, Capellini et al. Eds., Elsevier Science Publishers, September 1991, pp. 299-304.
- [27] A. RESTREPO, A. C. BOVIK, *Adaptive trimmed mean filters for image restoration*, IEEE Trans. ASSP vol. 36, August 1988, pp. 1326-1337.
- [28] J. R. RICE, J. S. WHITE, *Norms for smoothing and estimation*, SIAM Review, vol. 6, 1964, pp. 243-256.
- [29] L. L. SCHARF, *Statistical signal processing*, Addison Wesley, 1991.
- [30] H. D. TAGARE, R. J. P. de FIGUEIREDO, *Order filters*, Proc. IEEE vol. 73-1, January 1985, pp. 163-165.
- [31] Ph. TASSI, *Méthodes statistiques*, Economica, 2^e édition, 1989.
- [32] J. W. TUKEY, *Nonlinear (nonsuperposable) methods for smoothing data*, in Electronics and aerospace systems conference, Washington, October 1974, p. 673.
- [33] X. WANG, D. WANG, *On the max/median filter*, IEEE Trans. ASSP vol. 38, August 1990, vol. 38, no. 8, August 1990, pp. 1473-1475.
- [34] P. ZAMPERONI, *Some adaptive rank order filters for image enhancement*, Pattern Recognition Letters vol. 11, 1990, pp. 81-86.

Référence additionnelle proposée par l'auteur lors de la parution :

- [35] J. ASTOLA, Y. NEUVO, *Optimal type median filters for exponential noise distribution*, Signal processing, vol. 17, pp. 95-104, 1989.

Remerciements

L'auteur tient à remercier les personnes qui ont contribué, de près ou de loin (et consciemment ou non !), à l'avancement de ces travaux, et en particulier Messieurs D. Baudois, P. Comon, R. David, J. L. Lacoume, P. Lambert, B. Luzeau, J. L. Nicolas.

Annexe 1

INCERTITUDES SUR LES COEFFICIENTS D'UN L-FILTRE

A1.1

Soit F (resp. f) la fonction de répartition (resp. la densité de probabilité) d'un bruit blanc que l'on filtre par un filtre d'ordre (L -filtre) caractérisé par le vecteur de coefficients c . La variance de sortie du filtre, donnée par :

$$(A1.1) \quad \text{var } Y = c' R c$$

est fonction continue de c .

Donc si l'on définit une suite de filtres caractérisés par le vecteur coefficient c_m , la suite des variances de sortie $\text{var } Y_m$ converge vers $\text{var } Y$.

A1.2

On définit maintenant une suite de processus d'entrée X^m de type bruit blanc centré, ayant pour fonction de répartition F_m et pour densité de probabilité f_m symétrique par rapport à l'origine. La suite X^m converge en loi vers le processus X , de fonction de répartition F et de densité de probabilité f .

Soit R_m (resp. R) la matrice de corrélation du bruit X^m (resp. X) ordonné. D'après les relations (8) et (9), la suite R_m converge vers R . On suppose R_m et R inversibles.

Par ailleurs, pour une matrice quelconque A inversible, on a :

$$(A1.2) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{com}(A)'$$

où $\det(A)$ désigne le déterminant de A et $\text{com}(A)$ sa comatrice.

L'inversion est continue si $\det(A)$ est différent de zéro. Donc la suite des inverses des matrices de corrélation R_m^{-1} converge vers R^{-1} .

L'application qui à R^{-1} associe un vecteur de coefficients optimaux c_{opt} étant également continue, la suite des vecteurs optimaux $c_{m, \text{opt}}$ associés à R_m converge vers c_{opt} .

Annexe 2

VARIANCE DE SORTIE DES FILTRES DE TYPE $d\alpha$. VALEURS ASYMPTOTIQUES

On considère les opérateurs, décrits au paragraphe 3, dont la sortie est obtenue par minimisation d'un critère de distance $d\alpha$, $\alpha \geq 1$.

L'entrée du filtre est un bruit blanc de densité de probabilité f_B

$$(A2.1) \quad f(t) = C \cdot \exp(-K |t|^\lambda) \quad \lambda > 0.$$

Cette famille de densités de probabilité permet de décrire des perturbations ayant un caractère assez impulsif (λ faible, kurtosis élevé) ou assez concentré (λ fort, kurtosis faible).

En posant $\beta = 1/\lambda$, on a les relations suivantes :

$$(A2.2) \quad \text{variance (B)} = \sigma^2 = \frac{\Gamma(3\beta)}{\Gamma(\beta) \cdot K^{2\beta}}$$

Γ désignant la fonction gamma d'Euler.

$$(A2.3) \quad \text{kurtosis (B)} = \frac{\Gamma(5\beta) \cdot \Gamma(\beta)}{[\Gamma(3\beta)]^2} - 3.$$

En utilisant un résultat de Huber [16], on peut montrer que la sortie du filtre $d\alpha$ tend, quand la taille du filtre N tend vers l'infini, vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance V donnée par (A2.4)

$$(A2.4) \quad V = \frac{1}{N} \cdot \frac{\int \alpha^2 |t|^{2(\alpha-1)} f(t) dt}{[h'(0)]^2}.$$

La fonction h étant définie par :

$$(A2.5) \quad h(u) = \alpha \int \text{sgn}(t-u) |t-u|^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Cette fonction peut se mettre sous forme de produit de convolution, au sens des distributions.

$$(A2.6) \quad h = -\alpha f * g.$$

$$\text{avec} \quad g(t) = \text{sgn}(t) \cdot |t|^{\alpha-1}.$$

Par dérivation, on obtient

$$(A2.7) \quad h' = -\alpha f' * g = -\alpha f * g'.$$

Pour λ fini, f' et g sont des fonctions. En tenant compte des relations A2.1 et A2.2, on obtient :

$$(A2.8) \quad V = \frac{\sigma^2}{N} \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{[\Gamma(3\beta)]} \cdot \beta^2 \cdot \frac{\Gamma(\beta(2\alpha-1)) (\Gamma(\beta))}{[\Gamma(\beta(\alpha-1)+1)]^2}.$$

Lorsque λ tend vers l'infini, la loi du bruit d'entrée tend vers une loi uniforme dans l'intervalle $[-\sigma\sqrt{3}, \sigma\sqrt{3}]$. La

relation A2.7 devient :

$$(A2.9) \quad h'(u) = -\frac{\alpha}{2\sqrt{3}} (g(u+\sqrt{3}) - g(u-\sqrt{3})).$$

D'où l'on déduit :

$$(A2.10) \quad V = \frac{\sigma^2}{N} \cdot \frac{3}{2\alpha-1}.$$

La figure A2.1 donne quelques valeurs du rapport (variance sortie)/(variance asymptotique) pour différentes lois du bruit d'entrée, et pour une valeur $\alpha = 4$.

On peut observer que la convergence vers les valeurs asymptotiques est assez lente. De plus, son sens dépend de la loi de probabilité de l'entrée.

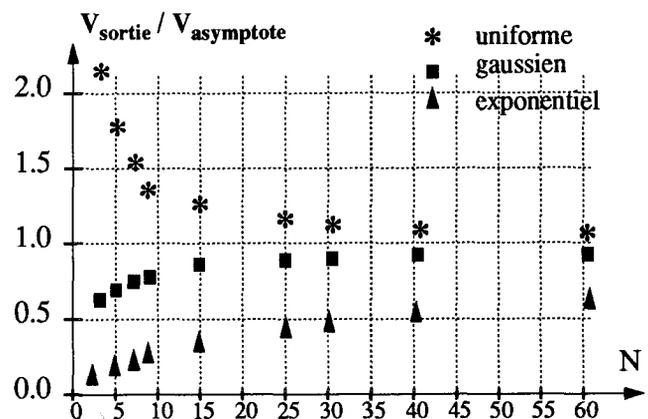


Figure A2.1. — Convergence vers la variance asymptotique — Filtre $d\alpha$, $\alpha = 4$. Rapport (variance sortie)/(variance asymptotique). Valeurs expérimentales — échantillon de taille 20 000.

Annexe 3

COEFFICIENTS DU L-FILTRE OPTIMAL POUR UN BRUIT EXPONENTIEL.

Les coefficients du L-filtre optimal pour un bruit blanc exponentiel de densité de probabilité

$$(A3.1) \quad f(t) = C \cdot \exp(-K |t|)$$

ont été calculés numériquement par Bovik [6] [7] pour des tailles de filtre, N , comprises entre 3 et 25. Nous en donnons ici quelques valeurs.

Tableau A3.1. — Coefficients du L-Filtre optimal pour un bruit exponentiel — d'après [6].

N	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
3	0.15168	0.69663	0.15168					
5	0.03944	0.20322	0.51468	0.20322	0.03944			
7	0.02239	0.03344	0.23314	0.42208	0.23314	0.03344	0.02239	
9	-0.01899	0.02904	0.06965	0.23795	0.36469	*		
11	0.01320	-0.00178	0.01390	0.08628	0.22814	0.32054	*	
13	0.00038	0.00013	0.00498	0.02869	0.09913	0.22111	0.29117	*
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
25	0.00550	0.00335	-0.00427	-0.00101	-0.00008	0.00065	0.00314	0.01064
	C9	C10	C11	C12	C13	C14		
	0.02907	0.06499	0.11835	0.17195	0.19541	*		

* Les autres coefficients s'obtiennent par symétrie par rapport au terme médian

Ceci permet d'apprécier l'effet d'élargissement des contours en étudiant la réponse du L-filtre optimal à une transition en échelon d'amplitude 1.

Tableau A3.2. — Réponse du L-Filtre optimal pour un bruit exponentiel à un contour en échelon.

entrée N	0	0	0	0	1	1	1	1
3	0	0	0	0.1517	0.8483	1.0	1.0	1.0
5	0	0	0.0394	0.2427	0.7573	0.9606	1.0	1.0
7	0	0.0224	0.0558	0.2890	0.7110	0.9442	0.9776	1.0